

Міністерство освіти і науки України
Льотна академія Національного авіаційного університету
Інститут кібернетики ім. В.М.Глушкова Національної академії наук України
Центральноукраїнський національний технічний університет
Центральноукраїнський державний
педагогічний університет ім.В.Винниченка
Запорізький національний університет
Донецький національний медичний університет
Інститут модернізації та змісту освіти
Національний університет «Запорізька політехніка»
Громадська організація «Системні дослідження»

Матеріали
XXII Міжнародного науково-практичного
семінару імені А.Я. Петренюка

**«КОМБІНАТОРНІ КОНФІГУРАЦІЇ
ТА ЇХНІ ЗАСТОСУВАННЯ»**

15-16 травня 2020 року

Запоріжжя - Кропивницький
2020 р.

УДК 519

К 63

*Рекомендовано до видання Вченою радою
Льотної академії Національного авіаційного університету
(протокол № 2 від 13.03.2020)*

Редакційна колегія:

Донець Г. П., д. ф.-м. н., професор;

Бакурова А.В., д.е.н., професор;

Козін І.В., д.ф.-м.н., професор;

Семенюта М.Ф., к.ф.-м.н., доцент;

Шендеровський В.А., д.ф.-м.н., професор;

Якуніна І.Л. – к.т.н.

К 63 Комбінаторні конфігурації та їхні застосування:

Матеріали XXII Міжнародного науково-практичного семінару імені А.Я. Петренюка (Запоріжжя - Кропивницький, 15-16 травня 2020 року) / за ред. Г.П. Донця – Кропивницький: ПП «Ексклюзив-Систем», 2020. – 207с.

ISBN 978-617-7079-95-7

У збірнику подано матеріали XXII Міжнародного науково-практичного семінару «Комбінаторні конфігурації та їхні застосування» імені А.Я. Петренюка, який відбувся 15-16 травня 2020 року. Коло обговорених проблем: комбінаторні розміщення, графи і задачі оптимізації на них, автомати, скінченні алгебри, математична логіка і теорія множин, теорія ігор і теорія прийняття рішень та їхні застосування в різних галузях; реалізація математичних моделей на дискретних та неперервних множинах (автоматизовані системи керування, системи автоматизованого проектування, системи підтримки прийняття рішень); програмне забезпечення синтезу та аналізу комбінаторних конфігурацій; розпізнавання образів, нейромережі та методи машинного навчання; фрагментарні структури, алгоритми та метаевристики; топологія та історія розвитку української науки; кодування, інформаційна безпека та захист інформації.

Для науковців, викладачів вищих навчальних закладів, а також аспірантів, студентів і фахівців із застосування комбінаторних конфігурацій.

УДК 519

ISBN 978-617-7079-95-7 © ПП «Ексклюзив-Систем», 2020

Засновник семінару – Державна льотна академія України

Голова програмного комітету – Донець Г. П., д.ф.-м.н., професор, завідувач відділом економічної кібернетики Інституту кібернетики НАН України.

Співголова програмного комітету – Семенюта М.Ф., к.ф.-м.н., доцент, завідувач кафедри фізико-математичних дисциплін Льотної академії Національного авіаційного університету.

Програмний комітет:

Deineko Vladimir – PhD, DSc. Associate Professor (Reader), Warwick Business School, Great Britain;

Айвазян Е.І. – д.п.н., професор, професор кафедри загальної математики Єреванського державного університету;

Бакурова А.В. – д.е.н., професор, професор кафедри системного аналізу та обчислювальної математики НУ «Запорізька політехніка»;

Безущак О.О. – к.ф.-м.н., доцент, декан механіко-математичного факультету Київського національного університету ім. Т. Шевченка;

Гуляницький Л.Ф. – д.т.н., старший науковий співробітник, завідувач відділом методів комбінаторної оптимізації та інтелектуальних ІТ Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України;

Ємець О.О. – д.ф.-м.н., професор, завідувач кафедри математичного моделювання та соціальної інформатики, Полтавський університет економіки і торгівлі;

Ісаченко О.М. – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри інформаційних систем управління Білоруського державного університету;

Козін І.В. – д.ф.-м.н., професор, професор кафедри економічної кібернетики Запорізького національного університету;

Кривий С.Л. – д.ф.-м.н., професор, професор кафедри інтелектуальних програмних систем Київського національного університету ім. Т. Шевченка;

Маляр М.М. – д.т.н., професор, професор кафедри кібернетики і прикладної математики Ужгородського національного університету;

Мелешко Є.В. – к.т.н., доцент, докторант кафедри кібербезпеки та програмного забезпечення Центральноукраїнського національного технічного університету;

Неділько С.М. – д.т.н., професор, начальник Льотної академії Національного авіаційного університету;

Новожилова М.В. – д.ф.-м.н., професор, завідувач кафедри прикладної математики та інформаційних технологій Харківського національного університету міського господарства ім. О.Бекетова;

Перепелиця В.О. – д.ф.-м.н., професор, професор кафедри економічної кібернетики Запорізького національного університету;

Романова Т.Є. – д.т.н., професор, провідний науковий співробітник відділу математичного моделювання й оптимального проектування Інституту проблем машинобудування ім. А.М. Підгорного НАН України;

Снитюк В.Є. – д.т.н., професор, декан факультету інформаційних технологій Київського національного університету ім. Т. Шевченка;

Стецюк П.І. – д.ф.-м.н., професор, завідувач відділом методів негладкої оптимізації Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України;

Теленик С.Ф. – д.ф.-м.н., професор, декан факультету інформатики та обчислювальної техніки Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»;

Тимофієва Н.К. – д.т.н., старший науковий співробітник відділу комплексних досліджень інформаційних технологій Міжнародного науковонавчального центру інформаційних технологій та систем НАН та МОН України;

Турчина В.А. – к.ф.-м.н., доцент, завідувач кафедри обчислювальної математики та математичної кібернетики Дніпровського національного університету ім.О.Гончара;

Ус С.А. – к.ф.-м.н, доцент, професор кафедри системного аналізу і управління Національного технічного університету «Дніпровська політехніка»;

Шендеровський В.А. – д.ф.-м.н., професор, віцепрезидент Українського фізичного товариства;

Яковлєв С.В. – заслужений діяч науки і техніки України, д.ф.-м.н., професор, професор кафедри інформатики Національного аерокосмічного університету ім. М. Є. Жуковського "ХАІ".

Організаційний комітет:

Голова – Беліков С.Б., професор, д.т.н., ректор Національного університету «Запорізька політехніка».

Співголова організаційного комітету – Наумик В.В., професор, д.т.н., проректор з НР та МД Національного університету «Запорізька політехніка».

Члени оргкомітету:

Корніч Г.В. – д.ф.-м.н., професор, завідувач кафедри системного аналізу та обчислювальної математики НУ «Запорізька політехніка»;

Мікаелян Г.С. – к.ф.-м.н., д.п.н., професор, професор кафедри математики і методики її викладання Вірменського державного педагогічного університету ім. Х.Абовяна;

Джума Л.М. – к.т.н., доцент кафедри інформаційних технологій Льотної академії Національного авіаційного університету;

Дмітрієв О.М. – к.т.н., завідувач кафедри льотної експлуатації, аеродинаміки та динаміки польоту Льотної академії Національного авіаційного університету;

Козіна Г.Л. – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри захисту інформації НУ «Запорізька політехніка»;

Кривцун О.В. – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри системного аналізу та обчислювальної математики НУ «Запорізька політехніка»;

Курапов С.В. – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри програмної інженерії Запорізького національного університету;

Неділько В.М. – к.т.н., доцент, завідувач кафедри інформаційних технологій Льотної академії Національного авіаційного університету;

Петренюк В.І. – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри кібербезпеки та програмного забезпечення Центральноукраїнського національного технічного університету;

Плачинда Т.С. – д.п.н., професор, завідувач кафедри професійної педагогіки та соціально-гуманітарних наук Льотної академії Національного авіаційного університету;

Півень М. І. – к.п.н., доцент, в. о. заступника начальника академії з навчальної науково-методичної та виховної роботи;

Рябенко А.Є. – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри системного аналізу та обчислювальної математики НУ «Запорізька політехніка»;

Терещенко Е.В. – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри системного аналізу та обчислювальної математики НУ «Запорізька політехніка»;

Шерман З.О. – к.ф.-м.н., старший викладач кафедри медичної фізики та інформаційних технологій №2 Донецького національного медичного університету;

Шульгін В.А. – к.т.н., доцент, декан факультету льотної експлуатації Льотної академії Національного авіаційного університету;

Якуніна І.І. – к.т.н., доцент кафедри фізико-математичних дисциплін Льотної академії Національного авіаційного університету;

Morozovska Kateryna – Doktorand, School of Electrical Engineering and Computer Science, KTH Royal Institute of Technology, Sweden;

Громадська організація «Системні дослідження».

Kryvtsun O., Tereschenko E., Morozovska K.

*National University «Zaporizhzhia Polytechnic»,
Ukraine School of Electrical Engineering and Computer
Science, Zaporizhzhya,
KTH Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden*
A FEW METHODS FOR CONSTRUCTION OF FEASIBLE
LABELING..... 15

Riznyk V.V.

Lviv Polytechnic National University
GRAPHIC REPRESENTATION OF TOROIDAL
REFERENCE SYSTEMS FOR VECTOR CODES 19

Shmelova T., Sikirda Yu., Kasatkin M.

*National Aviation University,
Flight Academy of the National Aviation University,
Kharkiv National University of Air Forces named by
I. Kozhedub*
INTEGRATED COLLABORATIVE DECISION MAKING
MODELS IN AIR NAVIGATION SYSTEM..... 23

**Бакурова А.В., Пасічник М.С., Терещенко Е.В.,
Філей Ю.В.**

Національний університет «Запорізька політехніка»
МОДЕЛЮВАННЯ ОЦІНКИ ОСОБИ ВИННОГО ДЛЯ
СИСТЕМИ НЕЧІТКОЇ ПРОДУКЦІЇ В СУДІ 27

Бондар О.П.

Льотна академія НАУ
ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ У ЗВО..... 31

Воблый В.А., Архипова Н.А.

ВИНИТИ РАН, Москва
ОПЫТ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МАШИННОГО ПЕРЕВОДА
ПРИ ПРОИЗВОДСТВЕ РЕФЕРАТИВНОГО ЖУРНАЛА
«МАТЕМАТИКА» 35

Глухов О.Д. <i>Національний авіаційний університет</i> ОДНА ЗАДАЧА ПРО ПАРКЕТ НА ТОРІ.....	38
Голик О.П., Ісмаїл Мухаммед, Рубцов В.С. <i>Центральноукраїнський національний технічний університет</i> ФОРМАЛІЗАЦІЯ ПРОЦЕСУ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ДЛЯ КЕРУВАННЯ ПРОЦЕСОМ АВТОНОМНОГО ЕНЕРГОПОСТАЧАННЯ	40
Гуляницький Л.Ф., Рясна І.І. <i>Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України</i> ТРИКУТНІ НОРМИ ТА КОНОРМИ З ПОРОГОМ ТА ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ.....	44
Донец Г.А., Гурин А.Л. <i>Інститут кібернетики ім.В.М.Глушкова НАН України</i> ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О МАТЕМАТИЧЕСКОМ СЕЙФЕ НА ГРАФАХ	46
Дубровін В.І., Петрик Б.В., Неласа Г.В. <i>Національний університет “Запорізька Політехніка”</i> ВИБІР ВЕЙВЛЕТ-БАЗИСУ ДЛЯ МОНІТОРИНГУ МЕРЕЖЕВОГО ТРАФІКУ.....	51
Зайцев Е.П. <i>Летная академия НАУ</i> ДВАЖДЫ НЕЛИНЕЙНАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА, НАГРЕВАЕМОГО ЗОНАЛЬНО ПО ТОРЦУ	58
Исаченко А.Н. <i>Белорусский государственный университет</i> БАЗЫ ДАННЫХ И МАТРОИДЫ.....	62

Исаченко А.Н., Ревякин А.М.

Белорусский государственный университет

Национальный исследовательский университет «МИЭТ»

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ “ЖАДНОГО” РЕШЕНИЯ ДЛЯ
СИСТЕМ НЕЗАВИСИМОСТИ.....

65

Кадубовський О.А.

*ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний
університет»*

ПЕРЕРАХУВАННЯ НЕІЗОМОРФНИХ
ДВОКОЛЬОРОВИХ ХОРДОВИХ О-ДІАГРАМ РОДУ
ДВА З ОДНИМ СІРИМ (АБО ЧОРНИМ)
ЦИКЛОМ.....

68

Козин И.В., Полюга С.И.

Запорожский национальный университет,

*Запорожский областной институт последипломного
педагогического образования*

МЕТОД ПРЫГАЮЩИХ ЛЯГУШЕК ДЛЯ УПАКОВКИ
МНОГОМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ.....

73

Кривий С.Л.

*Київський національний університет імені Тараса
Шевченка*

КРИПТОСИСТЕМА НА ОСНОВІ СКІНЧЕННИХ
КОМУТАТИВНИХ КІЛЕЦЬ З ОДИНИЦЕЮ.....

77

**Курапов С.В., Неласая А.В., Давидовский М.В.,
Полюга С.И.**

Запорожский национальный университет

*Национальный университет «Запорожская
политехника»*

*Запорожский областной институт последипломного
педагогического образования*

ПОСТРОЕНИЕ И СВОЙСТВА МАТРИЦЫ РЕБЕРНЫХ
РАЗРЕЗОВ ГРАФА.....

82

Маляр М.М., Маляр-Газда Н.М., Шаркаді М.М. <i>ДВНЗ «Ужгородський національний університет»</i> МАШИННЕ НАВЧАННЯ У ПРОЦЕСІ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ.....	83
Мелешко Є.В., Дресва Г.М., Дресв О.М. <i>Центральноукраїнський національний технічний університет</i> МЕТОД КЛАСТЕРИЗАЦІЇ КОРИСТУВАЧІВ СОЦІАЛЬНОЇ МЕРЕЖІ НА ОСНОВІ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ.....	86
Мелешко Є.В., Якименко М.С., Резніченко В.А. <i>Центральноукраїнський національний технічний університет</i> МЕТОДИ ОЦІНКИ ЯКОСТІ РОБОТИ АЛГОРИТМІВ МАШИННОГО НАВЧАННЯ	90
Остапенко О.О., Чала Л.Е. <i>Харківський національний університет радіоелектроніки</i> ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ МОДЕЛЕЙ ХІМІЧНИХ СПОЛУК ДЛЯ ЗАДАЧ ПОШУКУ ІДЕНТИЧНОЇ СТРУКТУРИ.....	94
Пасенченко Ю. А. <i>Військовий інститут телекомунікацій та інформатизації ім. Героїв Крут</i> КЕРУВАННЯ СИСТЕМОЮ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ З ЗМІННИМИ ПОТОКАМИ ВИМОГ.....	98
Петренюк В.І., Петренюк Д.А. <i>Центральноукраїнський національний технічний університет</i> <i>Інститут кібернетики ім.В.М.Глушкова НАН України</i> 7-МИ ВЕРШИННІ ПІДГРАФИ 8-МИ ВЕРШИННИХ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЙ ДЛЯ ПОВЕРХНІ КЛЕЙНА.....	101

Рибальченко О.В.

Институт Кібернетики НАН України

ДОСЛІДЖЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ АЛГОРИТМУ ОМК
ЗІ ЗБІЛЬШЕНИМ ОКОЛОМ МОЖЛИВИХ ПЕРЕХОДІВ 115

Самарай В.П., Самарай Р.В.

НТУУ “КПІ ім.І.Сікорського”

КЛАСИФІКАЦІЯ ЛИВАРНИХ МАТЕМАТИЧНИХ
МОДЕЛЕЙ 121

Самарай В.П., Самарай Р.В.

НТУУ “КПІ ім.І.Сікорського”

МОДЕЛЬНИЙ АПАРАТ ОПТИМІЗАЦІЇ ЛИВАРНОГО
ВИРОБНИЦТВА І ТЕОРІЯ ГРАФІВ..... 126

Сгадов С.А.

*Национальный университет "Запорожская
политехника"*

ПРОЦЕДУРНАЯ ГЕНЕРАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ
ПЛАНАРНЫХ ГРАФОВ..... 130

Селютин Е.К.

Запорожский национальный университет

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПРЫГАЮЩИХ ЛЯГУШЕК
ДЛЯ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВА 133

Семенюта М.Ф.

Летная академия НАУ

СУПЕР ФИБОНАЧЧИ ГРАЦИОЗНАЯ РАЗМЕТКА
ЭЙЛЕРОВЫХ ГРАФОВ..... 137

Семенюта М.Ф., Айвазян Э. И., Микаелян Г. С.

Летная академия НАУ,

Ереванский государственный университет, Армения

*Армянский государственный педагогический
университет имени Х. Абовяна, Армения*

МАССИВ КОЦИГА И МАГИЧЕСКАЯ РАЗМЕТКА
ГРАФА..... 141

Семенюта М.Ф., Дмитриев О.Н., Шульгин В.А. <i>Летная академия НАУ</i> О ГРУППОВЫХ МАГИЧЕСКИХ РАЗМЕТКАХ ГРАФОВ.....	144
Семенюта М.Ф., Неделько С. Н., Неделько В. Н. <i>Летная академия НАУ</i> О СВОЙСТВАХ КУБОВ ФИБОНАЧЧИ	146
Сіряк А.В., Турчина В.А. <i>Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара</i> ПРО МЕТОД ДОВЕДЕННЯ З НУЛЬОВИМ ПІЗНАННЯМ.....	150
Скрябіна А. В., Стеганцева П. Г. <i>Запорізький національний університет</i> ТОПОЛОГІЇ НА n -ЕЛЕМЕНТНІЙ МНОЖИНІ, ЯКІ ІНДУКУЮТЬ БЛИЗЬКІ ДО ДИСКРЕТНОЇ ТОПОЛОГІЇ НА $(n - 1)$ -ЕЛЕМЕНТНІЙ МНОЖИНІ.....	154
Смірнова Т.В., Дреєв О.М., Смірнов О.А., Солових Є.К. <i>Центрально український національний технічний університет</i> РЕАЛІЗАЦІЯ ІНФОРМАЦІЙНОЇ СТРУКТУРИ ТЕХНОЛОГІЧНОГО ПРОЦЕСУ ЕЛЕКТРОДУГОВОГО НАПИЛЕННЯ.....	157
Соломко М.Т., Замрій Б.А. <i>Національний університет водного господарства та природокористування</i> ОПТИМАЛЬНЕ ЧЕРГУВАННЯ ЛОГІЧНИХ ОПЕРАЦІЙ ПРИ МІНІМІЗАЦІЇ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ.....	161

Стецюк П.І., Ткаченко О.В., Хом'як О.М. <i>Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, ДП "Івченко-Прогрес"</i> ДВІ 7-ПАРАМЕТРИЧНІ КРИВІ ДЛЯ ПОБУДОВИ ПРОФІЛЮ СПИНКИ ЛОПАТКИ.....	170
Тимофієва Н.К. <i>Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій та систем НАН та МОН України</i> КОМБІНАТОРНІ КОНФІГУРАЦІЇ, ЯКІ ВИНИКАЮТЬ В ЗАДАЧАХ РІЗНИХ КЛАСІВ ІЗ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ІНТЕЛЕКТУ.....	174
Турчина В.А., Доманська Т.М. <i>Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара</i> ПРО МНОЖИНИ РОЗРІЗАЮЧИХ РЕБЕР ТА РОЗРІЗАЮЧІ ВЕРШИНИ ГРАФІВ.....	178
Шендеровський В.А., Лісковець С.М. <i>Інститут фізики НАН України, Луцький національний технічний університет</i> МИКОЛА ГУЛАК - З ПЛЕЯДИ ТВОРЦІВ БАГАТОВИМІРНОЇ ГЕОМЕТРІЇ.....	182
Шерман З.А. <i>Донецький національний медичинський університет</i> РАДИО РАЗМЕТКА ГРАФОВ.....	185
Шингалов Д.В., Мелешко Є.В., Босько В.В. <i>Центральноукраїнський національний технічний університет</i> МЕТОДИ НОРМАЛІЗАЦІЇ ДАНИХ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ МАШИННОГО НАВЧАННЯ.....	187

**Широкорад Д.В, Думін О.М., Плахтій В.А.,
Корніч Г.В.**

*Національний Університет «Запорізька політехніка»,
Харківський національний університет імені В. Н.
Каразіна*

**ОБРОБКА СИГНАЛІВ ПРИ ПІДПОВЕРХНЕВІЙ
РАДІОЛОКАЦІЇ ШТУЧНИМИ НЕЙРОННИМИ
МЕРЕЖАМИ.....** 190

Якуніна І.Л.

Льотна академія НАУ

**ЗАСТОСУВАННЯ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ В ЗАДАЧАХ
АВІАЦІЙНОГО СПРЯМУВАННЯ** 195

Khaled Khattab

Aleppo University, Syria

**APPLICATION OF FLOW GRAPHS METHOD FOR
ANALYSING LINEAR SYSTEMS OF EQUATIONS.....** 199

РЕЗОЛЮЦІЯ

**XXII Міжнародного науково-практичного семінару
«Комбінаторні конфігурації та їхні застосування»
15 травня 2020 р.**

202

ДЕЯКІ СПОСОБИ ПОБУДОВИ ДОПУСТИМОЇ РОЗМІТКИ

Olena Kryvtsun¹, Elina Tereschenko¹, Kateryna Morozovska²

¹Національний університет «Запорізька політехніка»

²KTH Royal Institute of Technology, Sweden

Abstract. Approximate algorithms for constructing a minimum feasible labeling for a tree are considered based on a greedy approach, combined with a breadth-first search and depth-first search.

Let sets A and B be in a *fragmentary relation* $A <_1 B$, if $A \subset B$ and $|B \setminus A| = 1$. *Fragmentary structure* is an ordered pair (X, Φ) , where X is a finite set and $\Phi = \{E_0, E_1, \dots, E_m\}$ is a family of its subsets $E_i \subseteq X$, $i = 0, \dots, m$, for $E_0 \equiv \emptyset$ and for every subset of Φ to be in a fragmentary relation to at least one other subset from Φ [1]. A *feasible graph* is an acyclic directed single-rooted graph on which Hasse diagram of some fragmentary structure can be constructed [2]. Fragmentary structures are *isomorphic* if they are described by feasible isomorphic graphs. Then feasible graph corresponds to the class F of isomorphic fragmentary structures. Solving problems of counting and enumeration of fragmentary structures leads in such a numerical characteristic of the feasible graph and its corresponding isomorphic fragmentary structures as the dimension of the fragmentary structure. *Dimension* N of a fragmentary structure is defined as $N = \min_F |\cup_{i=1}^m E_i|$, where $E_i, i = \overline{1, m}$, are fragments of fragmentary structure of the class F . *Labelling* of the connected digraph is the bijection between the vertices of the graph and subsets of the set (labels). At this bijection the source corresponds to an empty set, and the vertices are joined by arcs if and only if their labels are in fragmentary relation, and cardinality of the arc's head label is lower than the cardinality of the arc's tail label. *Feasible labelling* satisfies the condition that if the vertex labels are in fragmentary relation, then such vertices are joined by an arc in the direction of increasing the label's cardinality. The *labeling cardinality* M is the count of natural numbers used for its construction. *Minimal labeling* is the labeling with the minimal

cardinality. The cardinality of the minimal feasible labeling is equal to the feasible graph dimension, $M = N$.

Proposition 1. If a feasible graph G has only one sink, then its feasible labeling is minimal and has a dimension equal to the highest layer number.

Proof. Since there only one sink, all vertices of the graph G belong to the root to sink path, meaning that the labels of all vertices are subsets of the sink label. Therefore, $\cup_{i=1}^m E_i = E_s$, where $E_i, i = \overline{0, m}$ are labels of all vertices of a graph that are fragments of some fragmentary structure. The vertex set's cardinality is equal to the length of the path from the root; in other words, the number of the layers of that vertex. Hence, $|E_s|$ will be the same for all isomorphic fragmentary structures of class F_G corresponding to this graph G : $N = \min_{F_G} |E_s| = |E_s|$.

Consider methods for constructing a feasible labeling of a feasible graph from the root in the increasing layer number direction. The algorithm α (greedy) is defined as a sequence of actions; first the root has the label "empty set". Second, the label of any other vertex is constructed as follows: if the indegree of that vertex is more than one, then the label is the union of label sets of already labeled adjacent vertices. If not, the label is created by adding to the label an already labeled adjacent vertex, of an integer, which is a smallest number in the natural series and is feasible. *Feasible number* refers to a natural number, which after adding to the vertex set gives a feasible labeling.

Generally, the algorithm α , when applied to a permissible graph using traversal methods breadth-first search (BFS) and depth-first search (DFS), generates different feasible graph labelings. Trees are always feasible graphs. From Proposition 1, it follows that constructing a feasible labeling for a tree is more complex problem than building a labeling for other feasible graphs. Further, for simplification, we will use the trees.

Feasible labelings constructed for a feasible graph G using BFS and DFS are shown in Fig. 1. The horizontal dotted lines indicate the layers of the graph, numbered 0 to 3 and bottom to top. M_i, N_i are labeling cardinality and dimension of the subgraph from 0th to i th

layer inclusive. M , N is the labeling cardinality and dimension of graph G . The estimates of dimension $\tilde{N}_1 = 4$ and $\tilde{N}_2 = 4$ [3] or, in other words, $N \geq 4$ are obtained. In Fig. 1 it can be seen that, when using the BFS for subgraphs of the first and second layers of the feasible graph $M_1 = N_1$, $M_2 = N_2$, $M = N + 1$, were obtained. On the third layer the algorithm α with BFS adds two elements, so $M = 6$. When DFS is used $M_1 = N_1$, $M_2 = N_2 + 1$, and $M = N = 5$.

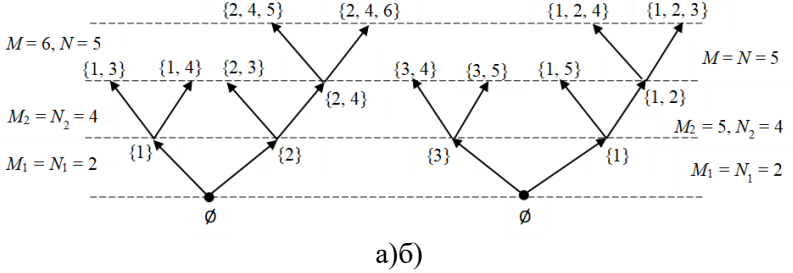


Fig. 1. Feasible labelings of graph G obtained by algorithm α with:
(a) BFS; (b) DFS (minimal labeling obtained).

The labeling cardinality depends not only on the method of the graph traversal, but also on the order of vertices' traversal. Fig. 2 shows two feasible labelings of the feasible graph G' with the traversal on the layer done from left to right ($M = 6$) and from right to left ($M = 7$), which was obtained using algorithm α with BFS.

Let's construct a modified algorithm α'' with a rule: for constructing labels of vertices of the same layer, whose initial subgraphs have the largest dimension estimates, choose the next smallest feasible number from the set of already used numbers, such that the labels of these vertices would have the lowest number of common elements. Using this rule with BFS does not guarantee the construction of a minimal feasible labeling (Fig. 1a).

When using DFS, if one of the paths containing a vertex, satisfying the condition \tilde{N}_1 (the sum of the layer number and the indegree is maximum), is chosen as the first pass then on the return path after passing this vertex the number of used elements will be not less than \tilde{N}_1 (Fig. 3).

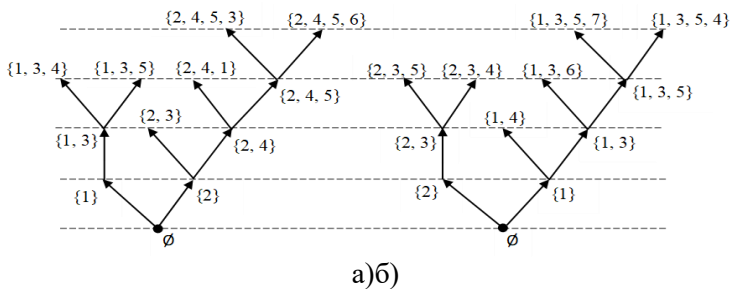


Fig. 2. Feasible labelings of graph G' obtained by algorithm α with BFS: (a) – from left to right, $M=6$; (b) – from right to left, $M=7$.

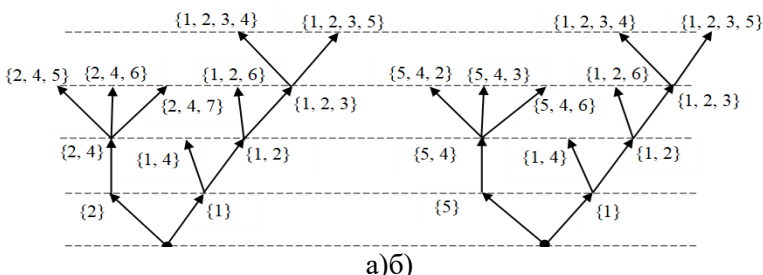


Fig. 3. Feasible labelings of graph G'' obtained with using DFS by: (a) – algorithm α , $M=7$; (b) – algorithm α'' , $M=6$.

References

1. I. V. Kozin, N. K. Maksyshko, V. A. Perepelitsa Fragmentary Structures in Discrete Optimization Problems, Cybernetics and Systems Analysis, 2017, 53(6), pp 931–936.
2. Berge, C. (2001). The theory of graphs. Courier Corporation.
3. Кривцун О. В., Козін І.В. Розмітки орієнтованих графів для представлення фрагментарних структур. Матеріали ХХІ Міжн. наук.-практ. семінару «Комбінаторні конфігурації та їх застосування» (Кропивницький, 17-18 травня 2019 року). С. 87–91.

GRAPHIC REPRESENTATION OF TOROIDAL REFERENCE SYSTEMS FOR VECTOR CODES

Riznyk V.V.

Lviv Polytechnic National University

Abstract. Graphic representation of toroidal reference systems is concerned to both optimum vector data coding design, and combinatorial configurations such as Perfect Cyclic Difference Sets and Ideal Ring Bundles, namely the concept of “GlorytoUkraineStars”(GUS-configurations). The GUS-codes, shortly “Star” codes, can be used for finding optimal solutions for wide classes of technical problems in applications, which need to form finite vector virtual spaces using the smallest possible number of basic vectors. These techniques make it possible to configure “Star” codes under toroidal coordinate system, nodal points set of the system one-to-one corresponds to the code size. Graphic representations both “Star” monolithic and group vector codes, and non-redundant “Star” codes presented. The first of them are self-correcting codes, which offer to be faster than other noise immunity codes, while the second belong to non-redundant “Star” codes. Applications profiting from GUS-configurations are for example signal processing, code security and low-side lobe antenna design.

Surface topology is superior to geometry relating torus as “perfect” shape that useful to describe objects as mathematical model of systems. Proposed concept involves techniques based on cyclic groups of Galois field in projective geometry [1] and ring vector configurations [2]. We have the principal property of forming toroidal reference grid $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_t$ over an object that exists in dimension $t+1$.

Definition 1. A set of n t -stage chain sequences of non-negative integers $K_i=(k_{i1}, k_{i2}, \dots, k_{it})$, $i=1,2,\dots, n$, which form t -dimensional toroidal reference grid $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_t$, taking the mod $m_1, \text{mod } m_2, \dots, \text{mod } m_t$ sums of these sequences is a t -dimensional GUS-configuration.

Example: The set of three ($n=3$) 2-stage sequences $K_1=(0,1)$, $K_2=(0,2)$, $K_3=(1,0)$ forms a two-dimensional ($t=2$) toroidal reference grid $m_1 \times m_2=2 \times 3$ taking the mod 2, mod 3 sums from these 2-stage sequences (Table 1).

Table 1.

2D toroidal reference grid formed by GUS $\{(0,1),(0,2),(1,0)\}$

n/n	References	Summation mod 2, mod 3 of the 2-sequences		
		(0,1)	(0,2)	(1,0)
1	(0,0)	(0,1)	(0,2)	
2	(0,1)	(0,1)		
3	(0,2)		(0,2)	
4	(1,0)			(1,0)
5	(1,1)	(0,1)		(1,0)
6	(1,2)		(0,2)	(1,0)

From Table 1, we observe the GUS $\{(0,1),(0,2),(1,0)\}$ forms 2D toroidal reference grid 2×3 .

Theorem 1. A t -dimensional GUS-configuration with t -dimensional toroidal reference grid $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_t$ forms t -dimensional “Star” codes, which size equal to number of the reference grid points.

Proof. Since for each nodal point of the reference grid corresponds exactly to one of coding combinations of the t -dimensional coding system the set of reference grid and set of coding combinations correspond one-to-one.

Hence, t -dimensional GUS-configuration with t -dimensional toroidal reference grid $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_t$ forms t -dimensional vector “Star” codes, which code size equal to number of reference grid points.

For example, two-dimensional GUS-configuration with 2D toroidal reference grid 2×3 forms binary 2D vector “Star” codes (Table 2).

Since GUS $\{(0,1),(0,2),(1,0)\}$ is multiplicative group of a finite field [1] it is complete set of binary 2D vector “Star” coding systems in four variants: $\{(1,0),(1,1),(1,2)\}$, $\{(0,1),(0,2),(1,0)\}$, $\{(0,1),(0,2),(1,2)\}$, $\{(0,1),(0,2),(1,1)\}$

Graphic representation of multidimensional toroidal reference grid $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_t$ formed by t -dimensional GUS-configuration about concurrent axes m_1, m_2, \dots, m_t with common point “+” given in Fig.1.

Table 2.

Binary 2D vector “Star” code formed by GUS $\{(0,1),(0,2),(1,0)\}$

n/n	2D code combination	Digit weights of the “Star” code		
		(0,1)	(0,2)	(1,0)
1	(0,0)	1	1	0
2	(0,1)	1	0	0
3	(0,2)	0	1	0
4	(1,0)	0	0	1
5	(1,1)	1	0	1
6	(1,2)	0	1	1

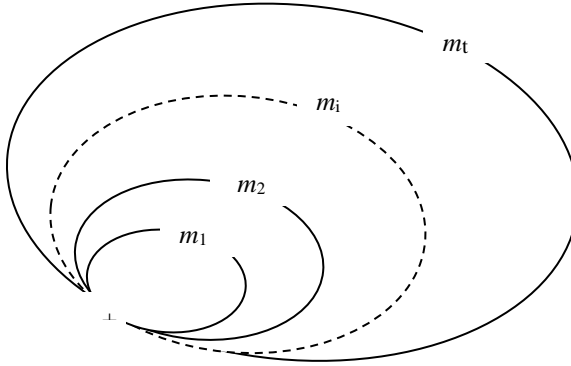


Fig.1. *Graphic representation of multidimensional toroidal reference grid $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_t$ formed by t -dimensional GUS-configuration about concurrent axes m_1, m_2, \dots, m_t with common point “+”*

Fig.1 illustrates planar projections of spatially disjointed axes m_1, m_2, \dots, m_t of t -dimensional toroidal reference grid $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_t$.

The “Star” codes may be separating as monolithic and group vector codes, and non-redundant vector codes. First of them belong to the self-correcting codes due to monolithic arranged both symbols “1” and of course “0” for each allowed code word. This characteristic property offers at once detect or correct code words by the monolithic

manner. The second “Star” codes are non-redundant ones, which provide processing and visualization of high-dimensional datasets.

There are a priori infinite set of “Star” codes under toroidal coordinate systems. The rate of number growth these codes with rising their size we can define tentatively by indexes of 2D and 3D self-correcting “Star” codes for $n=2\dots7$ from Table 3.

Table 3.

Indexes of 2D and 3D self-correcting “Star” codes for $n=2\dots7$

Code length, n	Number of code variants		Code size variants	
	2D codes	3D codes	2D codes	3D codes
2	1	-	1×2	-
3	4	-	2×3	-
4	24	-	3×4	-
5	272	-	4×5, 3×7	-
6	256	128	5×6, 3×10	2×3×5
7	360	180	6×7, 3×14	2×3×6

We can see fast growing varieties of “Star” codes under toroidal reference systems with rising their length n and maximum code size N_{\max}

$$N_{\max} = \prod_1^t m_i < 2^n, (m_1, m_2, \dots, m_t)=1 \quad (1)$$

The constraint (1) provides varies of “Star” codes under toroidal reference systems over a wide range, and graphic picture of these systems (Fig.1) offer a better understanding of the role of toroidal shape in the behaviour of natural and man-made objects. Remarkable combinatorial properties and structural perfection of GUS-configurations provide many opportunities to apply them to numerous branches of science and advance technology. Examples: vector computing and big data information technologies, code security communications, and low-side lobe antenna design [2]. The underlying skills is useful at high schools and universities for in-depth training of students, which study computer sciences and

information technologies, involving contemporary combinatorial and algebraic theory for increasing interest to scientific researches.

References

1. Hall M. Jr.: Combinatorial Theory. Blaisell Publishing Company, 470 p. (1967)
2. Riznyk W.: Application of the Golden Numerical Rings for Configure Acoustic Systems of Fine Resolution, Acta Physica Polonica A, vol.119, pp.1046 -1049.(2011).

INTEGRATED COLLABORATIVE DECISION MAKING MODELS IN AIR NAVIGATION SYSTEM

Shmelova T.¹, Sikirda Yu.², Kasatkin M.³

¹*National Aviation University*

²*Flight Academy of the National Aviation University*

³*Kharkiv National University of Air Forces named by I. Kozhedub*

Abstract. A new approach to increase the efficiency of Collaborative Decision Making (CDM) by operators of the Air Navigation System, which includes the process of integrating the deterministic, stochastic and non-stochastic uncertainty models for building network planning models in emergencies, is proposed.

Introduction. The effectiveness of aviation systems and the provision of flight safety still depend primarily upon the reliability of aviation specialists and human decision making (DM), individual and group outcomes of decisions. In aviation, significant attention is paid to Safety Management. To determine an acceptable level of risk and balance between decision performance and safety requirements, it is necessary to have quantitative characteristics of DM conditions in emergencies [1]. ICAO constantly develops and improves proactive, based on the evaluation of the risks. A modern approach, founded on the characteristics (performance-based approach – PBA), based on the next three principles monitoring [2]: the main accent on desired/necessary results; decision making, oriented on

desired/necessary results; using facts and data while DM. Such a level of accuracy of tasks determination may be achieved only using the new methodology includes the process of integrating the stochastic and non-stochastic uncertainty models for building network planning models.

Main part. The Global Air Traffic Management Operational Concept [1] assumes provision Collaborative Decision Making (CDM) between all operational partners based on general information on the flight process and features of the emergency [3]. It is very important to create highly intelligent CDM systems for the Air Navigation System's operators those decision problems in the one team. In the process of analysis and synthesis of DM models in emergencies makes sense to simplify complex models and solutions. So, for example, stochastic and non-stochastic of uncertainty models, the Markov and GERT-models, reflexion models integrate into deterministic models. The ICAO documents recommend developing intelligent Expert Systems in aviation to support of operators [1; 2]. To build an Expert System, it is necessary to determine the significance of its subsystems (parameters, characteristics, values, etc.) with the help of Expert Judgment Method (EJM) [4].

When analyzing an emergency in a team, each operator determines his actions to solve this problem. After a structural-timing table of operational procedures with time on the operating procedures (using EJM for obtaining solution times) has been built, the network graphs of operating procedures for all operators are building [5] (Figure 1).

The parallel process of simultaneous execution of technological operations in the situation can be represented as a consolidated multi-channel network (Figure 2, situation S₂).

For a consistent optimization of such a network in order to achieve the crosscutting efficacy of CDM, it is advisable to use a multi-criteria approach: achieving a minimum time with maximum safety for consolidation of operators' actions in emergency [6]. Approach to optimize the network graph for performing procedures by operators in the emergency is (1):

$$A_{opt} = \min\{R_m\}, R_m = F_m(t_m; \{A, \alpha, p, u\}) = t_m (\sum_{k=1}^n p_k u_k + \alpha_k),$$

(1)

where R_m and $(<; >)R_{m-1}$; t – is a time of CDM stage; A – is an alternative of decision; α – is a shift in the risk of developing emergency according to stages on decision tree; p – is a probability of adverse effects; u – is a damage due to negative solution.

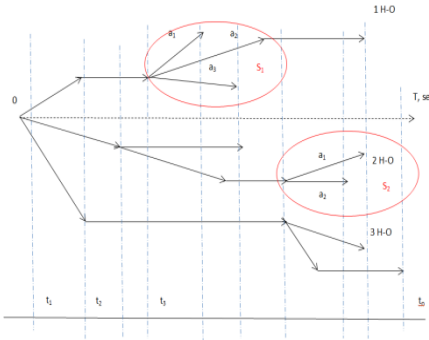


Fig. 1. The DM in certainty for three H-Os

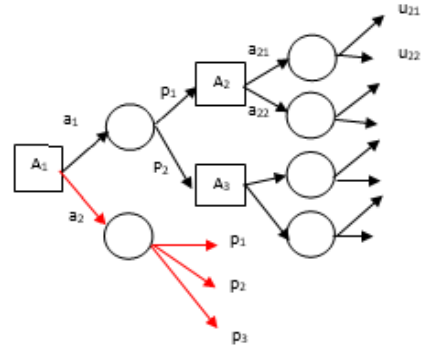


Fig. 2. The DM in risk for situation S_2 (three H-Os)

To simulate CDM under conditions of emergency, the next steps are a deep analysis of the situation; intelligent data processing; identification of situation; formalization of the situation using integrated models; decomposition of the complex situation into subclasses; synthesis of adapted deterministic models to determine certain actions. In conditions of non-stochastic uncertainty in the presence of several decisions (part of situation S_1), when the probability distribution corresponds to the factors which influence the DM, either unknown or cannot be determined, the methodological basis for CDM is a matrix of decisions [4]. The aggregated deterministic model with integrated stochastic models is shown in Figure 3 [5].

After correction network graphs using stochastic and non-stochastic uncertainty models next step the determination of critical time and the critical path of the optimal collective solution [5].

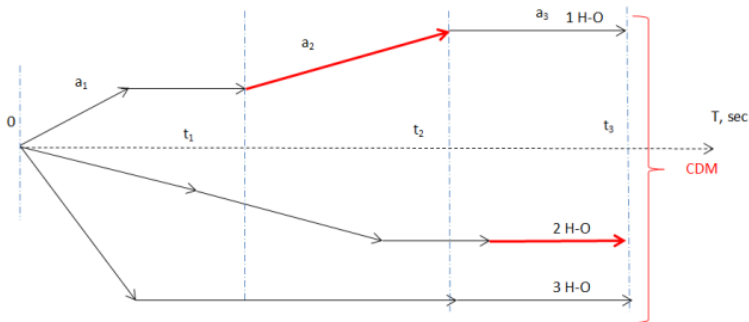


Fig. 3. *The aggregated deterministic model with integrated stochastic model*

Conclusions. The CDM is an uninterrupted process of presenting information and individual DM by various interacting participants, as well as providing synchronization of decisions taken by participants and the exchange of information between them. It is important to ensure the possibility of making a joint, integrated solution with partners at an acceptable level of efficiency. This is achieved by completeness and accuracy of available information. Solutions planning should provide using DM different models such as deterministic models; stochastic and non-stochastic of uncertainty models; the Markov and GERT-models; reflexion models. After analysis of the situation, the synthesis (aggregation) of stochastic models for the correction of the deterministic model is needed.

References

1. International Civil Aviation Organization: Global Air Traffic Management Operational Concept. Doc. ICAO 9854. 1st ed. Author, Montreal, Canada (2005).
2. International Civil Aviation Organization: Manual on Global Performance of the Air Navigation System. Doc. ICAO 9883. 1st ed. Author, Montreal, Canada (2009).
3. International Civil Aviation Organization: Manual on Collaborative Decision-Making (CDM). Doc. 9971. 2nd ed. Author, Montreal, Canada (2014).
4. Shmelova, T., Sikirda, Yu., Rizun, N., Salem, Abdel-Badeeh, Kovalyov, Yu.: Socio-Technical Decision Support in Air Navigation

Systems: Emerging Research and Opportunities. International Publisher of Progressive Information Science and Technology Research, USA, Pennsylvania (2018).

5. Shmelova, T.: Integration Deterministic, Stochastic and Non-Stochastic Uncertainty Models in Conflict Situations. In: Conflict Management in Global Information Networks (CMiGIN 2019). Kyiv, 47-56 (2019).

6. Kasatkin, M., Sikirda, Yu., Shmelova, T.: Network Analysis of Collaborative Decision Making by Air Navigation System's Human-Operators during Emergency Cases in Flight. Proceedings of the National Aviation University 1(78), 22-35 (2019).

МОДЕЛЮВАННЯ ОЦІНКИ ОСОБИ ВИННОГО ДЛЯ СИСТЕМИ НЕЧІТКОЇ ПРОДУКЦІЇ В СУДІ

Бакурова А.В., Пасічник М.С., Терещенко Е.В., Філей Ю.В.
Національний університет «Запорізька політехніка»

Abstract. In this work, propose the user clustering method for a social network based on the multilayer feedforward neural network to identify bot networks on a web-resource

Врахування особи винного є обов'язковим для суду в кожному випадку призначення покарання, що зазначено п.3 ч.1 ст.65 Кримінального кодексу України (КК) [1]. Але у науковій літературі з кримінального права та законодавстві немає загальновизнаного розуміння поняття «особа винного» та визначення цього терміну.

Авторів спіткала ця проблема при розробці на основі онтологічного підходу загальної моделі СППР у суді, що докладно описана в роботах [2, 3]:

$(Fine, Years, RF, Public Works, Condition) = F(Severity, Lawyer, Personality, Plaintiff, Mitigation, Burden), (1)$

де F – відповідний алгоритм нечіткого виведення.

Під час моделювання було виявлено ряд проблем та запропоновано шляхи їх вирішення, що полягають в наступному.

Проблема 1. Існування розбіжності між онтологією термінологічною та онтологією природної мови. Вирішення проблеми передбачає побудову цих онтологій та визначення схожості між ними.

Проблема 2. Нечіткість класифікації характеристик на позитивні чи негативні, що є наслідком суб'єктивності ознак та їх взаємозалежності. Наприклад, ознака «одружений» в залежності від зв'язку з іншими обставинами може мати, як позитивний, так і негативний вплив. Тобто для вирішення проблеми необхідно розглядати не окремі ознаки, а патерни характеристик [4].

Проблема 3. Велика кількість ознак, що веде до зменшення точності обчислень. Традиційним виходом з даної проблеми є розбиття множини ознак на підмножини з їх подальшою реалізацією в окремих правилах продукцій.

Розглянемо більш докладно Проблему 3. Для побудови моделі змінної *Personality* у вигляді орграфу було сформовано колекцію документів з 25 судових вироків за ч.3ст.185 КК України [1]. Вироки було отримано з Єдиного реєстру згідно правил користування цим електронним ресурсом [5].

На основі аналізу документів було виокремлено категорії термінів, слів, що відповідають термам концепту онтології «особа винного». Відповідну модель представлено у вигляді орграфу на Рис.1.

Тоді множина ознак для концепту *Personality* має вигляд:

$$P_{Personality}^1 = \{\text{працевлаштування, сімейний стан, проживання, реєстрація, характеристика, перебування на обліку, наявність зв'язків, кримінальна відповідальність, судимість}\}, |P|=9.$$

Область визначення X змінної є декартовим добутокм ознак $X = P_1 \times P_2 \times \dots \times P_9$, потужність якої $|X|=1728$.

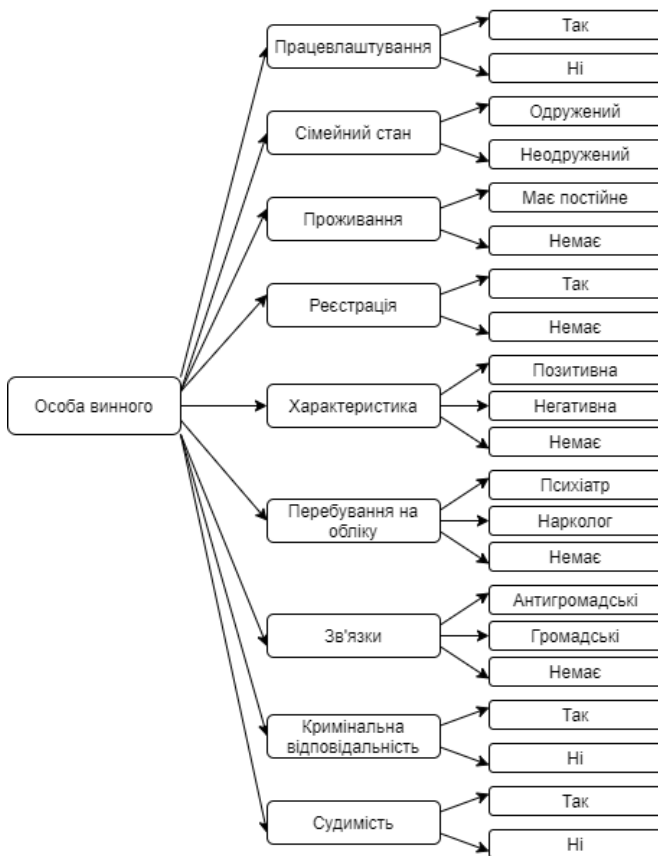


Рис. 1. Модель концепту онтології *Personality*

Врахування особи винного пов'язане із встановленням таких даних, які свідчать про її невелику суспільну небезпечність [4], тобто на основі суб'єктивної оцінки особи винного необхідно прийняти рішення про прийняття до уваги як пом'якшуючої обставини його позитивної характеристики.

Отже одним з підходів до визначення особи винного є аналогія за формулою (1) – модель підсистеми СППР для визначення оцінки особи винного:

(Позитивна, Негативна) = F(працевлаштування, сімейний стан, проживання, реєстрація, характеристика, перебування

на обліку, наявність зв'язків, кримінальна відповідальність, судимість),(2)

Висновки. На основі онтологічного підходу при побудові продукційної системи для підтримки прийняття судових рішень запропоновано метод формалізованого визначення особи винного. На меті подальших досліджень – вирішення Проблеми 1 та Проблеми2.

Література

1. Kriminalnyi kodeks Ukrainy. (In Ukrainian) <http://zakon.rada.gov.ua/>. Last access 02/28/20.
2. Bakurova, A. and Tereschenko, E. and Filei, Y. and Pasichnyk, M. and Ropalo, H.: Modeling of decision making ontology. Proceedings of the 3rd international conference on computational linguistics and intelligent systems (colins-2019). Vol.1: Main Conference. <http://ceur-ws.org/Vol-2362/paper18.pdf>
3. Bakurova, A., Pasichnyk, M. and Tereschenko, E. Fuzzy Modeling of Verbal Information for Production Systems. Innovative Technologies and Scientific Solutions for Industries. 2019, №4(10), P.5-13 DOI: <https://doi.org/10.30837/2522-9818.2019.10.005>.
4. Мячин А.Л. Анализ паттернов: порядково-инвариантная паттерн-кластеризация, УБС, 2016, выпуск 61, С. 41–59.
5. Court decisions register of Ukraine <http://www.reyestr.court.gov.ua> Last access 02/28/20
6. Маньковський Л. К. Особа винного як складова підстави призначення неповнолітнім покарання, нижче від найнижчої межі, або переходу до іншого, більш м'якого виду покарання Публічне право №2(14) 2014, С.81-87.

ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ У ЗВО

Бондар О. П.

Льотна академія Національного авіаційного університету

Abstract. On the example of the methodology of studying elements of combinatorics in a higher school, some ways of forming competencies among future specialists are indicated that contribute to the relationship of theoretical training of specialists with the practical needs of their professional activities.

В умовах сучасної світової інтенсифікації економічних і соціальних процесів виникає потреба в людях, здатних до об'єктивної оцінки і відповідної швидкої реакції на різноманітні ситуації, що виникають у сфері їх професійної діяльності. Підготовка таких спеціалістів до швидкої адаптації в професійній сфері має відбуватися насамперед у закладах вищої освіти (ЗВО). І оскільки компетентності, необхідні для успішної професійної діяльності молодого спеціаліста, формуються в процесі його навчання у ЗВО, то виток проблем адаптації спеціаліста до професійної діяльності слід шукати насамперед там.

Недостатній рівень наукової підготовки майбутнього спеціаліста та слабкий зв'язок (або відсутність) його теоретичної підготовки у ЗВО з практичними потребами професійної діяльності є однією з таких проблем.

Успішна з точки зору практики теоретична підготовка майбутнього спеціаліста, на наш погляд, обов'язково має включати відповідну наукову складову і бути направлена на:

- набуття навичок швидкої формалізації реальної виробничої ситуації,
- встановлення відповідності формалізованого образу ситуації його теоретичній моделі,
- знання законів функціонування моделі і уміння їх застосовувати до розв'язання виробничих задач,
- уміння робити висновки та інтерпретувати отримані результати з точки зору виробничої ситуації.

Ці напрями підготовки потрібно реалізовувати у ЗВО з самого початку навчального процесу. При цьому важливою формою реалізації є поєднання навчальної і наукової роботи

студентів, яке на початку навчання може спиратися на поглиблення і розширення тематики шкільного курсу.

Для прикладу розглянемо особливості вивчення майбутніми спеціалістами таких понять теорії ймовірностей, як елементи комбінаторики. В умовах обмеженого навчальним планом часу на засвоєння цих понять зазвичай виникають певні проблеми.

По-перше, існує проблема розпізнавання в професійній сфері спеціаліста задач на класичне означення ймовірності, в яких потрібно застосовувати елементи комбінаторики. Іншими словами, студент іноді не бачить застосувань цих понять у своїй професії і, відтак, не вирізняє комбінаторну задачу серед інших професійних задач за умови відсутності підказки, наприклад, у вигляді теми заняття.

Розв'язання цієї проблеми, на наш погляд, повинно ґрунтуватися на умінні і навичках розпізнавати такі задачі, в першу чергу, викладачем або науковим керівником, який повинен підвищувати свій професійний рівень також і в цьому напрямку. Зауважимо, що викладач математики не зобов'язаний розв'язувати професійні задачі, але має вирізняти серед них задачі певної математичної тематики.

Засвоєння елементів комбінаторики може починатися з розгляду так званої задачі-схеми, умову якої взято з класичних джерел інформації, і яка, як правило, не пов'язана безпосередньо з майбутньою спеціальністю студента. Після цього бажано, щоб викладач сформулював одну чи кілька задач професійного спрямування, демонструючи в них структуру задачі-схеми. Це буде слугувати підґрунтям для формулювання кожним студентом власної оригінальної задачі професійного спрямування на задачу-схему. Колективне обговорення кожної із задач з корегуванням їх відповідності задачі-схемі повинно допомогти розширити уявлення студентів про коло професійних задач, в яких використовуються елементи комбінаторики.

По-друге, визначивши комбінаторну задачу, студенти часто стикаються з проблемою вибору необхідного елементу комбінаторики. А саме, який з елементів комбінаторики – сполучення, розміщення чи перестановки треба застосувати при

розв'язанні конкретної задачі, брати їх з повтореннями чи без повторень? Складність вибору полягає в умінні виділити в задачі формалізовану модель реального об'єкту.

Одним із шляхів подолання цієї проблеми, на наш погляд, може бути наступний алгоритм вибору:

- оскільки в комбінаторній задачі зазвичай мова йде про кількість варіантів тих чи інших об'єктів чи процесів, то спочатку потрібно обрати один конкретний варіант (наприклад, варіант комп'ютерного коду);

- поміняти місцями елементи обраного варіанту і визначити, чи відрізнятиметься з точки зору задачі цей варіант від попереднього;

- визначити кількість елементів, з яких може складатися варіант;

- визначити, чи можуть елементи у варіанті повторюватись;

- зробити висновок, тобто обрати необхідний елемент комбінаторики.

Багаторазове застосування такого алгоритму прискорює процес формалізації, практично автоматизуючи його. Підрахунок кількості обраних елементів комбінаторики і, відповідно, обчислення ймовірності за класичним її означенням зазвичай не викликають труднощів.

По-третє, існує проблема вибору алгоритму перебору. А саме, знання тільки кількості елементів комбінаторики є іноді недостатнім для застосування їх на практиці. Наприклад, щоб відкрити замок з трицифровим кодом, в якому кнопки з цифрами натискаються одночасно, мало знати, що існує 120 варіантів коду. Потрібно вміти їх перебрати, тобто діяти за певним (нескладним у даному прикладі) алгоритмом.

Знання алгоритмів перебору і уміння підібрати необхідний для задачі алгоритм можуть набуватися студентом, крім навчальних занять, під час проведення наукових досліджень, в роботі науково-практичних семінарів, на конференціях, тощо. Алгоритми перебору застосовуються, крім теорії ймовірностей, також і в інших дисциплінах – математичному програмуванні,

дослідженні операцій, теорії графів, тощо, тому вони є корисним інструментом розв'язання широкого кола практичних задач.

Нарешті, існує обернена проблема – переходу від формалізованої моделі до реального об'єкту, тобто до конкретної задачі професійного спрямування. Це означає, що майбутній спеціаліст, розв'язавши задачу, не завжди має навички осмислення отриманої відповіді, тобто її зв'язку з умовою професійної задачі. Для подолання проблеми, крім вже розглянутих методів, є сенс застосування колективного обговорення можливих творчих висновків, що торкатимуться в певній мірі середовища, яке охоплює умова задачі.

Підсумовуючи приклад методики освоєння майбутніми спеціалістами поняття елементів комбінаторики, можна визначити деякі шляхи набуття ними високого рівня наукової підготовки та тісного зв'язку їх теоретичної підготовки у ЗВО з практичними потребами професійної діяльності.

Цими шляхами є застосування відповідних методик проведення аудиторних і самостійних занять, організація і проведення міжнародних науково-практичних конференцій і семінарів студентів, стажування, тощо. В процесі проведення таких заходів майбутні спеціалісти мають можливість ознайомитись з актуальними науковими і, зокрема, професійними темами і проблемами, методами їх розв'язку, оцінити схожість і різницю підходів до вирішення проблем представниками інших професій, набутти досвід спілкування з ними у своїй професійній діяльності.

Відтак, визначення і впровадження в процес навчання у закладі вищої освіти шляхів набуття майбутніми спеціалістами компетентностей, що сприяють зв'язку теоретичної підготовки з практичними потребами професійної діяльності, повинно стати суттєвим для підвищення конкурентоспроможності спеціалістів на вітчизняному та міжнародному ринках праці.

ОПЫТ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МАШИННОГО ПЕРЕВОДА ПРИ ПРОИЗВОДСТВЕ РЕФЕРАТИВНОГО ЖУРНАЛА «МАТЕМАТИКА»

Воблый В.А., Архипова Н.А.

Москва, ВИНТИ РАН

Abstract. The authors analyze the work experience of editors and reviewers of the abstract journal "Mathematics" of VINITI RAS with documents in English using the Google translator built into the workstation "Corrector, Editor, Reviewer" (COREF). It is noted that problems arise when there are special terms, abbreviations and proper names in the source text. It is concluded that the use of the Google translator, despite its shortcomings and the need for post-editing, increases the productivity of users of COREF.

Машинный перевод – это перевод текстов с одного естественного языка на другой с помощью компьютерных программ. Существуют различные типы машинного перевода: 1) машинный перевод, основанный на правилах; 2) статистический машинный перевод; 3) гибридный машинный перевод, сочетающий правила, статистику и нейронные сети. В настоящее время машинный перевод в той или иной форме применяют в своей работе уже более 50% переводческих фирм. Несмотря на развитие систем машинного перевода, результат их работы почти всегда нуждается в доработке человеком. Этот процесс называется постредактированием машинного перевода. [1,2]. Существует два уровня качества постредактирования. Первый уровень качества, «приемлемое» качество, соответствует переводу, точно передающему смысл оригинала, но не всегда являющимся грамматически и стилистически правильным. Второй уровень качества – перевод отвечает требованиям к публикации и приближен к профессиональному человеческому переводу.

В ВИНТИ РАН функционирует автоматизированное рабочее место «Корректор, Редактор, Референт» (КОРЕФ), которое обеспечивает внесение изменений в описания документов непосредственно в Единой техно-логической базе данных (ЕТБД) при выполнении операций тематической разметки, реферирования, научного редактирования,

индексирования, корректуры при производстве реферативного журнала «Математика» [3]. КОРЕФ предоставляет возможности для выполнения различных действий по содержательной обработке документов, загруженных в ЕТБД. Эти инструменты предназначены для редакторов отделов научной информации, корректоров, а также референтов. Пользователям КОРЕФ предлагает функции содержательной обработки документов для тематических выпусков реферативного журнала. Кроме того, предусмотрено выполнение некоторых дополнительных операций над текстами, которые позволяют: преобразовать прописные буквы в строчные; строчные буквы в прописные; преобразовать русскую раскладку в латинскую; латинскую раскладку в русскую; проверить орфографию. Для проверки орфографии необходимо, чтобы на компьютере пользователя был установлен пакет Microsoft Office, словарь которого используется для определения ошибок.

При работе с документами на иностранном языке есть возможность с помощью встроенного переводчика Google осуществлять перевод заголовка документа и аннотации. Результаты перевода размещаются в новых полях базы данных КОРЕФ, в которых при необходимости можно осуществлять постредактирование текста. Опыт работы с этим переводчиком в отделе фундаментальной и прикладной математики ВИНТИ РАН показывает, что в большинстве случаев качество перевода является «приемлемым». Переводчик Google правильно осуществляет перевод некоторых устойчивых выражений. Однако он допускает ошибки при переводе падежей, речевых оборотов, логико-смысловых акцентов в предложении и построении самих предложений. Это объясняется различной интерпретацией падежей на примере русского и английского языков: в русском – через окончание, в английском – через предлоги. При наличии в исходном тексте на иностранном языке специальных терминов их перевод не всегда осуществляется правильно. В качестве примера можно привести перевод термина «graph», который переводчик Google обычно переводит как «график», а не «граф». К сожалению, переводчик Google, в

отличие от переводчика PROMPT, не допускает настройки на предметную область.

Еще одной проблемой является выпадение из перевода слов, несущих смысловую нагрузку. Если в исходном тексте есть аббревиатуры, то они в большинстве случаев не переводятся, а передаются как набор букв. Однако если аббревиатура совпадает с каким-то словом, то переводится это слово. Отдельной проблемой является перевод имен собственных. Они не всегда переводятся правильно, но необходимо отметить заметное совершенствование переводчика за последнее время. В заключение можно сделать вывод, что использование машинного перевода, встроенного в КОРЕФ, при всех его недостатках и необходимости постредактирования, повышает производительность работы сотрудников ВИНТИ РАН и референтов при производстве реферативного журнала «Математика».

Литература

1. Худяков Н.А. Постредактирование машинного перевода: теоретические аспекты. Филологический аспект №1(45), 2019, с. 232-239.

2. Борисова И.А. К опыту постредактирования на материале англо-русского перевода автоматических систем Google Translate и PROMPT. Вестник МГЛУ. Вып. 13 (699), 2014.

3. Архипова Н.А., Воблый В.А. Современная техно-логия безбумажной информатики при производстве реферативного журнала «Математика». Матер. XXI Международ. семинара «Комбинаторные конфигурации и их приложения», Кропивницкий, 2019, с. 17-20.

ОДНА ЗАДАЧА ПРО ПАРКЕТ НА ТОРІ

Глухов О.Д.

Національний авіаційний університет

Abstract. The article considers the problem of tessellation on the torus.

Математичний паркет або замощення (tessellation, tiling) це покриття площини або частини площини, тора, тощо, плитками -многокутниками без пробілів і перекриттів, в якому будь-які два многокутники мають або спільну сторону, або тільки спільну вершину, або зовсім не мають спільних точок.

Нехай n, m, k -натуральні числа, ми будемо позначати $R(n, m)$ і $T(n, m)$ прямокутник зі сторонами довжини n і m і склеєний з нього тор відповідно.

В даній роботі розглядається наступна задача: чи можливо замощення тора $T(n, m)$ плитками $R(1, k)$?

Будемо вважати, що кожна плитка є прямокутником, сторони якого паралельні одній із сторін даного прямокутника. Таке замощення будемо називати $(1, k)$ -паркетом.

Зауважимо, що на питання існування $(1, k)$ -паркета на прямокутнику $R(n, m)$ дає відповідь наступна теорема.

Теорема 1. [1]. $(1, k)$ -паркет на $R(n, m)$ існує тоді і тільки тоді, коли хоча б одне з чисел n, m кратне k .

Але, як показав Голомб (S. Golomb) [2], для тора аналогічне твердження уже не вірне - існує приклад $(1, 6)$ -паркета на торі $T(10, 15)$ (Рис.1).

Однак, має місце наступна теорема.

Теорема 2. $(1, 4)$ -паркет на торі $T(n, m)$ існує тоді і тільки тоді, коли хоча б одне з чисел n, m кратне 4.

Доведення. Достатність очевидна. Припустимо, що жодне з чисел n, m не кратне 4. Випадки, коли одне з чисел непарне тривіальні, оскільки в такому разі $n \times m$ не буде кратне 4.

Залишилось розглянути випадок, коли n і m дають залишок 2 по модулю 4: $n = 4s + 2, m = 4t + 2$.

Оскільки плиток всього буде $(n \times m)/4 = (2s + 1) \times (2t + 1)$, тобто непарне число, то можна вважати, що вертикальних плиток буде непарне число.

1	1	1	14	15	16	17	18	19	20	21	22	1	1	1
2	2	2	14	15	16	17	18	19	20	21	22	2	2	2
3	3	3	3	3	3	17	18	19	20	21	22	23	24	25
4	4	4	4	4	4	17	18	19	20	21	22	23	24	25
11	12	13	5	5	5	5	5	5	20	21	22	23	24	25
11	12	13	6	6	6	6	6	6	20	21	22	23	24	25
11	12	13	14	15	16	7	7	7	7	7	7	23	24	25
11	12	13	14	15	16	8	8	8	8	8	8	23	24	25
11	12	13	14	15	16	17	18	19	9	9	9	9	9	9
11	12	13	14	16	16	17	18	19	10	10	10	10	10	10

Рис. 1. Приклад $(1,6)$ -паркета на торі $T(10,15)$

Розфарбуємо квадрат, з якого склеєний тор, почергово на чорні та білі стовбці. Очевидно, що загальне число чорних та білих клітинок буде однаковим. Ясно також, що кожна вертикальна плитка буде цілком чорною або цілком білою, а кожна горизонтальна плитка міститиме по 2 чорних і 2 білих клітинки.

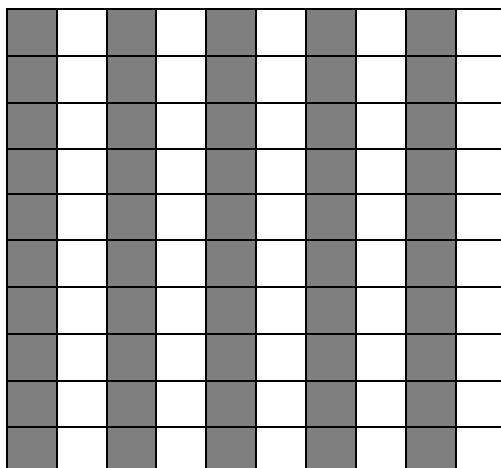


Рис. 2. Розфарбування тора $T(10,10)$

Таким чином, в кожній строчці квадрата (кільці на торі) буде однакове число чорних і білих клітинок у вертикальних плитках. А відтак загальне число чорних та білих клітинок в вертикальних плитках також має бути однаковим. Але це неможливо, з огляду на те, що число вертикальних плиток непарне.

На рис. 2 показано розфарбування тора $T(10,10)$.

Нескладно також довести наступне узагальнення теореми 2.

Теорема 3. Якщо p просте, то $(1, p^2)$ -паркет на торі $T(n, m)$ існує тоді і тільки тоді, коли хоча б одне з чисел n, m кратне p^2 .

Література

1. N.G. de Bruijn, Filling Boxes with Bricks, The American Mathematical Monthly, vol.76, 1969, pp. 37-40.
2. S. Wagon, The American Mathematical Monthly, vol. 94, 1987, pp. 601-617.

ФОРМАЛІЗАЦІЯ ПРОЦЕСУ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ДЛЯ КЕРУВАННЯ ПРОЦЕСОМ АВТОНОМНОГО ЕНЕРГОПОСТАЧАННЯ

Голик О.П., Ісмаїл Мухаммед, Рубцов В.С.

Центральноукраїнський національний технічний університет

Abstract. The decision making to process control automation by energy supply from autonomous energy sources is due to the presence uncertainties in the parameters of the input variables of the control system. Energy supply system with solar panels and wind turbine was considered in the article. The present report identifies the practices that have been put in place to making optimal decisions. For decision making to process control automation by energy supply from autonomous energy sources have been proposed to used the methods of decision tree.

Прийняття рішень при керуванні автономним енергопостачанням (АЕП) зумовлено наявністю

невизначеностей у автоматизованій системі керування (АСК) АЕП на основі комбінованих вітро-сонячних установок.

В даній АСК АЕП мають місце такі невизначеності:

- невизначеності природних явищ, таких як погодні умови (сонячна та вітрова енергії істотно залежать від погодних умов);

- невизначеності, пов'язані з недостатніми знаннями про надходження сонячної та вітрової енергій (невідома точна кількість енергії, що надходить від них в той чи інший момент часу);

- невизначеності, пов'язані з недостатньою кількістю досвіду та знання факторів, що впливають на ПР.

Загалом перераховані вище невизначеності можуть носити наступний характер.

Стохастична невизначеність виникає, коли невідомі фактори статистично стійкі і тому представляють собою звичайні об'єкти теорії імовірності – випадкові величини [1, 2, 3].

Невизначеність не стохастичного виду, при якій ніяких припущень про стохастичну стійкість не існує [1].

Рішення приймають в умовах невизначеності, коли неможливо оцінити імовірність потенційних результатів [1, 4]. Це має місце тоді, коли фактори, що потребують врахування настільки нові та складні, що неможливо отримати достатню кількість інформації, яка може об'єктивно визначити імовірність, або наявна ситуація не підлягає відомим закономірностям. Тому імовірність деяких наслідків неможливо передбачити з достатньою ступеню достовірності.

Дерева рішень зазвичай використовують при ПР в умовах ризику. Його будують за типом алгоритму роботи системи. Визначаються етапи прийняття рішень, імовірності при прийнятті даного рішення та імовірнісні наслідки реалізації певного рішення.

На рис. 1 наведено частину дерева рішень щодо керування АСК АЕП в умовах ризику.

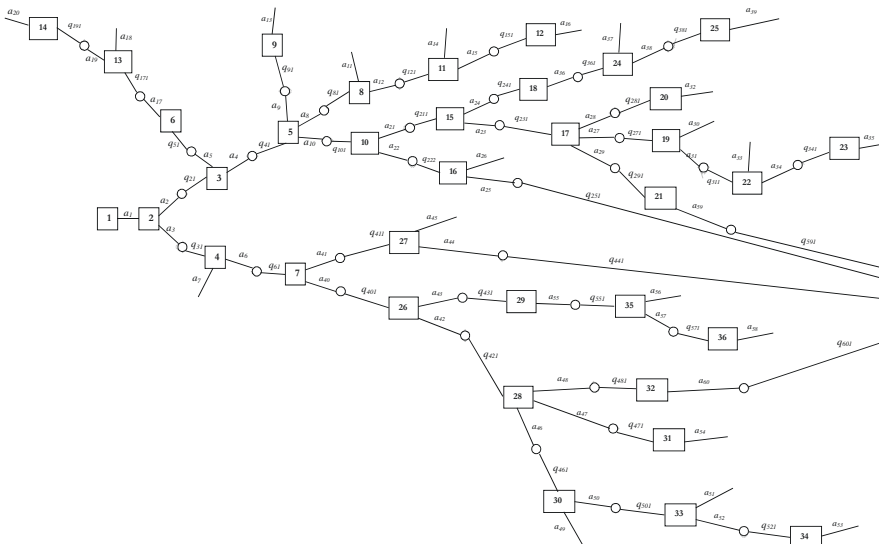


Рис.1. Структурне зображення процесу енергозабезпечення в задачі вибору оптимального керування АСК

Згідно даної структури маємо такі рішення:

- 1 – прийняття рішення щодо типу джерела енергії
- 2 – прийняття рішення щодо стану БЕУ
- 3, 4, 15, 16, 26, 27, 38, 39, 43, 44 – прийняття рішення щодо потреб споживача в електроенергії
- 5, 17, 28 – прийняття рішення щодо кількості виробленої енергії
- 6, 18, 29 – прийняття рішення щодо передачі енергії до АКБ
- 7, 10 – прийняття рішення щодо використання іншого джерела енергії – сонячна енергія
- 8, 9, 19, 20, 30, 31, 41, 45 – прийняття рішення щодо перерозподілу отриманої енергії
- 11, 13, 22, 24, 33, 35, 37 – прийняття рішення щодо стану АКБ
- 12, 14, 23, 25, 34, 36 – прийняття рішення щодо заряду АКБ
- 21, 32 – прийняття рішення щодо використання іншого джерела енергії – АКБ

40 – прийняття рішення щодо різниці між потрібною енергією та кількістю енергії в АКБ

42 – прийняття рішення щодо використання іншого джерела енергії – ДВЗ

46 – прийняття рішення щодо сигналізації про стан ДВЗ.

На дереві рішень маємо наступні альтернативні варіанти:

a_1 – використання вітрової енергії

a_2 – енергія від БЕУ надходить

a_3 – енергія від БЕУ не надходить

a_4 , a_6 , a_{23} , a_{25} , a_{42} , a_{44} , a_{59} , a_{60} , a_{63} , a_{65} , a_{72} , a_{74} – потреби в енергії на даний момент існують

a_5 , a_7 , a_{24} , a_{26} , a_{43} , a_{45} , a_{64} , a_{66} , a_{73} , a_{75} - потреби в енергії на даний момент немає

a_8 – кількість виробленої БЕУ енергії більша ніж потрібна споживачу

a_9 - кількість виробленої БЕУ енергії дорівнює потребам споживача

a_{10} – кількість виробленої БЕУ енергії менша ніж потреби споживача

a_{11} , a_{13} , a_{30} , a_{32} , a_{49} , a_{54} , a_{69} , a_{76} – передача енергії до споживача

a_{12} , a_{17} , a_{31} , a_{36} , a_{50} , a_{55} – передача енергії до АКБ

a_{14} , a_{18} , a_{33} , a_{37} , a_{51} , a_{56} , a_{61} – АКБ заряджена

a_{15} , a_{19} , a_{34} , a_{38} , a_{52} , a_{57} , a_{62} – АКБ розряджена

a_{16} , a_{20} , a_{35} , a_{39} , a_{53} , a_{58} – заряджання АКБ

a_{21} , a_{40} – енергія від СБ надходить

a_{22} , a_{41} – енергія від СБ не надходить

a_{27} , a_{46} – кількість виробленої СБ енергії більше ніж потрібно споживачу

a_{28} , a_{47} – кількість виробленої СБ енергії дорівнює потребам споживача

a_{29} , a_{48} – кількість виробленої СБ енергії менша ніж потреби споживача

a_{67} - кількість енергії в АКБ більше ніж потрібно споживачу

a_{68} – енергії в АКБ не вистачає для задоволення потреб споживачів

a_{70} – у баках ДВЗ паливо є

a_{71} – палива у баках ДВЗ немає

a_{77} – подача сигналу споживачеві про відсутність палива



– імовірнісні наслідки реалізації певного рішення.

Література

1. Герасимов Б. М., Тарасов В. А., Токарев И. В. Человеческо-машинные системы принятия решений с элементами искусственного интеллекта. – К.: Наукова думка, 1993. – 184 с.
2. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. – М.: “Наука”. Главная редакция физико – математической литературы, 1981. – 208 с.
3. Ланге О. Оптимальные решения. Основы программирования. – М.: «Прогресс», 1967. – 289 с.
4. Герасимов Б.М., Грабовский Г.Г., Рюмшин Н.А. Нечеткие множества в задачах проектирования, управления и обработки информации. – К.: Техніка, 2002. – 140 с.

ТРИКУТНІ НОРМИ ТА КОНОРМИ З ПОРОГОМ ТА ЇХНІ ВЛАСТИВОСТІ

Гуляницький Л. Ф., Рясна І.І.

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України

Abstract. New fuzzy logical operators – threshold triangular norms and conorms, are proposed and their properties are investigated. To solve fuzzy clusterization problems, the properties of threshold triangular conorms are used, which is provided the transparency of interpretation of the results of investigations of such problems.

Трикутною нормою називається функція $T:[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$, яка задовольняє умовам монотонності, асоціативності та комутативності, а також $T(0,0)=0$, $T(1,v)=v$, $v \in [0,1]$. Трикутною конормою називається функція $S:[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$, яка задовольняє умовам монотонності, асоціативності та комутативності, а також $S(1,1)=1$, $S(0,v)=v$.

Для двоїстих трикутних норм і конорм має місце рівність:

$$T(u, v) + S(1 - u, 1 - v) = 1.$$

Означення 1. Пороговою трикутною нормою або трикутною нормою з порогом α , $\alpha \in (0, 1]$, назвемо функцію

$$T^{(\alpha)}(u, v) = \begin{cases} T(u, v), & \text{якщо } T(u, v) \geq \alpha, \\ 0, & \text{якщо } T(u, v) < \alpha, \end{cases}$$

де $T(u, v)$ – трикутна норма.

Теорема 1. Функція $T^{(\alpha)}(\cdot, \cdot)$ задовольняє умовам монотонності, асоціативності та комутативності, при цьому $T^{(\alpha)}(0, 0) = 0$ і, якщо $v \geq \alpha$, то інакше $T^{(\alpha)}(1, v) = 0$.

Аналогічно, якщо $\alpha_1 > \alpha_2$, то $T^{(\alpha_1)}(u, v) \leq T^{(\alpha_2)}(u, v)$.

Означення 2. Пороговою трикутною конормою або трикутною конормою з порогом δ , $\delta \in [0, 1)$, назвемо функцію

$$S^{(\delta)}(u, v) = \begin{cases} S(u, v), & \text{якщо } S(u, v) \leq \delta, \\ 1, & \text{якщо } S(u, v) > \delta, \end{cases}$$

де $S(u, v)$ – трикутна конорма.

За аналогією із доведенням теореми 1 можна показати, що функція $S^{(\delta)}$ задовольняє умовам монотонності, асоціативності та комутативності, причому $S^{(\delta)}(1, 1) = 1$ і, якщо $v \leq \delta$, то $S^{(\delta)}(0, v) = v$, інакше $S^{(\delta)}(0, v) = 1$.

Вочевидь, що $S(u, v) \leq S^{(\delta)}(u, v)$; до того ж, якщо $\delta_1 > \delta_2$, то $S^{(\delta_1)}(u, v) \leq S^{(\delta_2)}(u, v)$.

Теорема 2. Якщо $T(\cdot, \cdot)$ і $S(\cdot, \cdot)$ – двоїсті трикутні норма та конорма відповідно, і $\delta = 1 - \alpha$, то порогові трикутні норма і конорма також двоїсті: $T^{(\alpha)}(u, v) + S^{(\delta)}(1 - u, 1 - v) = 1$.

Запропоновані порогові конорми та їхні властивості закладено в основу методу розв'язування задач нечіткого кластерного аналізу, в якому не використовується операція транзитивного замикання [1]. Це дозволило створювати менш

трудомісткі алгоритми кластеризації у порівнянні з відомими методами, що засновані на нечіткому відношенні еквівалентності.

Перспективним напрямом подальших досліджень є розробка подібних алгоритмів для розв'язування інших задач комбінаторної оптимізації у нечіткій постановці [2].

Література

1. Hulianytskyi L. F., Riasna I. I. Automatic classification method based on a fuzzy similarity relation. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. 52, N 1. P. 30–37.

2. Hulianytskyi L. F., Riasna I. I. Formalization and classification of combinatorial optimization problems. *Optimization Methods and Applications* (eds. Butenko S., Pardalos P. M., Shylo V.). Cham: Springer International Publishing AG, 2017. P. 239–250.

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О МАТЕМАТИЧЕСКОМ СЕЙФЕ НА ГРАФАХ

Донец Г.А., Гурин А.Л.

Институт кибернетики НАН Украины

METHOD OF SUMMARIZED REPRESENTATIONS TO SOLVE THE MATHEMATICAL SAFE PROBLEM ON A GRAPH

Некоторые графы допускают решение задачи о математическом сейфе некоторым своеобразным методом, который назовем параметрический. Суть его состоит в обозначении переменных, соответствующих некоторым вершинам графа определенными параметрами, через которые выражаются все остальные неизвестные задачи. Путем

сравнения выбранных специальным образом неизвестных определяются указанные параметры, а затем и все неизвестные, т.е. решение задачи. В данной работе дается теоретическое обоснование этого метода.

Сначала рассмотрим предлагаемый метод для простейших графов таких как цепь и веер, для которых, оказывается, достаточно использовать один параметр.

Рассмотрим сейф на графе в виде цепи (рис. 1).

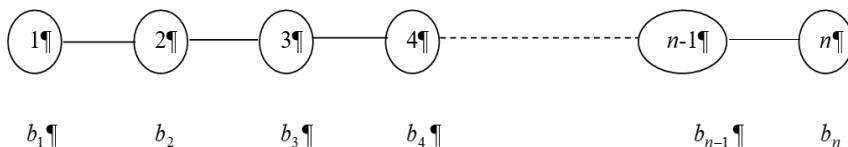


Рис. 1. Сейф на графе в виде цепи

Запишем общую систему [1] для этого графа при $n = 7$.

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \equiv -b_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \equiv -b_2 \\ x_2 + x_3 + x_4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \equiv -b_3 \\ x_3 + x_4 + x_5 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \equiv -b_4 \\ x_4 + x_5 + x_6 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \equiv -b_5 \\ x_5 + x_6 + x_7 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \equiv -b_6 \\ x_6 + x_7 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \equiv -b_7 \end{array} \right\} \pmod{K}. \quad (1)$$

Обозначим $x_1 = \alpha$. Тогда $x_2 = -b_1 - \alpha$. Подставляя получаемые значения последовательно в уравнения системы, находим: $x_3 = b_1 - b_2$, $x_4 = b_2 - b_3 + \alpha$, $x_5 = -b_1 + b_3 - b_4 - \alpha$, $x_6 = b_1 - b_2 + b_4 - b_5$, $x_7 = b_2 - b_3 + b_5 - b_6 + \alpha$. Если переменную x_7 определить из последнего уравнения, то получим, что $x_7 = -b_1 + b_2 - b_4 + b_5 - b_7$. Сравнивая оба значения x_7 , получим значение параметра $\alpha = -b_1 + b_3 - b_4 + b_6 - b_7$, а затем – решение всей системы: $x_1 = -b_1 + b_3 - b_4 + b_6 - b_7$, $x_2 = -b_3 + b_4 - b_6 + b_7$,

$$x_3 = b_1 - b_2, \quad x_4 = -b_1 + b_2 - b_4 + b_6 - b_7, \quad x_5 = -b_6 + b_7, \\ x_6 = b_1 - b_2 + b_4 - b_5, \quad x_7 = -b_1 + b_2 - b_4 + b_5 - b_7.$$

Рассмотрим пример для $\mathbf{b} = (3, 2, 1, 4, 3, 2, 4)$, $K = 5$. Тогда решение имеет вид $X = (2, 0, 1, 3, 2, 2, 4) \pmod{5}$.

Проверим это решение.

$$\mathbf{b} = (3, 2, 1, 4, 3, 2, 4), \quad x_1 = 2 \rightarrow (0, 4, 1, 4, 3, 2, 4), \quad x_3 = 1 \\ \rightarrow (0, 0, 2, 0, 3, 2, 4), \quad x_4 = 3 \rightarrow (0, 0, 0, 3, 1, 2, 4), \quad x_5 = 2 \rightarrow (0, 0, 0, 0, 3, 4, 4), \\ x_6 = 2 \rightarrow (0, 0, 0, 0, 0, 1, 1), \quad x_7 = 4 \rightarrow (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \pmod{5}.$$

Это решение получено для $n \equiv 1 \pmod{3}$. Аналогично по такой же схеме решается задача и для $n \equiv 0 \pmod{3}$.

Для $n \equiv 2 \pmod{3}$ при сравнении x_n параметр α исчезает и получаем соотношение

$$\sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} b_{3i+1} - \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} b_{3i+2} = 0 \pmod{K}. \quad (2)$$

Это является необходимым и достаточным условием решения задачи, а параметр α может принимать любое значение.

Рассмотрим сейф на графе типа лесенки для $\mathbf{b} = (1, 2, 3, 4, 4, 3, 2, 1)$.

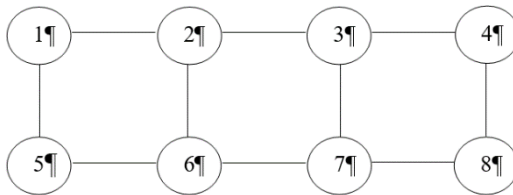


Рис. 2. Сейф на графе типа лесенки

Запишем общую систему [1] для этого графа при $n = 8$.

$$\left. \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + \cdot & x_5 & \cdot \cdot \equiv -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + \cdot & \cdot & x_6 \cdot \equiv -2 \\ \cdot & x_2 + x_3 + \cdot & x_4 + \cdot \cdot x_7 \equiv -3 \\ & x_3 + x_4 + \cdot & \cdot x_8 \equiv -4 \\ x_1 + \cdot & \cdot & \cdot x_5 + x_6 \cdot \cdot \equiv -4 \\ \cdot & x_2 + \cdot & \cdot x_5 + x_6 + x_7 \cdot \equiv -3 \\ & x_3 + \cdot & \cdot x_6 + x_7 + x_8 \equiv -2 \\ & x_4 + \cdot & \cdot x_7 + x_8 \equiv -1 \end{array} \right\} (\text{mod } K). \quad (3)$$

Как известно, задача о математическом сейфе формулируется с помощью графов и матриц, а ее решение сводится к решению систем линейных уравнений в конечных полях [2] или конечных кольцах [3]. Вершины графов будем изображать в виде кружочков, внутри которых указан номер вершины. Для каждого математического сейфа существует начальное состояние, которое задается вектором $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$, где $0 \leq b_i \leq k_i - 1$. k_i называется числом состояний i -го замка. Рассмотрим случай, когда все $k_i = K$. Такой сейф называется сейфом с однотипными замками. Задача состоит в том, чтобы, исходя из начального состояния сейфа найти такой вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, чтобы после осуществления x_i поворотов в соответствующих замках сейф перешел в состояние $\mathbf{b}_{fin} = (b_i = 0)_n$. Предлагаемый метод будем рассматривать на неориентированных графах, представляющих сейфы с однотипными замками. В общем случае решение задачи сводится к решению системы

$$A\mathbf{x} + \mathbf{b} \equiv 0 (\text{mod } K), \quad (4)$$

где A – матрица инцидентий графа.

Суть метода состоит во введении специального параметра, который называется суммой неизвестных $S = \sum_{i=1}^n x_i$. Некоторые графы позволяют представлять переменные системы через этот параметр. Суммируя затем эти переменные, получаем уравнение

относительно него. Решив его, получим значение этого параметра, а вместе с тем и значения всех переменных.

Основная проблема состоит в нахождении этого параметра. Для его нахождения в системе (1) умножим i -е уравнение на такой множитель $d_i, i = 1, 2, \dots, n$, чтобы сумма всех уравнений дала в левой части вектор $(dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$, где d – какая-то константа. Отсюда получаем равенство $dS = -\sum_{i=1}^n d_i b_i$, откуда легко находим S . Но для этого необходимо найти d_i и d . В силу последнего построения они удовлетворяют системе уравнений

$$AD \equiv \bar{d} \pmod{K}, \quad (5)$$

где $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$, а $\bar{d} = (d, d, \dots, d)$. Для различных графов система (5) решается по-разному. При этом используются специфические свойства графов, такие как симметрия, связность и т.п. Учет специфики структуры графов облегчает нахождение этих параметров.

Метод суммарных представлений является универсальным для решения задач о математических сейфах на неориентированных графах. Исключением является случай, когда d кратное K . В этом случае для существования решения необходимо произвести корректировку начального состояния сейфа таким образом, чтобы $-\sum_{i=1}^n d_i b_i$ была кратной K . Тогда задача решается по общим правилам метода.

Литература

1. Донец Г.А., Гурин А.Л. Загороднюк С.П. Методы решения задач о математическом сейфе на элементарных / Проблемы управления и информатики. 2019. № 4. С.
2. Kryvyi S.L. Algorithms for solution of systems of linear diophantine equations in residue fields Cybernetics and Systems Analysis. 2007. v. 43(2). P.171–178.

3. Kryvyi S.L. Solutin algoritms for systems of linear equations over residue rings Cybernetics and Systems Analysis. 2016. v. 52(5). P.149–160.

ВИБІР ВЕЙВЛЕТ-БАЗИСУ ДЛЯ МОНІТОРИНГУ МЕРЕЖЕВОГО ТРАФІКУ

Дубровін В. І., Петрик Б. В., Неласа Г. В.

Національний університет “Запорізька Політехніка”

Abstract. network security data analysis is very important for detecting network attacks and malicious anomalies. Many methods of data mining have been found. Searching quickly and accurately for content-based queries is essential for such multiple data streams to be useful and secure. This work investigates the definition of wavelet basis and the application of wavelet analysis to network traffic to detect anomalous events. The structure of wavelet data analysis for network traffic and the definition of wavelet basis for signal analysis are proposed. The technique of noise elimination using wavelet analysis and selection of algorithm for obtaining anomalous Internet traffic events are considered.

Keywords: wavelet basis, wavelet analysis, de-noise suppression, network traffic, Haar wavelet, Mallat algorithm.

Вступ. Визначення вейвлет-базису для аналізу сигналів є важливим етапом в застосуванні вейвлет-аналізу для конкретного завдання і для вирішення цього завдання в роботі запропоновано метод визначення оптимального вейвлет-базису. Залежність виходить багато в чому від того, який вейвлет-базис і рівень вейвлет-розкладання буде обраний. Тобто від цього вибору залежатиме результат роботи апарату вейвлет-аналізу.

Тобто потрібен вейвлет-базис, кожна функція якого характеризує як певну просторову частоту, так і місце її локалізації в фізичному просторі (в часі) для підвищення характеристики ефективного аналізу мережевого трафіку.

Презентація матеріалу. Метою експерименту є отримання об'єктивних відомостей про ефективності існуючих методів вейвлет-аналізу для виявлення мережових атак[1,2]. Для збору трафіку використовувався персональний комп'ютер під

управлінням операційної системи Windows 10 з встановленим на ньому аналізатором протоколів(сніфер), схема якого зображена на (рис. 1).

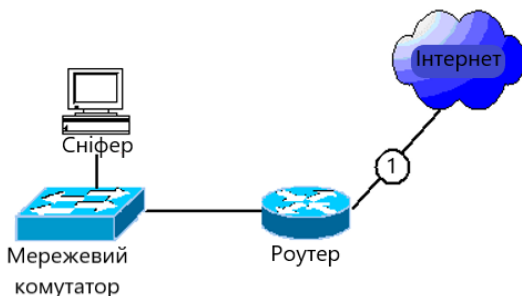


Рис.1. Логічна схема організації експерименту по зняттю трафіку

На рис. 2 представлений графік реалізації трафіку зображеного в Matlab, який являє собою агрегований за рівнем 0,05 сек ряд, відповідний загальному трафіку протоколу TCP.



Рис.2. Мережевий трафік Weth04.dat

Як об'єкт тестування було обрано тестовий веб-сервер на базі операційної системи FreeBSD. У схемі(рис. 1) сніфер підключений до мережі таким чином, щоб фіксувати трафік, що проходить через точку 1. Всі зафіксовані пакети записувалися в файл формату tcpdump.

Вибір вейвлет–функції. Існує багато типів вейвлетів, які спеціально створені для того, щоб мати особливі властивості, які роблять їх корисними для обробки сигналів.

Вейвлет Хаара має компактний носій і забезпечує реконструкцію сигналу і функції [3]. Кожна функція строго локалізована в фізичному просторі (в часі), але характеризується повільно спадає спектром частот. Тобто просторові (часові) і частотні характеристики не можуть бути одночасно виміряні з будь-якою високою точністю.

Точність вимірювання просторових характеристик Δx та частотних характеристик $\Delta \omega$ обмежена відношенням Гейзенберга(1).

$$\Delta x \Delta \omega \geq \frac{1}{2} \quad (1)$$

Очищення шуму з отриманого сигналу. Шумозниження є важливим процесом усунення шумів з корисного сигналу з метою підвищення його суб'єктивного якості або для зменшення рівня помилок у каналах передачі і системах зберігання цифрових даних.

З використанням вейвлетів є метод обмеження рівня деталізуючих коефіцієнтів. Задавши певний поріг для їх рівня і «відсікаючи» коефіцієнти нижче цього порога, можна значно знизити рівень шуму і стиснути сигнал. Це рівносильно завданням оптимального шляху по дереву вейвлет – перетворення.

При вирішенні завдання шумозаглушення необхідно: оцінити спектральний склад шумової компоненти, вибрати тип порогової обробки (трешолдінга) і критерій розрахунку порога[4].

Далі представлений оригінальний сигнал(рис.3-а) і сигнал очищений від шуму (рис.3-б) .

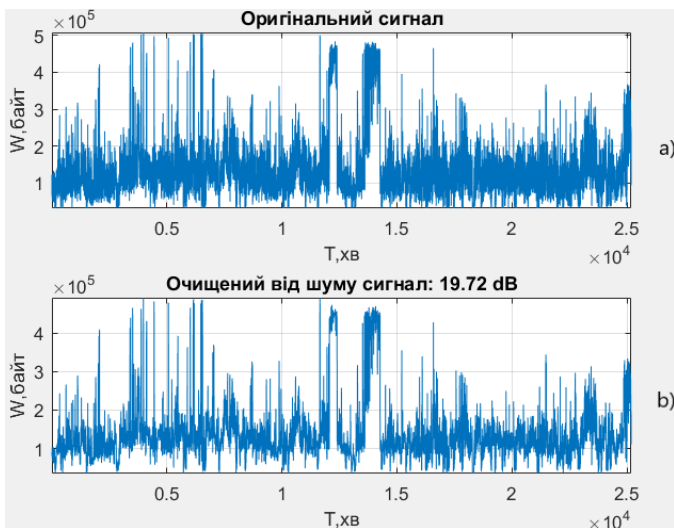


Рис.3. Зображення оригінального сигнал (a) і очищеного від шуму сигналу (b)

Швидкий вейвлет–аналіз на основі алгоритму Малла.

Сутність операцій алгоритму Малла полягає в поданні сигналу у вигляді сукупності послідовних наближень апроксимуючої і деталізуючої складових до яких приміняється набір фільтрів – низькочастотний і високочастотний. Спочатку сигнал пропускається через низькочастотний фільтр, в результаті чого виходять коефіцієнти апроксимації, які характеризують глобальний тренд досліджуваного ряду. Вихідна послідовність також пропускається через високочастотний фільтр, при цьому на виході виходять коефіцієнти деталізації, що характеризують локальні особливості ряду даних. Для збільшення частотного дозволу можливе проведення повторного розкладання для коефіцієнтів апроксимації попереднього рівня.

Находження аномалії за допомогою пакетного аналізу вейвлету. При розгляді пакетного аналізу вейвлету за алгоритмом Малла [5] на кожному кроці відбувається «розщеплення» сигналу на високочастотні і низькочастотні складові та «відсікання» високочастотної складової.

Причина такого підходу полягає в неявному припущенні, що низькочастотна область містить більше інформації про

вихідний сигнал. В результаті виходить «однобоке» дерево (рис. 4). Гілкам дерева відповідатиме набір підпросторів сигналу з базисами, згідно кратномасштабного аналізу. Функції та фільтри, які породжують ці базиси, називаються вейвлет-пакетами і пакетними фільтрами. Пакетні вейвлети надають ширшу частину діапазону частот, ніж дискретне вейвлет-перетворення.

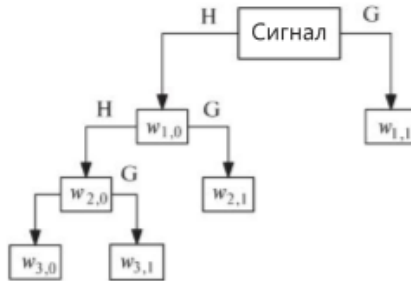


Рис.4. Логічне уявлення алгоритму Малла

З безлічі можливих базисів вейвлет-аналізу на всіх рівнях деталізації експериментально з урахуванням часових обмежень вибираються ті, на яких аномальний стан трафіку проявляється найбільш чітко.

Критерій, за яким проводиться виявлення аномалій, являє собою відношення дисперсій і середнього значення коефіцієнтів з алгоритму швидкого вейвлет-аналізу. Адаптація вибору рівня розкладання полягає в перевищенні порогу і виноситься рішення про наявність аномалії. Якщо ж на цьому рівні відбувається перевищення нижнього порога, значить, в цьому місці можливо має місце бути аномалія і тоді проводиться вейвлет-декомпозиція до наступного рівня, на якому знову проводиться аналіз. Так відбувається до того моменту, поки значення відносин або не перевищить поріг, що буде говорити про аномалії.

На (рис. 5) зображені графіки вихідного реального трафіку weth04.dat (справа вгорі), оптимальне дерево розкладання (зліва вгорі) і відновлена випадкова складова трафіку по одному(6.1) вузлу (зліва внизу).

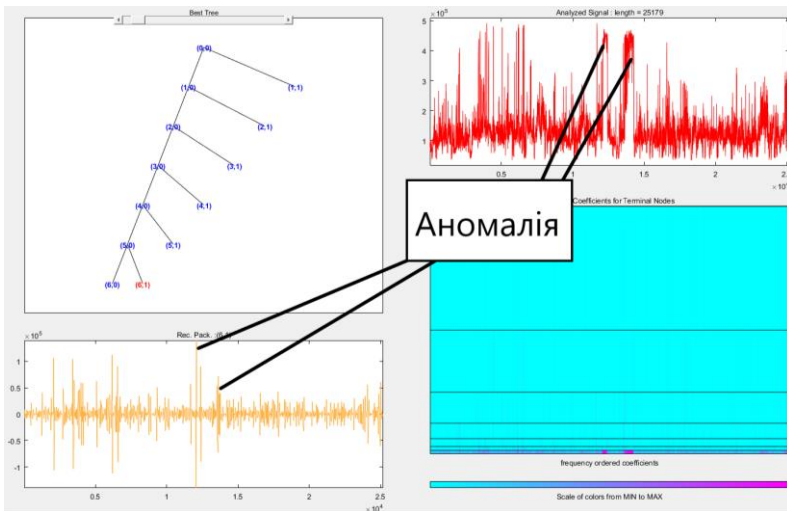


Рис.5. Результати одновимірного пакетного аналізу вейвлету по базисним функція Хаара і відновлення по високочастотним вузлів кращого дерева розкладання: (6,1)

Тобто на відновленій випадковій складовій трафіку піки загострення значень збігаються по часовій осі з аномаліями на вихідному трафіку, тобто аномалії добре локалізуються за допомогою зворотного вейвлет-пакетного перетворення при використанні вибірових вузлів оптимального дерева розкладання.

Для проведення експерименту було використано меню ToolBox Wavelet - wavemenu з обраною опцією меню – одновимірний пакетний аналіз вейвлету. Аномалія в даному випадку є результатом атаки SYN-Flood.

Висновки. Розглядаючи особливості цієї роботи можна зробити наступні висновки:

- запропоновано використання повного ортонормованого вейвлет-базису, застосовуючи вейвлет-функції Хаара для підвищення характеристики роботи алгоритму вейвлет-аналізу та правильного виявлення аномалії трафіку;

- з допомогою вейвлет-аналізу можливо зменшити шумовий сигнал і зберегти корисні сигнали потоків даних безпеки мережі для ефективного вилучення аномальних подій;
- алгоритм Малла дає можливість аналізу частотно-часового подання сигналу по низькочастотних і високочастотних компонентів, що забезпечує можливість локалізації аномалій сигналу різних видів;
- запропонована методика виявлення аномалій і мережесих атак на основі інтеграції вейвлет-пакетної моделі мережевого трафіку в інтерактивному середовищі розробки Matlab з пакетом розширення Wavelet Toolbox.

Література

1. Тишина, Н.А. Обнаружение вторжений на основе вейвлет-анализа сетевого трафика / Н.А. Тишина, Н.А. Соловьев, И.Г. Дворовой // Вестник УГАТУ / научно-практический журнал. – Уфа, 2010. – Т. 14. №5(40). С. 188–194.
2. SUN Donghong, SHU Zhibiao, LIU Wu, REN Ping, WU Jian-ping, Analysis of Network Security Data Using Wavelet Transforms// Journal of Algorithms & Computational Technology, Vol. 8 No. 1, pp. 59–79, Received: 13/01/2013; Accepted: 19/06/2013.
3. J. Tverdohleb Wavelet technologies of non-stationary signals analysis / J. Tverdohleb, V. Dubrovin, M. Zakharova // 1-th IEEE International Conference on Data Stream Mining & Processing. – Ukraine, Lviv: LPNU, 2016. – P. 75–79.
4. Kishore Y., Sreenivasulu T. Signal Adaptive Orthogonal Wavelet Decomposition and Hampel filtering for Impulse Denoising of Speech // International Journal of Advanced Research in Electrical, Electronics and Instrumentation Engineering. – 2015. – Vol. 4. – P. 8368–8372.
5. Шелухин О.И., Сакалема Д.Ж., Филинова А.С. Обнаружение вторжений в компьютерные сети (сетевые аномалии). – М.: Горячая линия—Телеком, 2013. — С. 156–161.

ДВАЖДЫ НЕЛИНЕЙНАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА, НАГРЕВАЕМОГО ЗОНАЛЬНО ПО ТОРЦУ

Зайцев Е. П.

Летняя академия Национального авиационного университета

TWICE NONLINEAR NON-STATIONARY SEMI-INFINITE HEAT CONDUCTIVITY CYLINDER HEATED ZONALLY AT THE END

Abstract. To study the twice nonlinear unsteady heat conduction problem, approximate analytical methods are widely used to obtain a solution in the form of a functional dependence that continuously describes the distribution of temperature fields in a given body in space and time. Such problems are of particular value for engineering practice, since closed solutions make it possible to most fully identify the influence of all acting factors on the temperature field, find the relationships between the most important parameters, conduct a detailed analysis of the kinetics and dynamics of the process, etc. In addition, the analytical form The final solution of the temperature problem is extremely necessary for the subsequent calculation of the thermally stressed state of the body. Therefore, it is important and relevant to create new methods for calculating temperature fields that adequately take into account the properties of real materials and the conditions of their heat exchange with the environment.

Рассмотрим применение метода [1] на решении дважды нелинейной нестационарной задачи теплопроводности полубесконечного цилиндра, нагреваемого по торцу за счет лучисто-конвективного теплообмена. Математическая постановка задачи в безразмерной форме имеет вид:

$$\circ \quad C_v^*(\theta)\theta_{,Fo} = (\lambda^*(\theta)\theta_{,\rho})_{,\rho} + \lambda^*(\theta)\theta_{,\rho}/\rho + (\lambda^*(\theta)\theta_{,\eta})_{,\eta}; \quad \theta_{,\rho}|_{\rho=0} = 0;$$

$$\theta(\rho, \eta, Fo)|_{Fo=0} = 0; \quad \theta, \theta_{,\eta} \rightarrow 0, \quad \eta \rightarrow \infty;$$

$$\{\lambda^*(\theta)\theta_{,\rho} + Bi_1\theta\}|_{\rho=1} = 0;$$

$$\lambda^*(\theta)\theta_{,\eta}|_{\eta=0} = -(Bi_2 + Sk)H(\rho_1 - \rho) + \{Bi_2\theta + Sk\theta^4\}|_{\eta=0} \bullet \quad (1)$$

где \circ и \bullet начало, и конец группы соотношений; $T_c = \text{const}$;

$$\theta = T/T_c;$$

$$\begin{aligned}\lambda(T) &= \lambda_0 \lambda^*(\theta); \quad C_v(T) = C_{v0} C_v^*(\theta); \\ a &= \lambda_0 / C_{v0}; \quad \rho = r/R; \quad \rho_1 = R_1/R; \quad \eta = z/R; \\ Bi_1 &= \alpha_1 R / \lambda_0; \quad Bi_2 = \alpha_2 R / \lambda_0; \quad Fo = at / R^2; \quad Sk = \varepsilon \sigma_0 R T_c^3 / \lambda_0; \\ H(\eta) & - \text{функция Хевисайда.}\end{aligned}$$

Вводя в систему (1) следующие преобразования Гудмэна и Кирхгофа [1] $A(\theta) = \int_0^\theta C_v^*(\theta') d\theta'$, $B(\theta) = \int_0^\theta \lambda^*(\theta') d\theta'$, с помощью дифференциальных соотношений $A(\theta)_{,Fo} = C_v^*(\theta) \theta_{,Fo}$, $B(\theta)_{,\rho} = \lambda^*(\theta) \theta_{,\rho}$, $B(\theta)_{,\eta} = \lambda^*(\theta) \theta_{,\eta}$, преобразуем (1) к эквивалентному виду:

$$\begin{aligned}\circ \quad A(\theta)_{,Fo} &= B(\theta)_{,\rho\rho} + \rho^{-1} B(\theta)_{,\rho} + B(\theta)_{,\eta\eta}; \quad \theta(\rho, Fo)|_{Fo=0} = 0; \\ \theta_{,\rho}|_{\rho=0} &= 0; \quad \theta_{,\eta}|_{\eta=0} = 0; \quad \{B(\theta)_{,\rho} + Bi_1 \theta\}|_{\rho=1} = 0; \\ B(\theta)_{,\eta}|_{\eta=0} &= -(Bi_2 + Sk)H(\rho_1 - \rho) + \{Bi_2 \theta + Sk \theta^4\}|_{\eta=0}. \quad \bullet \quad (2)\end{aligned}$$

Так как задача решается в цилиндрической системе координат, то функции $A(\theta)$, $B(\theta)$ и θ^m ($m=1, 4$), на некотором интервале $(0, \theta_p)$, разложим в виде следующих сходящихся рядов Фурье-Бесселя 1-го рода нулевого порядка

$$\theta = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^{(1)} J_0(\nu_k \theta / \theta_p) = \sum_{k=1}^{\infty} \theta^{(k)}, \quad (3)$$

$$(A(\theta), B(\theta), \theta^4) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k / \alpha_k^{(1)}, b_k / \alpha_k^{(1)}, \alpha_k^{(4)} / \alpha_k^{(1)}) \theta^{(k)}, \quad (4)$$

где $\theta^{(k)} = \alpha_k^{(1)} J_0(\nu_k \theta / \theta_p)$, ν_k – корни уравнения $J_0(\nu) = 0$,

$$(a_k, b_k, \alpha_k^{(4)}) = 2\theta_p^{-2} J_1^{-2}(\nu_k) \int_0^{\theta_p} \theta (A(\theta), B(\theta), \theta^4) J_0(\nu_k \theta / \theta_p) d\theta.$$

(5)

С учетом (3), (4) и разложения экспоненты e^x в ряд Маклорена при $x=1$, систему (2) перепишем в виде:

$$\begin{aligned}\circ \quad (\sum_{k=1}^{\infty} (a_k / \alpha_k^{(1)}) \theta^{(k)})_{,Fo} &= (\sum_{k=1}^{\infty} (b_k / \alpha_k^{(1)}) \theta^{(k)})_{,\rho\rho} + \rho^{-1} (\sum_{k=1}^{\infty} (b_k / \alpha_k^{(1)}) \theta^{(k)})_{,\rho} + \\ &+ (\sum_{k=1}^{\infty} (b_k / \alpha_k^{(1)}) \theta^{(k)})_{,\eta\eta}; \quad \sum_{k=1}^{\infty} \theta^{(k)} \Big|_{Fo=0} = 0; \quad (\sum_{k=1}^{\infty} \theta^{(k)})_{,\rho}|_{\rho=0} = 0; \\ (\sum_{k=1}^{\infty} \theta^{(k)})_{,\eta}|_{\eta=0} &= 0;\end{aligned}$$

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (b_k / \alpha_k^{(1)}) \theta^{(k)} \right\}_{,\rho} + Bi_1 \sum_{k=1}^{\infty} \theta^{(k)} \Big|_{\rho=1} = 0; \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} (b_k / \alpha_k^{(1)}) \theta^{(k)} \right)_{,\eta} \Big|_{\eta=0} =$$

$$= -QH(\rho_1 - \rho) \sum_{k=1}^{\infty} e^{-1/(k-1)!} + (Bi_2 \sum_{k=1}^{\infty} \theta^{(k)} + Sk \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^{(4)} / \alpha_k^{(1)}) \theta^{(k)}) \Big|_{\eta=0}, \bullet (6)$$

Применяя к (6) обобщенный принцип суперпозиции [3], получим совокупность следующих линеаризованных задач нестационарной теплопроводности относительно $\theta^{(k)}$ ($k=1,2,\dots$) :

$$\circ \theta_{,Fo}^{(k)} = \alpha_k (\theta_{,\rho\rho}^{(k)} + \rho^{-1} \theta_{,\rho}^{(k)} + \theta_{,\eta\eta}^{(k)}); \quad \theta^{(k)}(\rho, \eta, Fo) \Big|_{Fo=0} = 0; \quad \theta_{,\rho}^{(k)} \Big|_{\rho=0} = 0;$$

$$(\theta_{,\rho}^{(k)} + Bi_{1k} \theta^{(k)}) \Big|_{\rho=1} = 0; \quad (\theta_{,\eta}^{(k)} - Bi_{2k} \theta^{(k)}) \Big|_{\eta=0} = M_k H(\rho_1 - \rho), \quad \bullet (7)$$

где $\alpha_k = b_k / a_k$, $Q = Bi_2 + Sk$ $M_k = Qe^{-1} \alpha_k^{(1)} b_k^{-1} / (k-1)!$,
 $Bi_{2k} = (Bi_2 \cdot \alpha_k^{(1)} + Sk \cdot \alpha_k^{(4)}) / b_k$; $Bi_{1k} = Bi_1 \alpha_k^{(1)} / b_k$; , $Fo_k = \alpha_k Fo$.

Применяя к системе (7) вначале преобразование Фурье, а затем преобразование Ханкеля [3]

$$\bar{\theta}^{(k)} = \int_0^{\infty} \theta^{(k)}(\rho, \eta, Fo_k) (p \cos p\eta + Bi_{2k} \sin p\eta) d\eta, \quad \tilde{\bar{\theta}}^{(k)} =$$

$$= \int_0^{\infty} \rho \bar{\theta}^{(k)}(\rho, p, Fo_k) J_0(\mu_n \rho) d\rho,$$

получим следующую систему

$$\circ \left(\tilde{\bar{\theta}}^{(k)} \right)_{,Fo} + (p^2 + \mu_k^2) \tilde{\bar{\theta}}^{(k)} = p Bi_{2k} F(\mu_k), \quad \tilde{\bar{\theta}}^{(k)}(\mu_k, p, Fo_k) = 0 \bullet (8)$$

где $F(\mu_k) = \int_0^1 \rho H(\rho_1 - \rho) J_0(\mu_k \rho) d\rho$, μ_k – корни

характеристического уравнения $Bi_{1k} J_0(\mu_k) - \mu_k J_1(\mu_k) = 0$.

Общее решение (8) будет следующим:

$$\tilde{\bar{\theta}}^{(k)}(\mu_k, p, Fo_k) = \frac{p Bi_{2k} F(\mu_k)}{p^2 + \mu_k^2} \left(1 - e^{-(p^2 + \mu_k^2) Fo_k} \right). \quad (9)$$

Перейдем от изображения (9) к оригиналу, используя вначале обратное преобразование Ханкеля

$$\bar{\theta}^{(k)}(\mu_{kn}, p, Fo_k) = M_k p \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} F(\mu_{kn}) J_0(\mu_k \rho) \frac{1}{p^2 + \mu_{kn}^2} - \right.$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} F(\mu_{kn}) J_0(\mu_k \rho) \frac{e^{-(p^2 + \mu_k^2) Fo_k}}{p^2 + \mu_{kn}^2} \Big\}, \quad (10)$$

где $A_{kn} = \frac{2\mu_{kn}^2}{(Bi_{1k}^2 + \mu_{kn}^2)J_0^2(\mu_{kn})}$, а затем, применим к (10) обратное преобразование Фурье, получим

$$\begin{aligned} \theta^{(k)}(\rho, \eta, Fo_k) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \bar{\theta}^{(k)}(\rho, p, Fo_k) \frac{p \cos p\eta + Bi_{2k} \sin p\eta}{p^2 + Bi_{2k}^2} dp = \\ &= \frac{2M_k}{\pi} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} F(\mu_{kn}) J_0(\mu_k \rho) \int_0^{\infty} \frac{p(p \cos p\eta + Bi_{2k} \sin p\eta)}{(p^2 + Bi_{2k}^2)(p^2 + \mu_{kn}^2)} dp - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} F(\mu_{kn}) J_0(\mu_k \rho) \int_0^{\infty} \frac{p(p \cos p\eta + Bi_{2k} \sin p\eta)}{(p^2 + Bi_{2k}^2)(p^2 + \mu_{kn}^2)} e^{-(p^2 + \mu_k^2) Fo_k} dp \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

Суммируя (11) по k , согласно (3), окончательно получим приближенное аналитическое решение поставленной задачи (1)

$\theta = \sum_{k=1}^{\infty} \theta^{(k)}$, в котором θ_p определим из условия, что температура цилиндра при $\rho=0, \eta=0$ и $Fo \rightarrow \infty$ принимает значение θ_p ,

т. е.

$$\theta_p = \sum_{n=1}^{\infty} A_{kn} F(\mu_{kn}) J_0(\mu_k) \int_0^{\infty} \frac{p^2}{(p^2 + Bi_{2k}^2)(p^2 + \mu_{kn}^2)} dp. \quad (12)$$

Однозначно определяя θ_p из уравнения (12), а по нему коэффициенты рядов Фурье-Бесселя (5), M_k , Bi_{1k} , Bi_{2k} и корни μ_{kn} характеристического уравнения, решение будет полностью определено с точностью, зависящей от θ_p .

Частный случай полученного решения, при условии постоянства теплофизических характеристик материала и отсутствии лучистой составляющей в граничном условии на торце цилиндра ($\eta=0$) совпадает с точным решением.

Литература

1. Зайцев Е. П. Суперпозиция уравнений трехмерной нелинейной нестационарной теплопроводности анизотропных термочувствительных тел //Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського.– Кременчук: КрНУ, – 2010. – Вип. 5(64). Част. 1. – С. 44–48.

2. Зайцев Е. П. Влияние термочувствительности и зонального высокотемпературного теплообмена на температурное поле бесконечного цилиндра // Вісник Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського. – Кременчук: КрНУ, 2016. – Вип. 3 (98), част. 1. – С. 33 – 40.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М: Наука, 1972. – 736 с.

БАЗЫ ДАННЫХ И МАТРОИДЫ

Исаченко А.Н.

Белорусский государственный университет

DATABASE SYSTEMS AND MATROIDS

Abstract. Matroids, as an object of study, appear in many branches of mathematics: algebra, graph theory, cryptography, game theory. In the present paper, we introduce matroids of relations of relational algebra, which has an important application value, since it is the basis of the relational data model and relational databases.

Матроиды, как объект исследования, появляются во многих разделах математики: алгебре, теории графов, криптографии, теории игр. В настоящем сообщении в рассмотрение вводятся матроиды отношений реляционной алгебры, которая, как известно [1], имеет важное прикладное значение, поскольку является основой реляционной модели данных и реляционных баз данных.

Существует несколько эквивалентных определений матроида, каждое из которых даётся с использованием определённого понятия, вытекающего из предыдущего [2]. Подобная ситуация рассматривается как крипоморфизм определений [3].

Приведём определение матроида в терминологии его баз.

Матроид это пара $(S, B(S))$, где S - некоторое конечное множество элементов, а $B(S)$ - непустое семейство подмножеств из 2^S , для которого выполняется следующее условие:

б) если $B_1, B_2 \in B(S)$ и $x \in B_1 \setminus B_2$, то существует $y \in B_2 \setminus B_1$ такое, что $(B_1 \setminus x) \cup y \in B(S)$.

Подмножества из $B(S)$ названы базами матроида, а условие б) - аксиомой баз. Через базы матроида можно дать определение его независимых множеств, циклов, плоскостей и других понятий и, в свою очередь, через них эквивалентные определения матроида. Отметим, что для понятий матроида, через которые он может быть определён, введено отношение полиномиальной сводимости, позволяющее установить алгоритмическую эквивалентность определений [4].

Пусть $R=(U)$ - схема отношений на множестве атрибутов $U=\{A_1, \dots, A_n\}$ с доменами D_1, \dots, D_n и ключами K_1, \dots, K_r . Положим, что $\underline{R}(S)$ отношение со схемой R , образованное множеством кортежей $S \subseteq D_1 \times \dots \times D_n$. Напомним, что в отношении не могут присутствовать совпадающие кортежи. Отношение $\underline{R}(S)$ имеет своё множество ключей, не обязательно совпадающее с множеством ключей схемы R . Возьмём подмножество атрибутов $A \subseteq U$. Определим семейство $B(A)$ подмножеств $X \subseteq S$ таких, что A является ключом X , но для любого $x \in S \setminus X$ подмножество A не является ключом $X \cup x$. Другими словами X является максимальным по включению относительно ключа A .

Теорема. Семейство $B(A)$ является семейством баз матроида на множестве S .

Доказательство. Положим, что $B_1, B_2 \in B(A)$. Так как A ключ для B_1 и B_2 , то для любого кортежа $z \in B_2 \cap B_1$ и любого $y \in (B_1 \setminus B_2) \cup (B_2 \setminus B_1)$ получим $\pi_A(z) \neq \pi_A(y)$, где π_A - операция проекции на множество атрибутов A . Из определения семейства $B(A)$ следует, что для любого кортежа $x \in B_1 \setminus B_2$ множество кортежей $B_2 \cup x \notin B(A)$ и поэтому в $B_2 \setminus B_1$ найдётся единственный кортеж y , для которого $\pi_A(x) = \pi_A(y)$. Отсюда, так как $\pi_A(x) \neq \pi_A(z)$ для любого $z \in B_2$, то и $\pi_A(y) \neq \pi_A(z)$ для любого $z \in B_2$. То есть $(B_1 \setminus x) \cup y \in B(A)$. Таким образом, аксиома баз матроида выполняется для семейства $B(S)$. Теорема доказана.

Легко установить следующие свойства матроида $(S, B(A))$.

1. При $A=S$ у матроида $(S, B(S))$ либо $B(S)=\{\emptyset\}$, если S не является ключом отношения $R(S)$, либо $B(S)=\{S\}$, если S ключ $\underline{R}(S)$. Аналогичные свойства имеют место для ключей схемы R и ключей отношения $R(A)$.

2. Если $A=K_i$ для некоторого i , $1 \leq i \leq p$, то у матроида $(S, B(K_i))$ либо $B(K_i)=\{\emptyset\}$, если K_i не является ключом отношения $\underline{R}(S)$, либо $B(K_i)=\{S\}$, если K_i ключ $\underline{R}(S)$.

3. Если $A \supset K_i$ для некоторого i , $1 \leq i \leq p$, то у матроида $(S, B(A))$ семейство $B(A)=\{\emptyset\}$.

Другими словами, в условиях свойств 1,2, матроид $(S, B(A))$ является либо однородным матроидом ранга 0, либо свободным матроидом, а в условиях свойства 3 - однородным матроидом ранга 0.

4. $(S, B(A))$ трансверсальный матроид. Действительно, построим двудольный граф $G=(E, V_1 \cup V_2)$ с вершинами первой доли V_1 , соответствующими кортежам отношения $R(S)$, и вершинами второй доли V_2 , соответствующими кортежам проекции $\pi_A(S)$. Между множествами совершенных паросочетаний графа G и базами матроида $(S, B(A))$ существует взаимно однозначное соответствие. С другой стороны, каждое совершенное паросочетание соответствует системе различных представителей на множестве кортежей отношения $\underline{R}(S)$.

5. Каждый цикл матроида образован двумя параллельными элементами (совпадающими по проекции π_A кортежами).

Прикладное значение матроидов $(S, B(A))$ заключается в возможности оценки сложности процедур поиска в данном отношении подмножества кортежей, удовлетворяющего определённым заданным условиям. Если сложность этих условий не позволяют сформулировать запрос к базе данных, то необходимо создавать процедуру, реализующую алгоритм поиска требуемых кортежей. Алгоритм поиска может конструироваться на основе представления множества искомых кортежей в виде пресечения матроидов $(S, B(A))$ для правильно выбранных подмножеств $A \in 2^S$. В зависимости от минимального количества необходимых подмножеств $A \in 2^S$ получаем оценку сложности алгоритма для построения процедуры поиска.

Литература

1. Исаченко А.Н., Бондаренко С. П. Модели данных и системы управления базами данных. - Минск : БГУ, 2007. – 220 с.
2. Айгнер М. Комбинаторная теория. - М. : Мир, 1982. – 558 с.
3. Rota G. -C. Indiscrete Thoughts. - Boston : Birkhäuser Boston, Inc., MA.1997. - 280 p.
4. Исаченко А.Н. Полиномиальная сводимость матроидных оракулов // Известия АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, №6, 1984. С. 33-36.

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ “ЖАДНОГО” РЕШЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ НЕЗАВИСИМОСТИ

Исаченко А.Н., Ревякин А.М.

Белорусский государственный университет

Национальный исследовательский университет «МИЭТ»

EVALUATING THE ACCURACY OF " GREEDY" SOLUTIONS FOR INDEPENDENCE SYSTEMS

Abstract. We consider the representation of independence systems as the intersection of matroids according to the scheme of B. Korte and D. Hausmann. An estimate is given of the relationship of the “greedy” and exact solution for the problem of maximal clique of a connected graph and the problem of maximal independent set of a connected graph.

Пара (S, F) является системой независимости, если выполняются следующие два свойства:

- 1) $\emptyset \in F$;
- 2) если $A \in F$ и $B \subset A$, то $B \in F$.

Условия 1), 2) называются аксиомами независимости, множества из F – независимыми, множества из $2^S \setminus F$ – зависимыми. Название “система независимости” возникло из

того факта, что во многих разделах математики термин “независимое” соответствует объектам, удовлетворяющим условиям 1), 2), в связи с чем, системы независимости являются обобщением всех этих объектов.

Максимальное по включению множество $B \in F$ является базой, а минимальное по включению множество $C \notin F$ – циклом системы независимости (S, F) .

Для системы независимости (S, F) вводятся понятия h -ранга и l -ранга. А именно, h -ранг определяется как неотрицательная целочисленная функция, заданная на 2^S со значениями

$$\rho_h(A) = \max \{ |X| : X \subseteq A, X \in F \},$$

l -ранг – как неотрицательная целочисленная функция, заданная на 2^S со значениями

$$\rho_l(A) = \min \{ |X| : X \subseteq A, X \in F, X \cup x \notin F, \forall x \in A \setminus X \}.$$

Если в дополнение к условиям 1), 2) выполняется условие

3) если $A, B \in F$ и $|B| = |A| + 1$, то существует $x \in B \setminus A$ такое, что $A \cup x \in F$,

то система независимости (S, F) является матроидом [1].

В частности, система независимости является матроидом тогда и только тогда, когда $\rho_h(A) = \rho_l(A)$ для любого $A \in 2^S$.

Известно [2], что любая система независимости (S, F) может быть представлена как пересечение конечного числа матроидов

(S, F^i) , $1 \leq i \leq k$, то есть $F = \bigcap_{i=1}^k F^i$. Причём k это число циклов

C_1, \dots, C_k системы независимости (S, F) , а каждое F^i определяется циклом C_i следующим образом $F^i = \{ A \subseteq S : C_i \not\subseteq A \}$. Заметим, что такое представление не обязательно является минимальным по числу k . Важность представления системы независимости в виде пересечения матроидов заключается в возможности построения оценки точности “жадного” алгоритма для оптимизационной задачи на системе независимости. А именно, если на множестве S задана положительная весовая функция $w: S \rightarrow R^+$, и для семейства F требуется найти

$$\max_{A \in F} \sum_{e \in A} w(e),$$

то для точного решения A_o и “жадного” решения A_g справедливо неравенство

$$\frac{1}{k} \leq \min_{A \in 2^S} \frac{\rho_l(A)}{\rho_h(A)} \leq \frac{w(A_g)}{w(A_o)} \leq 1.$$

Рассмотрим, например, задачу определения в связном графе $G=(E,V)$ с $|V|=n$ клики с максимальным числом вершин. Очевидно, семейство клик графа образует систему независимости (S,F) , где $S=V$, а F – семейство подмножеств вершин из 2^V , образующих клики. Минимум выражения

$$\min_{A \in 2^S} \frac{\rho_l(A)}{\rho_h(A)}$$

по всем связным графам с n вершинами равен $1/(n-2)$ и достигается на графе, у которого $n-1$ вершина $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ образует полный граф K_{n-1} , а вершина v_n смежна ровно с одной из вершин K_{n-1} , например, v_{n-1} . Циклами полученной системы независимости (S,F) будут $n-2$ пары вершин $\{v_i, v_n\}$, $1 \leq i \leq n-2$. Поэтому получим, что для “жадного” и точного решения на множестве всех связных графов с n вершинами имеет место неравенство

$$\frac{1}{n-2} \leq \frac{w(A_g)}{w(A_o)}.$$

Причём оно достижимо на приведенном выше графе.

Равенство

$$\frac{w(A_g)}{w(A_o)} = 1$$

достигается, например, на полном графе K_n .

По аналогии, с учётом двойственности понятий клики и независимого множества вершин, можно получить такой же результат для задачи определения максимального независимого множества вершин в связном графе. Здесь нижняя оценка

$$\frac{1}{n-1} \leq \frac{w(A_g)}{w(A_o)}$$

достижима на графе с n вершинами, $n-1$ из которых $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ образуют пустой граф O_{n-1} , а вершина v_n смежна с каждой из вершин v_i , $1 \leq i \leq n-1$.

Равенство

$$\frac{w(A_g)}{w(A_o)} = 1$$

достигается, например, на пустом графе O_n .

Литература

1. Айгнер М. Комбинаторная теория. - М. : Мир, 1982. – 558 с.
2. Korte B., Hausmann D. An analysis of the greedy heuristic for independence systems // Annals of Discrete Mathematics, №2, 1978. – p. 65-74.

ПЕРЕРАХУВАННЯ НЕІЗОМОРФНИХ ДВОКОЛЬОРОВИХ ХОРДОВИХ О-ДІАГРАМ РОДУ ДВА З ОДИНМ СІРИМ (АБО ЧОРНИМ) ЦИКЛОМ

Кадубовський О.А.

ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет»

ENUMERATION OF 2-COLOR CHORD O-DIAGRAMS OF THE GENUS TWO THAT HAVE ONE GREY (OR BLACK) FACE UNDER ROTATION

Abstract. In this paper we consider 2-color chord O-diagrams (of order n) with one grey and $(n-4)$ black faces under the action of the rotation group (cyclic of the order n).

We have established explicit formulas for counting the number of non-isomorphic diagrams from the specified class.

In addition, for natural $5 \leq n \leq 20$ we have also listed the exact value of the number of non-isomorphic such diagrams.

Добре відомо, що хордові діаграми ефективно використовують в багатьох галузях науки, зокрема математиці (топології, теорії вузлів), фізиці, біології, генетиці тощо (напр. [2], [5], [6-7]).

Означення 1. Коло з $2n$ точками на ньому (що є вершинами правильного $2n$ – кутника), дуги якого по чергово розфарбовані у два кольори (чорний і сірий) та фіксованою нумерацією вершин за годинниковою стрілкою, будемо називати двокольоровим $2n$ – шаблоном – рис. 1 а).

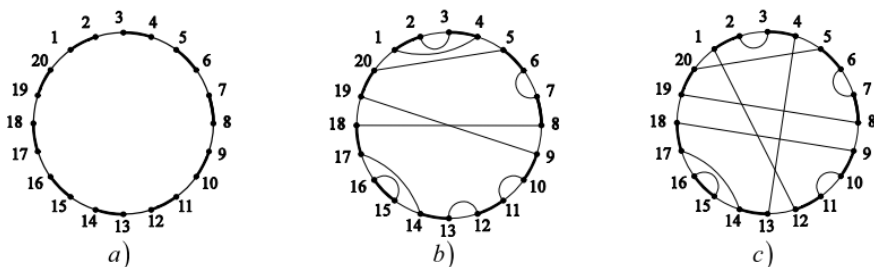


Рис.1. а) двокольоровий 20-шаблон; б) N – діаграма (з 10 хордами), яка має 7 сірих та 3 чорних циклів; в) O – діаграма (з 10 хордами), яка має 6 сірих та 3 чорних циклів.

Означення 2. 2-кольоровою хордовою n – діаграмою будемо називати n – діаграму, побудовану на основі двокольорового $2n$ – шаблону; 2-кольорову діаграму, яка не містить (містить) хорд, що сполучають вершини з номерами однакової парності, називатимемо O – діаграмою (N – діаграмою) – рис. 1 в) (1 б)).

Означення 3. «Чорним» («сірим») циклом 2-кольорової O – діаграми з n хордами будемо називати послідовність хорд та чорних (сірих) дуг, які утворюють гомеоморфний образ (орієнтованого) кола – рис. 1 б), в).

Означення 4. Родом 2-кольорової O – діаграми з n хордами будемо називати ціле число g , яке визначається рівністю $2g = n + 1 - (k + l)$, де k, l – число чорних та (відповідно) сірих циклів діаграми.

Множину O – діаграм з n хордами, які мають точно l сірих (чорних) та k чорних (відповідно сірих) циклів будемо позначати через $\mathfrak{Z}_{k;l}^{n,g}$, де g – рід діаграми.

Означення 5. Хордові діаграми називають ізоморфними, якщо одну можна одержати з іншої в результаті повороту.

У 1997 р. в роботі [1] вперше встановлено рекурентні формули, за допомогою яких є принципово можливим підрахунок числа діаграм з класу $\mathfrak{Z}_{k;l}^{n,g}$. Крім того, для початкових $g = 0; 1; 2; 3$ в [1] встановлено явні формули, які пізніше також були одержані та уточнені й в [4], а в [3] – запропоновано іншу рекурентну формулу.

В загальному випадку задача про підрахунок числа нееквівалентних діаграм з класу $\mathfrak{Z}_{k;l}^{n,g}$ є нерозв’язаною. Зазначена задача була повністю розв’язана для класів $\mathfrak{Z}_{k;l}^{n,0}$ та $\mathfrak{Z}_{1;l}^{n,g}$ лише у 2015 р. в роботах автора [6], [7]. Явні формули відомі також для класів $\mathfrak{Z}_{k;l}^{n,1}$, $\mathfrak{Z}_{k;2}^{n,1}$ та $\mathfrak{Z}_{k;2}^{n,1}$ [8]. В роботі [9] для більш ємного класу $\mathfrak{Z}^{n,1}$ двокольорових хордових O – діаграм роду 1 (без фіксації кількості чорних / сірих циклів) одержано явні формули для підрахунку числа неізоморфних таких діаграм.

Розв’язанню задачі для класу $\mathfrak{Z}_{k;l}^{n,2}$ й присвячено дану статтю.

З урахуванням результатів робіт [1, 4], маємо справедливність

Твердження 1. Для довільного натурального $n \geq 5$

$$|\mathfrak{Z}_{k;l}^{n,2}| = \frac{1}{5!} \cdot (3n^2 - n - 6) \cdot C_{n+1}^2 \cdot C_{n-1}^4 = d(n). \quad (1)$$

Використовуючи лему Бернсайда встановлено твердження

Теорема 1 (основна). Число $d^*(n)$ неізоморфних (нееквівалентних відносно дії циклічної групи порядку n) діаграм з класу $\mathfrak{Z}_{k;l}^{n,2}$ можна обчислити за формулою

$$d^*(n) = \frac{1}{n} \left(d(n) + \sum_{j|n, j \in \{2;3;4;5;6;8\}} \phi(j) \rho\left(n; \frac{n}{j}\right) \right), \quad (2)$$

де $\phi(q)$ – функція Ейлера; $\forall j \in N : \frac{n}{j} \notin N$ величини $\rho\left(n; \frac{n}{j}\right) \equiv 0$, а $\forall j \in N : \frac{n}{j} \in N$ – визначаються за допомогою співвідношень:

$$\rho\left(n; \frac{n}{2}\right) = 5C_{\frac{n}{2}}^4 + 4C_{\frac{n}{2}}^3; \quad \rho\left(n; \frac{n}{3}\right) = 3C_{\frac{n}{3}}^2; \quad \rho\left(n; \frac{n}{4}\right) = C_{\frac{n}{4}}^2; \quad (3)$$

$$\rho\left(n; \frac{n}{5}\right) = \frac{3n}{5}; \quad \rho\left(n; \frac{n}{6}\right) = \frac{n}{6};$$

$$\rho\left(n; \frac{n}{8}\right) = \frac{n}{8}. \quad (4)$$

Твердження 2. При $n \rightarrow \infty$ величини $d^*(n)$ та

$$\delta(n) = \frac{d(n)}{n} = \frac{(3n^2 - n - 6) \cdot C_{n+1}^2 \cdot C_{n-1}^4}{5! \cdot n} \quad (5)$$

є еквівалентними нескінченно великими величинами.

Таблиця 1.

Початкові значення величин $d(n)$, $d^*(n)$ та $[\delta(n)]$

n	$d(n)$	$d^*(n)$	$[\delta(n)]$	n	$d(n)$	$d^*(n)$	$[\delta(n)]$
5	8	4	1	13	183 183	14 091	14 091
6	84	16	14	14	355 355	25 405	25 382
7	469	67	67	15	654 654	43 650	43 643
8	1 869	237	233	16	1 154 062	72 166	72 128
9	5 985	667	665	17	1 958 502	115 206	115 206
10	16 401	1 649	1 640	18	3 215 142	178 678	178 619
11	39 963	3 633	3 633	19	5 126 010	269 790	269 790
12	88 803	7 417	7 400	20	7 963 242	398 242	398 162

Література

1. Адрианов Н. М. Аналог формулы Харера-Цагира для одноклеточных двукрашенных карт. *Функциональный анализ и его приложения*. 1997. Том 31, № 3. С. 1–9.
2. Cori R., Marcus M. Counting non-isomorphic chord diagrams. *Theoretical Computer Science*. 1998. Vol. 204. P. 55–73.
3. Chapuy G. A new combinatorial identity for unicellular maps, via a direct bijective approach. *Advances in Applied Mathematics*. 2011. Vol. 47, No. 4. P. 874–893.
4. Goupil A., Schaeffer G. Factoring n -cycles and counting maps of given genus. *European Journal of Combinatorics*. 1998. Vol. 19, No. 7. P. 819–834.
5. Stoimenov A. Enumeration of chord diagrams and an upper bound for Vassiliev invariants. *Journal of Knot and its Ramifications*. 1998. Vol. 7, No. 1. P. 93–114.
6. Кадубовский А. А. О числе топологически неэквивалентных функций с одной вырожденной критической точкой типа седло на двумерной сфере, II. *Труды международного геометрического центра*. 2015. Том 8, № 1. С. 46–61.
7. Кадубовський О. А. Перерахування топологічно нееквівалентних гладких мінімальних функцій на замкнених поверхнях // Топологія відображень маловимірних многовидів : *Збірник праць Інституту математики НАН України*. 2015. Том 12, № 6. С. 105–145.
8. Кадубовський О. А. Перерахування двокольорових хордових О-діаграм роду 1, які мають три сірих (або чорних) цикли, відносно дії групи діедра. *Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ*. 2019. Вип. 9. С. 25–41.
9. Kadubovs'kyi O. Enumeration of topologically non-equivalent functions with one degenerate saddle critical point on two-dimensional torus. International Conference «Morse theory and its applications», dedicated to the memory and 70th anniversary of Volodymyr Sharko (25.09.1949 – 07.10.2014). September 25–28, 2019, Kyiv, Ukraine : Conference materials. Kyiv, Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Ukraine, 2019. P. 19–21.

МЕТОД ПРЫГАЮЩИХ ЛЯГУШЕК ДЛЯ УПАКОВКИ МНОГОМЕРНЫХ ОБЪЕКТОВ

Козин И. В., Полюга С.И.

*Запорожский национальный университет,
Запорожский областной институт последипломного
педагогического образования*

FROG LEAPING METHOD FOR PACKING MULTIDIMENSIONAL OBJECTS

Abstract. The problem of multidimensional packing of objects is considered. To find suboptimal solutions to this problem, a hybrid algorithm is proposed based on a combination of the mixed jumping frogs method and the fragmented algorithm

Рассматривается задача упаковки в n -мерное множество-основу P множества V из M попарно неизометричных объектов, составленных из единичных гиперкубов, путем склеивания их по гиперграням размерности $n-1$. При этом объекты, которые подлежат упаковке, не обязательно являются выпуклыми. Для каждого такого объекта при укладке допускаются вращения на прямой (или кратный прямому) угол вокруг координатных осей. Задача уложить как можно больше объектов из множества V в заданное множество-основу P . Для простоты, в качестве множества-основы будет рассматриваться многомерный параллелепипед. Внутренности упакованных объектов не должны пересекаться.

Выберем в каждом объекте базовую точку x_{oi} . Размещение объекта в параллелепипеде P будет определяться координатами образа точки x_{oi} и элементом группы вращений G относительно осей координат на углы кратные $\pi/2$ и отражений относительно координатных гиперплоскостей. Таким образом, каждая упаковка определяется набором $I \subseteq \{1, 2, \dots, M\}$ выбранных объектов и набором пар $\{x_i, g_i\}_{i \in I}$, где x_i - координаты образа базовой точки, а $g_i \in G$.

Для поиска субоптимальных решений этой задачи предлагается использовать гибридный алгоритм, основанный на

комбинации метода перемешанных прыгающих лягушек[1,2] и фрагментарного алгоритма[3]. Фрагментарный алгоритм упаковки заключается в следующем. Сначала упорядочиваются целочисленные точки множества основы и задается некоторый порядок перебора элементов множества фрагментов $V \times G$. В первую по порядку свободную точку основы помещается базовая точка объекта и выполняется соответствующее вращение. Если внутренность образа объекта после таких преобразований не пересекается с уже построенным фрагментом, то он добавляется к этому фрагменту. В противном случае происходит переход к другому объекту. Если все объекты перебраны и не один из них не удалось разместить указанным выше способом, то происходит переход к следующей точке основы и процедура повторяется. Алгоритм заканчивает работу, либо все объекты будут размещены, либо все свободные точки основы будут исчерпаны. Если объект удалось разместить в множестве-основе, то этот объект и все ему изометричные вычеркиваются из упорядоченного списка объектов.

Перебор можно упростить, если считать допустимыми только такие элементы группы вращений для заданного объекта $v \in V$, для каждой пары которых размещения объекта не могут быть переведены одно в другое путем параллельного сдвига. В этом случае каждому элементу упаковки соответствует его собственная допустимая группа преобразований.

Таким образом, фрагментарный алгоритм задает отображение множества перестановок элементарных фрагментов (элементов множества $V \times G$) в множество допустимых упаковок. Критерием качества $F(x)$ упаковки x является гиперобъем не занятого упаковкой свободного пространства в многомерном параллелепипеде P .

Алгоритм метода перемешанных прыгающих лягушек позволяет отыскивать субоптимальные перестановки в сложных задачах оптимизации на перестановках. Параметры метода следующие:

1. Количество классов лягушек Q ($Q \geq 2$).
2. Количество элементов r в каждом классе (предполагается, что размеры классов одинаковы и $r \geq 2$).

3. Максимальное число шагов K алгоритма.

4. Количество D лучших лягушек в классе, причем $0 < D < r$.

В соответствии с заданными параметрами размер N популяции лягушек (множества допустимых решений) определяется формулой $N = Qr$. На начальном шаге алгоритма создается исходная популяция лягушек $P^{(0)}$ путем генерации случайных перестановок $x^j = (i_{j1}, i_{j2}, \dots, i_{jn})$, $j=1, 2, \dots, N$.

Выбирается лучшая по функции цели перестановка вершин, которая задает перестановку $x^* = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ и вычисляется значение целевой функции $F(x^*)$ на этой перестановке:

Шаг k ($1 \leq k \leq K$). Упорядочивается множество $P^{(k-1)}$ по значению целевой функции, то есть $F(x^k) \geq F(x^{k-1})$, $k = 2, 3, \dots, N-1$. Разбивается популяция $P^{(k-1)}$ на Q классов одинаковой мощности r

$$P_q^{(k-1)} = \{x^{(qi)} \mid x^{(qi)} = x^j, j = q + (i-1)Q, i = 1, 2, \dots, r, q = 1, 2, \dots, Q\}.$$

Определяется лучшее решение $x^* = x^1$ по значению целевой функции на всей популяции. В каждом классе $P_q^{(k-1)}$ определяются «лучшее» $x^{(q1)}$ и «худшее» $x^{(qr)}$ по значению целевой функции решения. В каждом классе $P_q^{(k-1)}$ меняются положения (последовательности обхода вершин графа) лягушек с номерами от $D+1$ до r . Для каждого значения индекса $i \in \{D+1, 2, \dots, r\}$ определяется новое положение i -й лягушки (последовательность обхода вершин) в классе с номером q по следующему правилу: вычисляется случайная перестановка x^c из отрезка между перестановками $x^{(q1)}$ и $x^{(qr)}$ в метрике Кендалла.

Если $F(x^c) < F(x^{(qi)})$, то полагаем $x^{(qi)} = x^c$. Если $F(x^c) \geq F(x^{(qi)})$, то выбирается случайная перестановка x^c в отрезке между x^* и $x^{(qr)}$. Если $F(x^c) < F(x^{(qi)})$, то полагаем $x^{(qi)} = x^c$. В противном случае выбираем в качестве $x^{(qi)}$ случайно сгенерированную перестановку.

Полагаем $P^{(k)} = \bigcup_{q=1}^Q P_q^{(k-1)}$ и переходим к очередному

шагу алгоритма.

Алгоритм заканчивает работу, когда проведено заданное число шагов. Текущая перестановка x^* , определенная на последнем шаге берется в качестве оптимального решения задачи.

Заметим, что описанный выше алгоритм решает задачу отыскания оптимальной перестановки из n элементов на множестве всех перестановок с целевой функцией $F(x)$, которая задана на множестве перестановок. При этом конкретный вид целевой функции не имеет значения. Поэтому рассмотренный выше алгоритм может использоваться для отыскания субоптимальных решений задач оптимизации на множестве перестановок с произвольными целевыми функциями.

Таким образом, гибридный алгоритм на основе комбинации метода перемешанных прыгающих лягушек и фрагментарного алгоритма может быть обобщен на широкий класс дискретных оптимизационных задач, а именно на задачи, имеющие фрагментарную структуру.

Литература

1. Eusuff M.M. Optimization of water distribution network design using the shuffled frog leaping algorithm / M.M. Eusuff, K.E. Lansey // J. Water Resour. Planning Mgmt. – 2003. – Vol. 129. – P. 210 – 225. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9496\(2003\)129:3\(210\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9496(2003)129:3(210))

2. Narimani M.R. A New Modified Shuffle Frog Leaping Algorithm for NonSmooth Economic Dispath // World Applied Sciences Journal. 2011. – P. 803–81

3. I. V. Kozin, N. K. Maksyshko, V. A. Perepelitsa Fragmentary Structures in Discrete Optimization Problems, Cybernetics and Systems Analysis November 2017, Volume 53, Issue 6, P 931–936. <https://doi.org/10.1007/s10559-017-9995-6>

КРИПТОСИСТЕМА НА ОСНОВІ СКІНЧЕННИХ КОМУТАТИВНИХ КІЛЕЦЬ З ОДИНИЦЕЮ

Кривий С. Л.

Київський національний університет імені Тараса Шевченка

A CRYPTOSYSTEM ON THE BASE OF FINITE COMMUTATIVE RINGS WITH UNIT

Abstract. A simple encryption system is based on properties of finite abelian group and associative and commutative rings with unit is proposed. The algorithms for encryption and decryption have quadratic time complexity and memory complexity. Tab. 4. Ref. 3 titles.

Вступ. В роботі розглядається проста криптосистема, побудована на основі скінченних асоціативно-комутативних кілець з одиницею [1,2]. Нехай задана деяка скінченна множина цілих чисел, наприклад, $N_5 = \{0,1,2,3,4\}$. Оскільки потрібно побудувати адитивну абелеву групу, то ця група повинна включати 0. Для того, щоб N_5 перетворити в групу GN_5 , необхідно коректно задати значення для операції додавання з одним із елементів групи, скажімо з 1 [3]. Дійсно, оскільки $a + 0 = a$ для довільного $a \in GN_5$, то перший рядок таблиці додавання елементів групи визначений (таблиця 1), а на підставі комутативності (оскільки група абелева) і перший стовпчик цієї таблиці. Нехай, наприклад, задано ключ $0+1=1$, $1+1=4$, $1+4=2$, $1+2=3$, $1+3 = 0$. Таке визначення коректне,

оскільки має місце однозначність результату (але це не достатня умова коректності). Тепер послідовно знаходимо результати додавання з елементом $4=1+1$:

$$4+2=(1+1)+2=1+(1+2)=1+3=0, \quad 4+3=(1+1)+3=1+(1+3)=1, \\ 4+4=(1+1)+4=1+(1+4)=1+2=3.$$

Далі знаходимо значення $4+1=2$ і обчислюємо операцію додавання з елементом 2:

$$2+2=(1+4)+2=1+(4+2)=1+0=1, \\ 2+3=(1+4)+3=1+(4+3)=1+1=4, \quad 2+4=(1+4)+4=1+(4+4)=1+3=0.$$

Далі знаходимо значення $2+1=3$ і обчислюємо операцію додавання з елементом 3:

$$3+2=(1+2)+2=1+(2+2)=1+1=4, \quad 3+3=(1+2)+3=1+(2+3)=1+4=2, \\ 3+4=(1+2)+4=1+(2+4)=1+0=1.$$

Заносимо ці значення в таблицю 2 і на цьому закінчуємо побудову групи GN_5 .

Таблиця 1

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	4	3	0	2
2	2	3			
3	3	0			
4	4	2			

Таблиця 2

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	4	3	0	2
2	2	3	1	4	0
3	3	0	4	2	1
4	4	2	0	1	3

Поставимо у відповідність операції додавання з елементом групи a_1 , за допомогою якого визначається група, підстановку

$$f_{a_1} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} \\ a_1 & a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} \end{pmatrix}.$$

Ця підстановка означає, що $f_{a_1}(0)=0+a_1=a_1$, $f_{a_1}(a_1)=a_1+a_1=a_{i1}$, $f_{a_1}(a_{i1})=a_{i1}+a_1=a_{i2}$, ... $f_{a_1}(a_{k-1})=a_{ik-1}+a_1=a_{ik}$.

Теорема 1. *Всі скінченні повноциклічні абелеві групи одного і того порядку ізоморфні між собою.*

Алгебра називається асоціативно-комутативним кільцем з одиницею, якщо вона абелева група відносно операції додавання, абелева напівгрупа з одиницею відносно операції множення і операції додавання і множення зв'язані законом

дистрибутивності. Нульовий елемент адитивної групи кільця – нуль кільця.

Криптографічна система на основі груп і кілець. Розглянемо як можна побудувати за групою GN_6 , яка задана таблицею 3, асоціативно-комутативне кільце з одиницею KG_6 . Роль одиниці буде відігравати 1. За таблицею додавання і законом дистрибутивності знаходимо таблицю для операції множення. Дійсно, оскільки $1+1=3$, то $3 \cdot 2 = (1+1) \cdot 2 = 2+2 = 4$; $3 \cdot 3 = (1+1) \cdot 3 = 3+3 = 4$; $3 \cdot 4 = (1+1) \cdot 4 = 4 + 4 = 3$; $3 \cdot 5 = (1+1) \cdot 5 = 5+5=0$. Далі, оскільки $1+3=5$, то дістаємо:

$$5 \cdot 2 = (1+3) \cdot 2 = 2+3 \cdot 2 = 2+4=5; 5 \cdot 3 = (1+3) \cdot 3 = 3+3 \cdot 3 = 3+4=0;$$

$$5 \cdot 4 = (1+3) \cdot 4 = 4+3 \cdot 4 = 4+3=0; 5 \cdot 5 = (1+3) \cdot 5 = 5+0=5.$$

За таблицею 3 маємо $5+1 = 4$ і це дає змогу знайти значення операції множення з елементом 4, з елементом $4+1=2$ і решту елементів таблиці 4. Оскільки $1+2=0$, то це означає, що вся таблиця множення побудована. Легко перевірити, що ця операція задовольняє також закон асоціативності, тобто KG_6 – асоціативно-комутативне кільце з одиницею.

Таблиця 3

+	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	3	0	5	2	4
2	2	0	4	1	5	3
3	3	5	1	4	0	2
4	4	2	5	0	3	1
5	5	4	3	2	1	0

Таблиця 4

*	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	1	4	3	5
3	0	3	4	4	3	0
4	0	4	3	3	4	0
5	0	5	5	0	0	5

Нехай операція додавання визначена для елемента групи a . Побудова кільця KG_{N_k} , виконується за такими алгоритмами:

ADD-TAB-KG(a, k)

0) Занести в T_+ перший рядок і стовпчик результати додавання з нулем;

1) Занести в T_+ рядок з результатами додавання з елементом a (**ключ 1**);

2) Покласти $c=a$;

3) Взяти в T_+ елемент $c'=c+a$;

4) Для всіх x занести в T_+ суми $c'+x=(c+a)+x=c+(a+x)$;

5) Покласти $c=c'$, $c'=c+a$; Якщо $c'=0$ то СТОП, інакше на крок 4).

MUL-TAB-KG(1,k)

0) Занести в T рядки і стовпчики з результатами множення на 0 і на 1;

1) Покласти $c=1$;

2) Взяти в T_+ елемент $c'=c+1$;

3) Для всіх x занести в T добутки $c' \cdot x = (c+1) \cdot x = c \cdot x + x$;

4) Покласти $c=c'$; $c'=c+1$; Якщо $c'=0$, то СТОП, інакше на крок 3).

Складність обох алгоритмів $O(k^2)$, де k – порядок кільця.

Правильність алгоритмів випливає з того, що всі елементи $c_1=a+a$, $c_2=c_1+a, \dots$, $c_k=c_{k-1}+a$ пробігають всі елементи абелевої групи на підставі того, що рівняння $a+x=b$ в групі має єдиний розв'язок. З цих побудов випливає такий спосіб шифрування з використанням властивостей кільця:

RG-EN(k)

1) Будуємо кільце (або тільки групу) порядку $k > 26$;

2) Задаючи бієкцію f (**ключ 2**) між елементами кільця і символами алфавіту, шифруємо текст T з використанням однієї або обох таблиць.

RG-DE(T)

1) Розшифрування виконується в зворотному порядку: знаходимо значення f^{-1} на елементах шифрограми і ключа; на основі таблиць кільця

повністю дешифруємо отриманий текст.

Стійкість алгоритму: оскільки при визначенні групи GN_k породжуються всі елементи, то простір ключів, як впливає з теореми 1, складатиме $(k-2)!$ варіантів. Дійсно, кількість способів, якими можна задати ключ, дорівнює кількості ізоморфізмів груп k -го порядку, а це кількість способів упорядкування $(k-2)$ -елементної множини (елементи 0 і 1 мають фіксовані позиції). Нумерація символів алфавіту може виконуватися $n!$ способами, де n – кількість символів алфавіту. Отже, простір ключів – $(k-2)!n!$

Таким чином, дістаємо моноалфавітну криптосистему, яка подібна до системи Віженера [4]. Текст можна зашифрувати з

використанням таблиці додавання і множення. Для цього потрібно, щоб елементи добутку були дільниками одиниці в $KG\mathbb{N}_k$. Множина дільників одиниці в кільці – абелева група [1].

Теорема 2. *Скінченне асоціативно-комутативне кільце з одиницею k -го порядку, адитивна група якого повноциклічна, має $\varphi(k)$ дільників одиниці, де φ – функція Ойлера.*

Доведення. Розглянемо Z_k – кільце лишків за модулем k . Адитивна група цього кільця повноциклічна. Дільники одиниці в Z_k – це елементи взаємно прості з модулем кільця k , а всіх таких елементів буде $\varphi(k)$, де φ – функція Ойлера. На підставі теореми 1 існує ізоморфізм між кільцем лишків Z_k і кільцем $KG\mathbb{N}_k$, який є продовженням ізоморфізму між адитивними групами цих кілець. Отже, мультиплікативна група $KG\mathbb{N}_k$ має порядок $\varphi(k)$.

Якщо вибрати порядок кільця так, щоб $\varphi(k)$ було великим, то в цій системі можна використовувати функцію дискретного логарифму для обміну ключами. Відомо, що найкращим порядком кільця є $k=p^m$, де $m \geq 1$, p – непарне просте число [4].

Література

1. Калужнин Л.А. Введение в общую алгебру. М.: Наука. – 1973. – 447 с.
2. Кук Д., Бейз Г. Компьютерная математика – М.: Наука. – 1990. – 384 с.
3. Menezes A., van Oorschot P., Vanstons S. Handbook of Applied Cryptography. – CRC Press. – 1996. – 661 p.
4. Черемушкин А. В. Лекции по арифметическим алгоритмам в криптографии. – М.: МЦНМО. – 2002. – 103 с.

ПОСТРОЕНИЕ И СВОЙСТВА МАТРИЦЫ РЕБЕРНЫХ РАЗРЕЗОВ ГРАФА

Курапов С.В., Неласая А.В., Давидовский М.В., Полюга С.И.

Запорожский национальный университет

Национальный университет «Запорожская политехника»

*Запорожский областной институт последипломного
педагогического образования*

CONSTRUCTION AND PROPERTIES OF THE GRAPH EDGE SECTIONS MATRIX

Abstract. An edge section is defined by an edge and central sections incident to it. In contrast to the generation of iterated edge graphs, we consider an iterated chain of quali-sections of the original graph. It generated by edge sections and determined by the recurrence relation. The report considers the issues of constructing the matrix of sections D of a graph G . The connection of the matrix D with the matrices of incidents and adjacencies of the graph is shown, and methods for the formation of other graph structures are described. The questions of isomorphism of the main edge sections of the graph are considered.

В докладе рассматриваются вопросы построения полного инварианта графа[1,2]. Дано определение полного инварианта графа. Описываются свойства матрицы разрезов D графа G . Матрица разрезов графа D является более универсальной матрицей, так как включает в себя свойство матриц смежностей и инциденций. Дополнительными свойствами матрицы D является возможность описания центральных разрезов и основных реберных разрезов графа. Показана независимость построения структуры основных реберных разрезов графа от переименования вершин. В дальнейшем данное свойство используется для построения полного инварианта графа.

Рассмотрены вопросы изоморфизма основных реберных разрезов графа. Представлен алгоритм распознавания изоморфизма графов на основе выбора соответствия между основными реберными разрезами графов. Доказана теорема об изоморфизме основных реберных разрезов двух графов.

Введено понятие обратного преобразования для элементов спектра реберных разрезов графа. Рассмотрены свойства графа для цепочки реберных разрезов ребра на основе обратного преобразования реберных разрезов. Показана однозначность

данного преобразования, как в прямом, так и обратном направлениях. Доказана теорема об изоморфизме спектра реберных разрезов графов. На основании доказанного строится полный инвариант графа.

Полный инвариант графа включает в себя не только суммарный кортеж весов, но должен включать и кортежи весов для каждого уровня спектра реберных разрезов. Однако, для получения корректного практического результата достаточно применять только суммарный кортеж весов. Для иллюстрации основных положений метода приведено необходимое количество примеров.

Литература

1. Пинчук В.П. Табличные инварианты на графах и их применение // Кибернетика и системный анализ. Институт кибернетики НАН Украины. 2001. №4
2. Погребной В.К., Погребной А.В. Полиномиальный алгоритм вычисления полного инварианта графа на основе интегрального описателя структуры // Известия Томского политехнического университета. – 2013 – Т.323. - № 5. – С.152-159.

МАШИННЕ НАВЧАННЯ У ПРОЦЕСІ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

Маляр М.М., Маляр-Газда Н.М., Шаркаді М.М.
ДВНЗ «Ужгородський національний університет»

MACHINE LEARNING IN DECISION-MAKING PROCESS

Abstract. Machine learning is a unit of a fairly broad field of science that studies artificial intelligence. Related algorithms are used to solve problems that often make it difficult or impossible to come up with an explicit algorithm for solving them.

Останнім часом все більшу увагу заслуговують проблеми пов'язані з прийняттям рішень. Приймаючи рішення, як правило, стикаються з проблемами пошуку інформації. Машинне навчання (МН) — це процес застосування алгоритмів для автоматичного знаходження закономірностей у даних і використання їх для прийняття великої кількості однотипних рішень. Методів машинного навчання існує дуже багато. Тому, набагато важливіше розуміти, коли використання тих чи інших методів буде найбільш доцільним. З наукової точки зору машинне навчання — це процес моделювання, настройки параметрів, підготовки даних і оптимізації компонент. Ціль машинного навчання, як дослідницького процесу, це пошук оптимальних відповідей та прогнозів. Машинне навчання є індуктивним навчанням або «навчання за прецедентами» на основі пар «об'єкт — відповідь», оскільки в основному вчимо машину вчитися на прикладах, спостерігати велику кількість прикладів із реального життя, будувати на них моделі, перевіряти та застосовувати їх на подальших прикладах.

Завдання МН виглядає так: уявімо собі, що в нас є певний набір об'єктів-прикладів і певний набір міток, тобто, реакцій, відповідей. Задача МН — знайти приховану залежність між прикладами(спостереженнями) і відповідями(реакціями) для прогнозування відповідей на основі нових даних. Математичне формулювання та модель такої задачі виглядає наступним чином:

Нехай X - деяка множина, елементи якої називаються об'єктами або прикладами, ситуаціями, входами (samples); а Y - множина, елементи якої називаються відповідями або відгуками, мітками, виходами (responses). Існує деяка залежність (детермінована і імовірнісна), що дозволяє за елементами $x \in X$ передбачити $y \in Y$. Зокрема, якщо залежність детермінована, то існує функція $\varphi^* : X \rightarrow Y$. Залежність відома тільки на об'єктах навчальної вибірки $\{(x^{(i)}, y^{(i)}) : x^{(i)} \in X, y^{(i)} \in Y (i=1, \dots, N)\}$, N — кількість об'єктів у навчальній виборці. Упорядкована пара "об'єкт —

відповідь" $\{(x^{(i)}, y^{(i)}): x^{(i)} \in X \times Y\}$ називається прецедентом. Потрібно встановити залежність між входом і виходом на основі даних навчальної вибірки.

Модель задачі машинного навчання за прецедентами:

Задано: множина об'єктів X і множина відповідей Y .

Відомо: навчальна вибірка $\{x^{(i)} \in X, (i=1, \dots, N)\}$ і відповідно відповіді

на цій вибірці $\{y^{(i)} = y(x^{(i)}): y \in Y (i=1, \dots, N)\}$.

Знайти: алгоритм $a: X \rightarrow Y$, тобто алгоритм побудови вирішальної функції $\varphi \in \Phi$, яка наближує, найбільш точно, $y \in Y$ не тільки на навчальній вибірці, а і на всій множині X .

Для різних типів задач множина об'єктів X і відповідей Y може задаватись по різному. Наприклад, для задачі класифікації: $Y = \{-1; +1\}$ – класифікація на два класи; $Y = \{1, \dots, M\}$ – класифікація на M класи, які не перетинаються; $Y = \{0; 1\}^M$ – класифікація на M класи, які перетинаються. Для задачі регресії: $Y = R$ або $Y = R^m$; для задачі ранжування Y – скінчена впорядкована множина. Множина об'єктів X , як правило, задається не самими об'єктами, а їх описами. Найбільш поширеним є ознаковий опис. Ознака (feature) f об'єкта $x \in X$ – це результат вимірювання деякої характеристики об'єкта x . При такому підході об'єкт $x \in X$ представляється як вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, k – кількість ознак, а $x_j = f_j(x), (j = 1, 2, \dots, k)$. Формально ознака це відображення $f: X \rightarrow D_j$, де D_j – множина допустимих значень ознаки.

Машинне навчання – це підрозділ штучного інтелекту, який розглядає побудову алгоритмів, які можуть навчатися на наявних даних [1- 4]. Навчання – це річ, знайома будь якій

людині, оскільки люди навчаються щодня і показують у цьому процесі прекрасні результати. Спостерігаючи закономірності в зміні середовища навколо, вони конструюють певну модель зміни цього середовища і приймають ті чи інші рішення. Середовище певним чином реагує на прийняті рішення і люди знову корегують модель світу. Машинне навчання дозволяє знаходити закономірності в існуючих даних, щоб потім передбачати потрібну інформацію для нових об'єктів.

Література

1. Machine learning by Stanford university: веб-сайт. URL: <https://www.coursera.org/learn/machine-learning/home/welcome> (дата останнього звернення 01.06.2019).
2. Машинне навчання. Типи навчання: веб-сайт. URL: https://courses.prometheus.org.ua/courses/IRF/ML101/2016_T3/about (дата останнього звернення 01.06.2019).
3. Курс “Машинне навчання ” від Prometheus: веб-сайт. URL: https://courses.prometheus.org.ua/assets/courseware/cdf163c83c64f8357ddbcdac82f7d624/c4x/IRF/ML101/asset/Тиждень_1_конспект (дата останнього звернення 08.04.2019).
4. Voroncov, K. V. Algoritmy klasterizacii i mnogomernogo shkalirovanija : kurs lekcij [Algorithms for clustering and multidimensional scaling : course of lectures], Moskovskij gosudarstvennyj universitet, Moscow, Russia. – 2007.

МЕТОД КЛАСТЕРИЗАЦІЇ КОРИСТУВАЧІВ СОЦІАЛЬНОЇ МЕРЕЖІ НА ОСНОВІ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ

Мелешко Є.В., Дреєва Г.М., Дреєв О.М.

Центральноукраїнський національний технічний університет

Abstract. In this work, propose the user clustering method for a social network based on the multilayer feedforward neural network to identify bot networks on a web-resource

Кластеризація – це процес об'єднання у групи різних об'єктів, що мають схожі властивості.

Існують різні причини здійснювати кластеризацію користувачів соціальних мереж, наведемо декілька з них:

- в маркетингових цілях – розділити на групи для показу кожній окремій групі відповідної таргетованої реклами;

- для пошуку ботів – розділення користувачів на дві групи: автентичні та боти, – для подальшої нейтралізації діяльності ботів;

- з метою соціальних досліджень – для дослідження структури різних соціальних мереж та підмереж.

Кластеризація даних на основі нейронних мереж використовується досить давно, відомі реалізації застосовують мережі Кохонена, Хеммінга, ART-мережі, мережі прямого поширення з глибоким навчанням [1].

У даній роботі пропонується метод кластеризації користувачів соціальної мережі з метою виявлення ботів, що здійснюють накручування рейтингів деяким об'єктам сайту. У спеціалізованих соціальних мережах, до яких можна віднести мережі для любителів фільмів, книг, тощо, часто надається можливість оцінювати контент в п'ятибальній чи іншій системі. Виставлені оцінки впливають на рейтинг об'єктів, що часто використовують треті особи для підвищення рейтингу цільових об'єктів за допомогою мереж ботів з метою просування певних товарів [2, 3].

Було розроблено багат шарову нейронну мережу прямого поширення, для кластеризації користувачів з метою виявлення бот-мереж.

Як вхідні дані для штучної нейронної мережі були обрані наступні показники профілів користувачів:

- мінімальний часовий інтервал між виставленням оцінок;
- максимальний часовий інтервали між виставленням оцінок;

- середнє значення часових інтервалів між виставленням оцінок;

- середньоквадратичне відхилення тривалості інтервалів між виставленням оцінок;

- мінімальна оцінка у профілі;
- максимальна оцінка у профілі;
- середнє значення оцінок у профілі;
- середньоквадратичне відхилення значень оцінок у профілі.

Розроблена нейронна мережа містить наступні прошарки:

- вхідний – 8 нейронів, по одному на кожен показник.
- прихований – 32 нейрони.
- прихований – 32 нейронів.
- прихований – 8 нейронів.
- вихідний – 2 нейрони з функцією активації «softmax».

Повертає ймовірність належності користувача до аутентичної групи або до групи ботів.

Для внутрішніх шарів було використано функцію активації сигмоїда. В якості алгоритму навчання мережі обрано алгоритм Адам [5]. Алгоритм оптимізації Адам розширює алгоритм стохастичного градієнтного спуску та отримав в останній час, широкє розповсюдження у системах з глибоким навчанням. Він відрізняється від класичного стохастичного градієнтного спуску наявністю індивідуальних адаптивних швидкостей спуску для різних параметрів з оцінок першого і другого моментів градієнтів.

Для реалізації нейронної мережі використана бібліотека tensorflow [6] та мова програмування python.

Роботу нейронної мережі було протестовано на MovieLens моделей інформаційних атак розглянутих у [2].

Результати експериментів показали, що точність виявлення атак мережі ботів становить в середньому 98% для моделей атак, які практично не використовують статистику дій справжніх користувачів, та 75% для складних моделей атак, які використовують статистику дій користувачів, яку можуть зібрати треті особи на веб-ресурсі, що атакується.

Висновки. Запропоновано метод кластеризації користувачів соціальної мережі на основі багатошарової нейронної мережі прямого поширення. Даний метод дозволяє виявити мережі ботів, які намагаються підвищити рейтинг цільовим об'єктам на веб-сайті. Вчасне виявлення та знешкодження мереж ботів

дозволяє значно підвищити інформаційну безпеку веб-ресурсу.

Література

1. Хайкин С. Нейронные сети: Полный курс, 2-е издание – М.: «Вильямс» – 2008. – 1104 стр.
2. Recommender Systems Handbook / Editors Francesco Ricci, Lior Rokach, Bracha Shapira, Paul B. Kantor. – 1st edition. – New York, NY, USA: Springer-Verlag New York, Inc., 2010. – 842 с.
3. O'Mahony M.P., Hurley N.J., Silvestre G.C.M. Promoting recommendations: An attack on collaborative filtering // from book Database and Expert Systems Applications: 13th International Conference, DEXA Aix-en-Provence, France. – 2002. – pp. 494-503.
4. Harper F.M. The MovieLens Datasets: History and Context [Електронний ресурс] / F.M. Harper, F.M. Harper // ACM Transactions on Interactive Intelligent Systems (TiiS). – 2016. – Режим доступу до ресурсу: <https://doi.org/10.1145/2827872>.
5. Нежное введение в алгоритм оптимизации Адама для глубокого обучения // Блог Машинное обучение, нейронные сети, искусственный интеллект. – 2017. URL: <https://www.machinelearningmastery.ru/adam-optimization-algorithm-for-deep-learning/>
6. TensorFlow tutorials – 2020. URL: <https://www.tensorflow.org/tutorials/>
7. Harper, F.M. and Konstan J.A. (2016) “The MovieLens Datasets: History and Context”, ACM Transactions on Interactive Intelligent Systems (TiiS), available at: <https://doi.org/10.1145/2827872>

МЕТОДИ ОЦІНКИ ЯКОСТІ РОБОТИ АЛГОРИТМІВ МАШИННОГО НАВЧАННЯ

Мелешко Є.В., Якименко М.С., Резніченко В.А.

Центральноукраїнський національний технічний університет

Abstract. In this work, the research of various metrics and methods for assessing work quality of neural networks was conducted. Methods of forming test samples for testing neural networks after the training were considered.

Методи машинного навчання починають використовуватися для вирішення все більшої кількості науково-практичних задач. Одним з найбільш популярних методів машинного навчання є нейронні мережі. Важливою задачею при побудові нейронних мереж є оцінка якості їх роботи. В загальному випадку для дослідження якості роботи нейронної мережі використовують середньоквадратичну помилку:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{|\tau|} \sum_{(u,i) \in \tau} (\hat{x}_{ui} - x_{ui})^2}, \quad (1)$$

де \hat{x}_{ui} – вихідний вектор нейронної мережі, а x_{ui} – перевіірочні дані, що містять вірну відповідь.

Також використовується середня абсолютна помилка:

$$MAE = \frac{1}{|\tau|} \sum_{(u,i) \in \tau} |\hat{x}_{ui} - x_{ui}|. \quad (2)$$

Якщо нейронна мережа здійснює кластеризацію або класифікацію об'єктів важливо оцінити точність та повноту результатів розбиття об'єктів на групи.

У випадку розділення об'єктів на дві групи можуть бути такі результати роботи мережі (табл. 1):

- Об'єкт належить до групи А, класифіковано вірно (*tp*).
- Об'єкт належить до групи А, класифіковано невірно (*fp*).
- Об'єкт належить до групи В, класифіковано вірно (*fn*).
- Об'єкт належить до групи В, класифіковано невірно (*tn*).

Таблиця 1. Класифікація можливих результатів роботи нейронної мережі при кластеризації об'єктів на дві групи

	Група А	Група Б
Вірно	True-Positive (<i>tp</i>)	False-Negative (<i>fn</i>)
Невірно	False-Positive (<i>fp</i>)	True-Negative (<i>tn</i>)

В такому разі можна підрахувати кількість подій, що відповідають кожній з комірок, та на основі одержаних значень оцінити точність роботи рекомендаційної системи за такими показниками:

$$Precision = \frac{tp}{tp + fp}, \quad (3)$$

$$Recall(True Positive Rate) = \frac{tp}{tp + fn}, \quad (4)$$

$$Accuracy = \frac{tp + tn}{tp + tn + fp + fn}, \quad (5)$$

$$F_{\beta} = \left(1 + \beta^2\right) \cdot \frac{precision \cdot recall}{(\beta^2 \cdot precision) + recall}. \quad (6)$$

Precision характеризує точність роботи нейронної мережі, *Recall* – повноту (чутливість) результату. *Accuracy* – частка вірних відповідей нейронної мережі. *F*-міра об'єднує *precision* и *recall* в агрегований показник якості, β визначає вагу точності у метриці, часто беруть наступне значення $\beta = 1$.

Також в деяких випадках корисним може бути визначення наступної метрики:

$$False Positive Rate = \frac{fp}{fp + tn}, \quad (7)$$

що показує, яку частку з об'єктів групи Б алгоритм визначив невірно.

Для класифікатора, що оцінює ймовірність $\hat{p}(y|x)$ приналежності об'єкту x до одного з множини класів y , де класів

більше, ніж два, можна використати наступну формулу:

$$Likelihood(\hat{p}) = \prod_{n=1}^N \hat{p}(y_n | x_n), \quad (8)$$

та оцінку Брієра:

$$BS = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{c=1}^C (I[y_n = c] - \hat{p}(y = c | x_n))^2, \quad (9)$$

Для тестування роботи нейронної мережі дуже важливою є задача підбору тестової вибірки. Погано підібрані тестові дані можуть дати невірну оцінку якості роботи алгоритму машинного навчання, зокрема, не виявити ряд помилок класифікації.

Існує декілька підходів до формування тестових вибірок:

– *Ймовірнісна модель даних* – тестова вибірка повинна відображати основні властивості генеральної сукупності. Важливим є ймовірності появи різних об'єктів у вибірці. Ймовірність появи об'єктів повинна наближатися до ймовірності їх появи під час роботи мережі з реальними задачами. Так алгоритм навчений на одній вибірці може погано працювати на другій вибірці з іншим розподілом ймовірностей появи об'єктів.

– *Кейсова модель даних* – увесь простір можливих об'єктів розбивається на деякі кейси. Кожний об'єкт характеризується функцією приналежності до певного кейсу, а кейс – важливістю. Всередині одного кейсу можна використовувати ймовірнісну модель даних. При використанні даної моделі стають більш зрозумілими загальні властивості системи, що тестується.

Способи генерації тестових даних:

– *Вибірка з бази об'єктів* – збір та маркування існуючих об'єктів. Всі об'єкти можна розбити на групи, причому об'єкти всередині групи будуть сильно схожі, а об'єкти з різних груп – відрізнятися. Являється досить працезатратною задачею. Не у всіх випадках можна швидко зібрати потрібну для навчаючої вибірки кількість даних.

– *Закономірна модифікація базового об'єкта*. Є набір

базових об'єктів, тестова вибірка формується шляхом безперервної модифікації їх параметрів. При використанні даного методу у тестовій вибірці стійко зберігається велика кількість фонових закономірностей.

– *Програмна генерація*. Генерація синтетичних навчальних даних за певним алгоритмом. Якщо реально можлива лише мала частина об'єктів з простору параметрів генерації або найбільш типові об'єкти мають складну конфігурацію, метод виявляється неефективним, так як згенерує багато безглузвих і мало дійсно важливих даних.

– *Семплування*. Покликане подолати недоліки попереднього методу. Здійснюється деякий апіорний розподіл в просторі об'єктів, і алгоритм намагається згенерувати вибірку з даного розподілу. Застосовуються методи вибірки з відхиленням, семплування по Гіббсу, схема Метрополіс-Гастингса, ланцюги маркова, метод Монте-Карло, тощо. Дані методи застосовуються для того, щоб досліджувати не весь простір об'єктів, а тільки його найбільш осмислені частини.

Література

1. Jacob J. The Best Metric to Measure Accuracy of Classification Models // Блог Машинное обучение, нейронные сети, искусственный интеллект. – 2019. URL: <https://clevertap.com/blog/the-best-metric-to-measure-accuracy-of-classification-models/>
2. Кафтанников И.Л., Парасич А.В. Проблемы формирования обучающей выборки в задачах машинного обучения // Вестник ЮУрГУ. Серия: Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника, №3. – 2016. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/problemy-formirovaniya-obuchayuschey-vyborki-v-zadachah-mashinnogo-obucheniya>
3. Хайкин С. Нейронные сети: Полный курс, 2-е издание – М.: «Вильямс» – 2008. – 1104 с.

ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ МОДЕЛЕЙ ХІМІЧНИХ СПОЛУК ДЛЯ ЗАДАЧ ПОШУКУ ІДЕНТИЧНОЇ СТРУКТУРИ

Остапенко О.О., Чала Л.Е.

Харківський національний університет радіоелектроніки

COMPARATIVE ANALYSIS OF CHEMICAL COMPOUND MODELS FOR AGENDAS OF IDENTICAL STRUCTURE SEARCHING

Abstract. The analysis of the existing models of chemical compounds was performed, the structural formula, molecular graph, linear notations as well as direct coding of the adjacency matrix were used in the survey. Analyzing it is determined that the molecular graph is the most effective for performing the search operations of the identical structure. The search problem is formalized in terms of graph theory as finding the largest isomorphic subgraph. To estimate the proximity, relative distance functions that depend on the size of the graphs and their largest common subgraphs were used. The proposed approach to the estimation of the degree of proximity of chemical compounds based on the step and route characteristics with the determination of the degree of proximity allows reducing the number of comparisons in the search.

Прогнозування властивостей хімічних сполук базується на виявленні закономірностей в схемах зв'язку атомів в молекулі. Це потребує обробки великих обсягів хімічних даних, тому актуальною є проблема формалізації представлення сполук в залежності від їх структури.

Метою дослідження є порівняльний аналіз існуючих математичних моделей хімічних сполук з точки зору можливостей їх комп'ютерної обробки та визначення ефективних механізмів пошуку ідентичних структурних фрагментів в хімічних сполуках.

Розглянемо існуючі засоби представлення структури хімічних сполук. Двовірна структурна формула – достатньо наглядний та досить поширений засіб представлення хімічних сполук, але непридатний для зберігання та обробки в хімічних базах даних. Через це при комп'ютерній обробці хімічної інформації прийнято розрізняти внутрішнє та зовнішнє представлення хімічних сполук.

Для внутрішнього представлення використовуються молекулярні графи, які можуть бути при необхідності доповнені інформацією про тривимірні координати атомів, а також про динаміку їх зміни в часі [1]. Графи спрощують якісне розуміння взаємозв'язків та властивостей молекул, але представлення графів у вигляді матриці суміжності потребує значних затрат пам'яті. Іншою проблемою є встановлення ізоморфізму двох молекулярних графів, тобто відсутність можливостей для однозначної ідентифікації структури графу, що містить понад 15-20 вершин.

Для зовнішнього представлення хімічних сполук при зберіганні в інформаційних системах використовуються або лінійні нотації у вигляді строки символів, або безпосереднє кодування матриці суміжності молекулярного графа (нотації MOL, SDF, RDF). За допомогою лінійних нотацій (найбільш розповсюджені з них – SMILES, SMARTS, InChi) хімічні сполуки представляються як буквено-цифрова послідовність [2]. Лінійні нотації компактні, що робить їх досить ефективними для зберігання інформації, але менш наглядні, ніж молекулярні графи. До недоліків лінійних нотацій слід віднести складність формування словарів для обробки фрагментних записів, а також проблеми перетворення лінійної нотації в структурну формулу.

Безпосереднє кодування матриці суміжності молекулярних графів дозволяє представити її у вигляді текстового файлу. Розроблена велика кількість відповідних форматів, але широко використовуються лише декілька стандартів, кожен з яких має спеціалізоване застосування (наприклад, MOL- та SDF-файли для «малих» молекул, PDB-файли – для білків), але для них теж відсутні ефективні перетворення до структурної формули.

Визначення структурних фрагментів – типових фрагментів структури, що визначають хімічні та топологічні властивості, притаманні даному класу, дозволяє забезпечити гнучкість представлення інформації про хімічні сполуки. Кожному фрагменту структури зіставляється підграф молекулярного графу, а модель вибирання хімічних сполук представляється як зважений граф, вершини якого відповідають сполукам, а довжина (вага) ребер визначається відстанню між їх

молекулярними графами. Таке представлення дозволяє оцінити міру подоби молекулярних графів сполук, але некоректне визначення функції відстані може привести до неоднозначних результатів [3].

Таблиця 1

Характеристики математичних моделей хімічних сполук

Характеристика моделі	Внутрішнє представлення		Зовнішнє представлення	
	Структурна формула	Молекулярний граф	Лінійні нотації	Безпосереднє кодування матриці суміжності
Наочність	висока	висока	низька	дуже низька
Уніфікованість	дуже низька	середня	висока	середня
Компактність	дуже низька	низька	висока	середня
Придатність до комп'ютерної обробки	дуже низька	середня	середня	висока
Чутливість до операцій пошуку: – ідентичної структури; – за молекулярною подобою; – підструктурного та надструктурного; – за фармакофором.	низька	середня	середня	низька
	низька	висока	середня	низька
	низька	висока	середня	низька
	дуже низька	середня	середня	середня
Ефективність перетворення з/в структурну формулу	–	висока/середня	середня/низька	висока/низька

Як видно з таблиці, незважаючи на низьку компактність, молекулярний граф є найбільш ефективним для проведення різноманітних операцій пошуку. В термінах теорії графів задача пошуку подібної хімічної сполуки зводиться до визначення

найбільшого ізоморфного підграфу (або декількох найбільших ізоморфних підграфів) та оцінювання на їх основі міри близькості двох сполук з додаванням умови еквівалентності міток. Для кількісної величини задаються інтервали її значень, всередині яких усі значення вважаються рівними, а для якісної – списки еквівалентних імен.

Для диференціації вершин графів застосуємо метод диференціації на основі упорядкованих ступеневої та маршрутною характеристик (ступеневий та маршрутний інваріанти графу). Для визначення міри структурної подоби молекулярних графів використовуються функції відносних (нормованих) відстаней, що залежать від розмірів двох графів та їх найбільших спільних підграфів.

Таким чином, молекулярний граф завдяки великій комбінаторній потужності теорії графів є ефективною моделлю представлення хімічної сполуки, що дозволяє формалізувати її структуру для вирішення широкого кола хімічних задач та організації різних видів пошуку. Застосування методів диференціації вершин графу на основі ступеневої та маршрутною характеристик, за попередніми оцінками, знизить число операцій порівняння у 1,25 рази.

Література

1. Васильев П.М. Языки фрагментарного кодирования структуры соединений для компьютерного прогноза биологической активности [Текст] / П. М. Васильев, А. А. Спасов // Российский химический журнал. — 2006. — Том 8, № 2. — С. 108–127.
2. Авдеева Т. В. Оптимизация обработки информации в химических базах данных [Текст] / Т. В. Авдеева, А. П. Сергеев // Материалы конференции "High Performance Computing" НПС-УА 2013, Киев, 7-11 октября 2013 г. — 2013. — С. 23–27.
3. Погребной А. В. Метод дифференциации вершин графа и решение проблемы изоморфизма [Текст] / А. В. Погребной, В. К. Погребной // Известия Томского политехнического университета. — 2015. — Том 326, № 6. — С. 37–45.

КЕРУВАННЯ СИСТЕМОЮ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ З ЗМІННИМИ ПОТОКАМИ ВИМОГ

Пасенченко Ю. А.

*Військовий інститут телекомунікацій та
інформатизації імені Героїв Крут*

MANAGEMENT OF THE MASS SERVICE SYSTEM WITH VARIABLE FLOWS REQUIREMENTS

Abstract. The statement considered the task queueing system management with variable intensiveness input stream requirements and maintenance. The following tasks are used in economy, IT-technology, and military affairs. When the queueing system seen on final the time and intensity of the input stream variable in time, then the limited resources of queueing system variable in time parameter control becomes the intensity of service lines.

Вивчається задача керування системою масового обслуговування (СМО) з змінними інтенсивностями обслуговування вхідного потоку вимог. Такі задачі знаходять застосування в економіці [1], ІТ-сфері, військовій справі. Зокрема при моделюванні захисних, або активних дій змінні інтенсивності дозволяють розглянути різні захисні, або активні стратегії [4].

Звичайно [1, 2] СМО вивчають при сталих інтенсивностях потоків вимог. При цьому для дослідження застосовують марківський підхід [1, 2] і аналізують граничний ($t \rightarrow \infty$) режим, для якого знаходять експлуатаційні характеристики СМО.

При плануванні захисних, або активних дій СМО розглядається на скінченому проміжку часу, змінними в часі параметрами можуть бути інтенсивності вхідного потоку, або потоку обслугованих вимог. Також наявними є вимоги на використані ресурси, якість обслуговування, інші параметри.

Далі розглянемо СМО з відмовами і n лініями обслуговування. Нехай $\lambda(t)$ – інтенсивність вхідного потоку вимог, $\mu(t)$ – інтенсивність обслуговування однієї вимоги однією лінією. Нехай $E_0, E_1, E_2, \dots, E_n$ стани марківського ланцюга,

що моделює роботу СМО [1], $\bar{p}(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots, p_n(t))$ -- вектор ймовірностей станів в момент t ($0 \leq t \leq T$). Тоді система диференціальних рівнянь Чепмена – Колмогорова [1] має вигляд:

$$\begin{aligned} p'_0 &= -\lambda(t)p_0 + \mu(t)p_1 \\ p'_1 &= -(\lambda(t) + \mu(t))p_1 + \lambda(t)p_0 + 2\mu(t)p_2 \\ &\dots\dots\dots \\ p'_n &= -n\mu(t)p_n + \lambda(t)p_{n-1} \\ \sum_{i=0}^n p_i(t) &= 1, \quad 0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq p_i(t) \leq 1, \end{aligned} \quad (1)$$

де $\bar{p}(0) = (p_0(0), p_1(0), \dots, p_n(0))$ – заданий вектор ймовірностей станів від 0-го до n -го в момент часу $t=0$. Крім того обмежена малим $\varepsilon > 0$ ймовірність відмови в обслуговуванні $p_n(t)$, а також інтенсивності $\lambda(t)$ і $\mu(t)$:

$$p_n(t) \leq \varepsilon \quad , \quad 0 \leq \mu(t) \leq \mu_0 \quad , \quad \lambda(t) \geq 0 \quad . \quad (2)$$

Мета операції полягає в мінімізації сукупних витрат за час T , де $c(t)$ враховує вартість використання ресурсу на обслуговування однієї вимоги в одиницю часу в момент t . Тоді за час $[0, T]$ буде використана така кількість ресурсу, що мінімізується:

$$\int_0^T c(t) \left(\sum_{k=1}^n k p_k(t, \lambda(t), \mu(t)) \right) dt \rightarrow \min \quad (3)$$

На $\mu(t)$ можливі додаткові обмеження. Задача (1) – (3) є задачею керування [3]. Управлінням є функція інтенсивності обслуговування $\mu(t)$, функція $\lambda(t)$ є заданою [4].

Розв'язання задачі керування (1) – (3) здійснюється чисельно [4]. Для цього переходимо до дискретного часу t на сітці $(0 = t_0, t_1, \dots, t_s = T)$. Інтеграл (3) замінюємо за формулами чисельного інтегрування (методи прямокутників, трапецій, Сімпсона тощо). Систему диференціальних рівнянь (1) замінюємо різницевою системою, наприклад, за методом Ейлера. Обмеження (1), (2) переходять у систему нерівностей-

обмежень. Значення інтенсивності $\lambda(t)$ задаємо на сітці t ($0 = t_0, t_1, \dots, t_s = T$) в дискретні моменти часу. Невідомими є значення вектор-функцій $(p_0(t), p_1(t), \dots, p_n(t))$ та керування $\mu(t)$ на сітці ($0 = t_0, t_1, \dots, t_s = T$). Задача (1) – (3) переходить в задачу нелінійного математичного програмування, яку можливо розв'язувати засобами MS Excel [5]. При цьому можливі різні сценарії відносно зовнішнього впливу – функції $\lambda(t)$: $\lambda(t)$ зростає/спадає, $\lambda(t)$ лінійна/експоненційна, $\lambda(t)$ періодична, тощо. В кожному випадку знаходиться керування – відповідна інтенсивність обслуговування $\mu(t)$.

Література

1. Клейнрок Л. Теория массового обслуживания. Пер. с англ. – М.: Машиностроение, 1979. – 432 с.
2. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания. – М.: «Наука», 1987. – 336 с.
3. Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р. Математическая теория конструирования систем управления. – М.: ВШ, 1989. – 447 с.
4. Пасенченко Ю.А. Про одну задачу керування системою масового обслуговування. Матеріали XXI Міжнародного науково-практичного семінару імені А.Я. Петренюка «Комбінаторні конфігурації та їх застосування». 17-18.05.2019, м. Кропивницький, с. 100-102.
5. Леоненков А.Л. Решение задач оптимизации в среде MS Excel. – Санкт-Петербург: BHV, 2005. – 704 с.

7-МИ ВЕРШИННІ ПІДГРАФИ 8-МИ ВЕРШИННИХ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЙ ДЛЯ ПОВЕРХНІ КЛЕЙНА

Петренюк В.І., Петренюк Д.А.

*Центральноукраїнський національний технічний
університет*

Інститут кібернетики ім.В.М.Глушкова НАН України

Встановлені усі неізоморфні 7-ми вершинні підграфи 8-ми вершинних графів-обструкцій поверхні Клейна та порівняні з аналогічними підграфами 8-ми вершинних графів-обструкцій для тора.

Вступ. Нехай G неорієнтований скінчений граф без петель і кратних ребер ейлерового роду $\gamma(G)$, а поверхня S - замкнутий 2-многовид роду $\gamma(S)$, де $\gamma(G) = \gamma(S) + 1$. Якщо поверхня орієнтована, то позначатимемо її через σ , а якщо це неорієнтована поверхня, то позначатимемо її N_k роду k , $k = 2$. Основні поняття та позначення узяті із [1]-[3], всі графи неорієнтовані без кратних ребер та петель. В [3] описана структура графів-обструкції для неорієнтованої поверхні N_k , а в [4], [5] отримано всі неізоморфні графи-обструкції для N_2 -поверхні Клейна на не більш ніж 9-ти вершинах, зокрема, у [6] наведено діаграми цих графів та 36-ти графів-обструкцій на 9-ти, окрім цього наведено 27 нових графів-обструкцій утворених шляхом розщеплення вершин 8-ми вершинних графів-обструкцій для неорієнтованої поверхні N_2 .

Нехай 2-многовид S без країв неорієнтованого роду $\bar{\gamma}(S)$ подано як поверхню S' орієнтованого роду $\gamma(S')$, де $\gamma(S') \geq 0$, $\bar{\gamma}(S) = 2\gamma(S') + r$, до якої приклеєно r лент Мебіуса, $r > 0$; наприклад, поверхня S є пляшкою Клейна коли $\gamma(S') = 0$ і $r = 2$, чи поверхня S роду $\bar{\gamma}(S) = 3$ матиме S' - тор із однією приклеєною лентою Мебіуса. Для заданого вкладення $f, f: G \rightarrow S$, графа G в S та заданої множини точок X , $X \subset G^0 \cup G^1$ визначимо $t_G(X, S, f)$, $t = t_G(X, S, f)$, число

досяжності множини X відносно S , якщо існує підмножина $S_G(X)$, $S_G(X) = S \setminus f(G)$, $S_G(X) = \{s_i\}_1^t$, що задовольняє умові:
 $(f(X) \subseteq \bigcup_{i=1}^t \partial s_i \cap X) \wedge (f(X) \not\subseteq \bigcup_{i=1, i \neq j}^t \partial s_i \cap X)$, $j=1,2,\dots,t$.

Задача. Для довільної вершини v графа G , який є граф-обструкцією для поверхні неорієнтованого роду 2. з числом вершин менше 10, дослідити структуру графу G шляхом розкладу (розбиття множини його ребер на суму двох підмножин, що не перетинаються) на підграф H , $H = G \setminus v$, та просту зірку $St_G(v)$ графа G із спільними вершинами, що утворюватимуть підмножину M множини точок графа G , подану як результат ототодження пар точок (a_{1j}, a_{2j}) в точку a_j , де $M_i = \{a_{ij}\}_{j=1}^{|M|}$, $i=1,2$, $j=1,2,\dots,|M|$, та яку називатимемо множиною точок приєднання підграфа H , $M_1 \subseteq H^0$, до зірки $St(v)$, $M_2 \subseteq St_G(v)^0 \setminus v$.

Визначення 1. Граф G називається таким, що неприводиться над S , або $\gamma(G)$ -неприведеним (irreducible) для S , якщо для будь-якого власного підграфа H графа G має місце нерівність: $\gamma(H) \leq \gamma(S) < \gamma(G)$. Множину всіх $\gamma(G)$ -неприведених над S графів позначимо через $\zeta(S)$.

Визначення 2. Граф G мінімальний (мінор) над S , якщо для будь-якого графа G' , отриманого з графа G видаленням або стисканням довільного ребра, має місце нерівність $\gamma(G') \leq \gamma(S) < \gamma(G)$. Множину всіх графів мінімальних над S позначимо через Γ_S . Множина всіх графів, що неприводяться над S містить Γ_S характеризує множину всіх графів рід яких не менше $\gamma(S)+1$. Якщо $S = \sigma_0$ евклідова площа, то $\Gamma_S = \{K_5, K_{3,3}\}$. Повний список 63-х 2-неприведених графів із 8-ма та 9-ма вершинами; 51 із них (48 мінорів) можливо побачити в [6].

Число досяжності підмножини M множини точок графа G роду γ , $\gamma = \gamma(G)$, є найменшою кількістю кліток з підмножини Δ множини $S \setminus f(G)$, де S поверхня роду γ , а $f, f: G \rightarrow S$,

довільне мінімальне вкладення при якому елементи $f(M)$ розташовують ся на границях кліток із підмножини Δ , потрібне для оцінки роду φ -образу деякого графа та простої зірки; у випадку заміни зірки на квазізірку доповнимо наступними визначеннями, які враховують наявність на границі недвоклітки кількох копій вершин графа.

Визначення 3. Позначимо через $krt_G(M)$, $kr = krt_G(M)$, kr - кратність доступу до елементів підмножини M множини точок графа G , як найбільшу кількість варіантів вибору різних підмножини $S_G(M, S_\gamma)$ множини кліток $S_\gamma \setminus f(G)$ на границях яких розміщуються всі точки з підмножини M , узята по всіх мінімальних вкладеннях f , $f : G \rightarrow S_\gamma$, графа G в поверхню S_γ . Іншими словами, це найбільша кількість зірок які приєднані кінцевими вершинами до кожного елемента підмножини M та вкладені до різних kr кліток із множини $S_\gamma \setminus f(G)$.

Визначення 4. Позначимо через $ms_G(M, s, f)$, $k = ms_G(M, s, f)$, k - сторонність доступу із довільної внутрішньої точки замкнутої клітки \bar{s} до кожної точки заданої підмножини M множини точок графа G , де $|M| > 2$, що полягатиме у наявності такої клітки s , $s \in S_{f(G)}(M, S_\gamma, s)$, де f - задане мінімальне вкладення $f : G \rightarrow S_\gamma$ графа G в поверхню S_γ , яка на своїй границі ∂s містить k копій підмножини M , а найбільшу кількість копій підмножини M на ∂s серед всіх кліток s заданого мінімального вкладення f , $f : G \rightarrow S_\gamma$, графа G в поверхню S_γ , позначимо через $ms_G(M, f)$. Іншими словами, це найбільша кількість зірок графа G приєднаних кінцевими вершинами до кожного із принаймні трьох елементів множини M та вкладених без перетину ребер у внутрішніх точках до однієї клітки s , $s \in S_\gamma \setminus f(G)$, із цикломатичним числом $p_1(\partial s)$, де $p_1(\partial s) \geq k$, та заданим мінімальним вкладенням f , $f : G \rightarrow S_\gamma$, графа G в S_γ .

Визначення 5. Будемо називати $(ms_G(M, f_1), ms_G(M, f_2), \dots, ms_G(M, f_N))$ вектором l -стороннього доступу до множини M точок графа G із довільної внутрішньої точки замкнутої клітки \bar{s} , $s \in S_\gamma \setminus f_k(G)$, $l = l(s)$, до кожної точки заданої підмножини M , де $l > 0$, $|M| > 2$, $\{f_k\}_{k=1}^N$ - множина всіх неізоморфних мінімальних вкладень f_k , $f_k: G \rightarrow S_\gamma$ графа G в S_γ . Найбільше $l, l = l(s)$ серед чисел $ms_G(M, f_k)$ узяті по всім s та всім f_k , називатимемо характеристикою l -стороннього доступу до множини M точок графа G .

Твердження 1. Для довільного мінімального вкладення f простого графа G до неорієнтованої поверхні N мають місце наступні співвідношення:

1. Немає ребер $e, e', e = (a, b), e' = (b, a)$ на границі довільної клітки s , $s \in S_G(N, f)$;

2. Немає повторення двох пар вершин чи двох пар частин ребер $e, e = (a, b)$, $e', e' = (c, d)$, які попарно розділяють одна одну та лежать на границі довільної клітки s , $s \in S_G(N, f)$;

3. Немає двох 2-кліток s_1, s_2 , де $s_1, s_2 \in S_G(N, f)$, на границях яких розташовані повторення трьох виділених ребер із різним порядком слідування.

Доведення. Доведемо співвідношення 1. Припустимо, методом від протилежного, що для деякого мінімального вкладення f графа G до неорієнтованої поверхні N границі клітки $s, s \in S_G(N, f)$ є два ребра $e, e', e = (a, b), e' = (b, a)$, як протилежно направлені копії ребра $\phi(e) = (\phi(a), \phi(b))$, розташовані на границі ∂s , т. то, на поверхні N одна лента Мебіуса містить одне ребро $\phi(e)$, де операція ϕ - ототождження точок на границях кліток є оберненою до операції розбиття на клітки поверхні N . Оскільки кожне з цих ребер належить перетину однієї з двох пар кліток $(s, s_1), (s, s_2)$ то, видаливши ребро e , ми, тим самим, видаляємо й ребро e' , утворюючи

простий цикл Z , який містить всі ті ребра простого графа $G \setminus e$, що належали границям кліток s, s_1, s_2 , та стане границею нової клітки s_0 , $s_0 \in S_{G \setminus e}(N, f)$. Побудуємо вкладення $f', f': G \rightarrow N$, де $f'|_{G \setminus e} = f|_{G \setminus e}$, $f'(e) \subset \overline{s_0}$, причому вершинами нового ребра стане кінцева вершина ребра (a, b) та початкова вершина ребра (b, a) . Отримаємо розбиття клітки s_0 на дві клітки, причому одна з яких буде утворена шляхом ототодження двох пар діаметрально протилежних вершин, т.то лентою Мебіуса без ребра, яку замінімо 2-кліткою зменшивши рід $\gamma(N)$ на 1. Тим самим отримаємо суперечність умові про рід графа G , припущення невірне. Доведення співвідношення 1 закінчене.

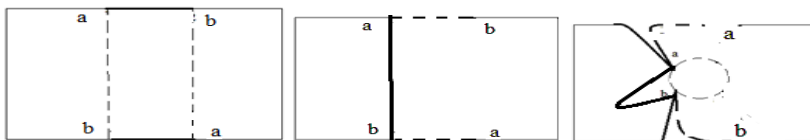


Рис. 1. Три карти ілюструють співвідношення 1 твердження 1.

Доведемо співвідношення 2. Припустимо, методом від протилежного, що деяким мінімальним вкладенням f графа G до неорієнтованої поверхні N із, принаймні, двома 2-ручками та однією лентою Мебіуса, розташовані на границі деякої клітки $s, s \in S_G(N, f)$, повторення або двох пар вершин, або двох пар частин ребер e, e' , де $e = (a, b), e' = (c, d)$, які розміщені на границі ∂s як копії ребер $\phi(e), \phi(e')$, де $\phi(e) = (\phi(a), \phi(b))$, $\phi(e') = (\phi(c), \phi(d))$, т. то, на поверхні N дві ручки містять по одному ребру $\phi(e)$ чи $\phi(e')$, де операція ϕ - ототодження вершин та ребер на границях кліток є оберненою до операції розбиття на клітки поверхні N мінімальним вкладенням f графа G . Розглянемо простий шлях L , що лежить в середині клітки s і з'єднує середні точки копій ребра e чи його частини, та який стане негомотопним нулю простим циклом $\phi(L)$ на поверхні N після операції ϕ - ототодження копій ребер (частин) та вершин графа G . Видалимо цикл $\phi(L)$ і ребро $\phi(e)$ тим самим відріжемо

звільнену ручку поверхні та розглянемо вкладення f' , $f' = f|_{G \setminus e}$, як звуження вкладення f на підграф $G \setminus e$ до неорієнтованої поверхні N' роду $\gamma(N')$, $\gamma(N') = \gamma(N) - 2$, причому ребро $\phi(e') = (\phi(c), \phi(d))$ буде вкладене на ручці h' , так, що з одного боку якого розташовано клітку s' з вершиною $\phi(a)$ на границі $\partial s'$, а з другого боку розташовано клітку s'' з вершиною $\phi(b)$ на $\partial s''$, де $\phi(e') \subset \partial s' \cap \partial s''$. Приклеїмо до цих кліток $\overline{s'} \cup \overline{s''}$ ленту Мебіуса та вкладемо ребро $f'(\phi(a), \phi(b))$ до $\overline{s'} \cup \overline{s''}$ не перетинаючи $f'(\phi(e'))$. Тим самим отримаємо вкладення графа G до поверхні N'' роду $\gamma(N'')$, $\gamma(N'') = (\gamma(N) - 2) + 1$, яке суперечить умові співвідношення 2, т. то припущення невірне. Доведення співвідношення 2 закінчене.

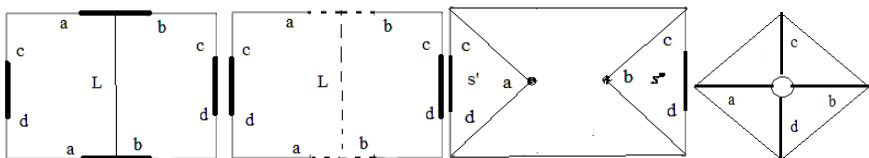


Рис. 2. Ілюструємо співвідношення 2 твердження 1.

Доведемо твердження 3. Припустимо, методом від протилежного, що деяким мінімальним вкладенням f графа G до неорієнтованої поверхні N із , принаймні, 2-ручкою R та лентою Мебіуса M , розташовані на границях деяких 2-кліток s_1, s_2 , де $s_1, s_2 \in S_G(N, f)$, три ребра e, e', e'' , де $e = (a, b), e' = (c, d)$, $e'' = (g, h)$, які розміщені на границі ∂s_1 в порядку $\phi(e), \phi(e')$, $\phi(e'')$, а на границі ∂s_2 в порядку $\phi(e), \phi(e''), \phi(e')$, де $\phi(e) = (\phi(a), \phi(b)), \phi(e') = (\phi(c), \phi(d)), \phi(e'') = (\phi(g), \phi(h))$, де ϕ - операція ототождження вершин та ребер на границях кліток, яка є оберненою до операції розбиття на клітки поверхні N мінімальним вкладенням f графа G . Тоді ребра $\phi(e), \phi(e')$ з $G^1 \cap (\partial s_1 \cup \partial s_2)$ мають розміщуватися на 2-ручці R , та на M ленті Мебіуса, на якій переставимо місцями кінцеві вершини (переве́рнемо ребро) $\phi(e)$. Розглянемо прості ланцюги L_1, L_2 , які

з'єднують середини ребер e, e' на клітках s_1, s_2 , відповідно, та утворюють простий цикл Z в результаті операції ототождження вершин та ребер на границях кліток s_1, s_2 . Видалимо ребра $\phi(e)$ та $\phi(e')$ та отримаємо вільну від ребер 2-ручку R . Видалимо простий цикл Z , т. то розріжемо 2-ручку R , причому не розділяємо поверхню N на дві частини. Отримаємо вкладення $f', f' = f|_{G \setminus \{e, e'\}}$, графа $G \setminus \{e, e'\}$ до неорієнтованої поверхні N' , утвореної з N шляхом видалення ручки R , де $\gamma(N') \leq \gamma(N) - 2$. Оскільки таке вкладення 2-клітковим, то розмістимо на ленті M ребро $f'(e'')$, яке, разом з вершинами видаленого ребра e' належатиме двом псевдокліткам на границях яких розділятимуть одна одну пари кінцевих вершин ребер e, e' . Продовжимо вкладення f' на ребра e, e' , які перехрещені на площинному диску, уникаючи перетину шляхом розташування їх на ленті M , де вже вкладено вершини ребра e'' . Тим самим отримаємо суперечність умові про мінімальність вкладення f графа G до неорієнтованої поверхні N , т. то припущення невірне. Доведення співвідношення 3 закінчене. Доведення твердження 1 закінчене.

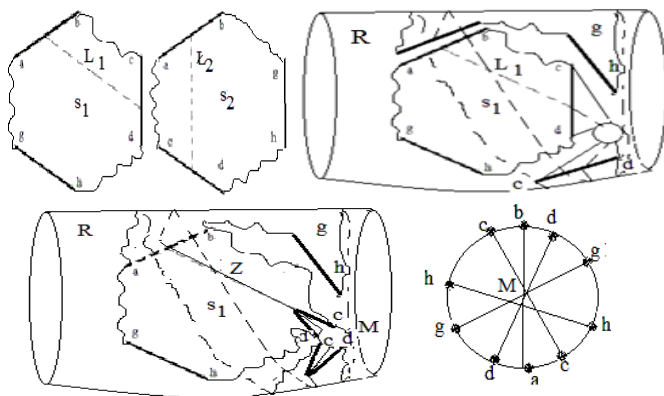


Рис. 3. Ілюструємо співвідношення 3 твердження 1.

Наслідок 1. Не мають місця співвідношення твердження 1 для орієнтованої поверхні.

Тому, що немає бодай одної ленти Мебіуса, необхідної в кожному із цих співвідношень.

Твердження 2. Мають місце наступні співвідношення:

1. Граф $G = K_6$, має на N_2 число досяжності множини вершин $t_G(K_6^0, N_2) = 2$ та не має вершини з подвійним доступом та кожне видалене ребро зменшує число $t_G(K_6^0, N_2)$;

2. Граф $G, G = K_5$, має на N_2 число досяжності множини вершин $t_G(G^0, N_2) = 1$ та дві вершини з двостороннім доступом, а граф $G, G = K_5 \setminus e$, має на N_2 три вершини з двостороннім доступом;

3. Граф $G, G = K_7$, має рід $\gamma(G) = 3$;

4. Граф $G, G = K_8 \setminus K_{1,2}$, має рід $\gamma(G) = 3$;

5. Граф $G, G = K_6 \setminus 2K_2$, має на N_2 число досяжності множини вершин $t_G(G^0, N_2) = 2$ та має вершину з подвійним доступом, а $G = K_6 \setminus 3K_2$ має на N_2 $t_G(G^0, N_2) = 2$ та має тільки одну вершину без подвійного доступу;

6. Множина вершин $K_{3,3}^0$ графа $K_{3,3}$ має кратний доступ і є досяжною відносно N_2 ;

Доведення проілюстровано на рис 4, де на перших двох картах зображено вкладення графа K_7 в N_3 , відповідно, побудовані як продовження вкладення f_6 графа K_6 в N_2 та вкладення f_5 графа K_5 в N_2 , причому синім кольором позначимо клітку з множини $N_2 \setminus f_5(K_5)$ на якій маємо подвійний доступ до вершин з підмножин $\{4\}, \{1\}$. На четвертій карті зображено мінімальне вкладення графа $K_8 \setminus K_{1,2}$ в N_4 . На п'ятій карті зображено вкладення графа K_6 в N_2 яке реалізує число $t_G(G^0, N_2) = 2$ та видно зменшення цього числа при видаленні ребра (3,5).

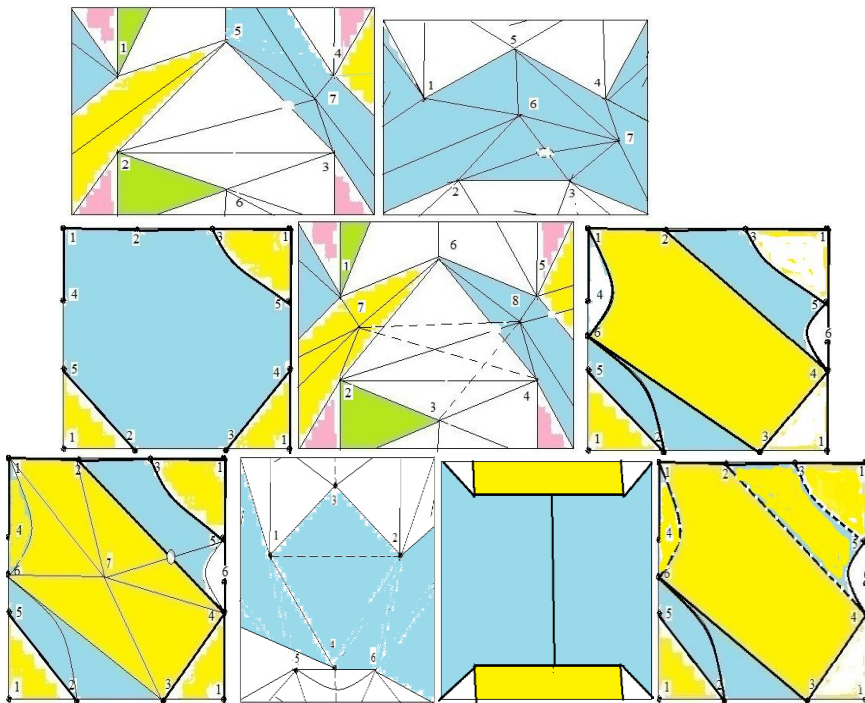


Рис. 4. На другій карті вершини 1,4 графа K_5 мають на N_2 двосторонній доступ, а на 3-й,5-й,6-й,8-й,9-й картах ребра позначені дугами та відрізками товстих ліній.

Твердження 3. Видалення довільної вершини v графа G_i , $G_1 = K_8 \setminus 4K_2^1$, $i = 1, 2$, $G_2 = K_8 \setminus (K_4^1 \setminus K_{1,2}^1)$, призводить до одного з наступних тверджень (в залежності від $\deg v$ та підмножини M складена з вершин інцидентних v та має число досяжності 2.

1) Множина вершин графа $G_1 = K_8 \setminus 4K_2^1$ має один клас еквівалентності, а множина вершин графа $G_2 = K_8 \setminus (K_4^1 \setminus K_{1,2}^1)$ розбивається на чотири класи еквівалентності відносно перестановки вершин одного й того ж степеня;

2) Для довільної $v \in G_1^0$ маємо, що $G_1 \setminus v = K_7 \setminus 3K_2$ і $M = K_6^0$, і множина M вершин графа $G_1 \setminus v$ матиме число досяжності 2, т. то розміщується на границях двох кліток s_1, s_2 ;

3) Для графа $G_2 = K_8 \setminus (K_4^1 \setminus K_{1,2}^1)$ маємо чотири випадки:

а) якщо $\deg v = 7$, то $G_2 \setminus v = K_7 \setminus (K_4^1 \setminus K_{1,2}^1)$, $M = K_7^0$;

б) якщо $\deg v = 6$, то $G_2 \setminus v = K_7 \setminus K_3^1$, $M = K_6^0$;

в) якщо $\deg v = 4$, то $G_2 \setminus v = K_7 \setminus e$, $M = K_4^0$;

д) якщо $\deg v = 5$, то $G_2 \setminus v = K_7 \setminus K_{1,2}^1$, $M = K_5^0$;

Доведення твердження 3 випливатиме із наведених на рис.5 карт вкладень графів $G_i \setminus v$, де $i=1,2$, в N_2 , а вершина v є представником класу еквівалентності.

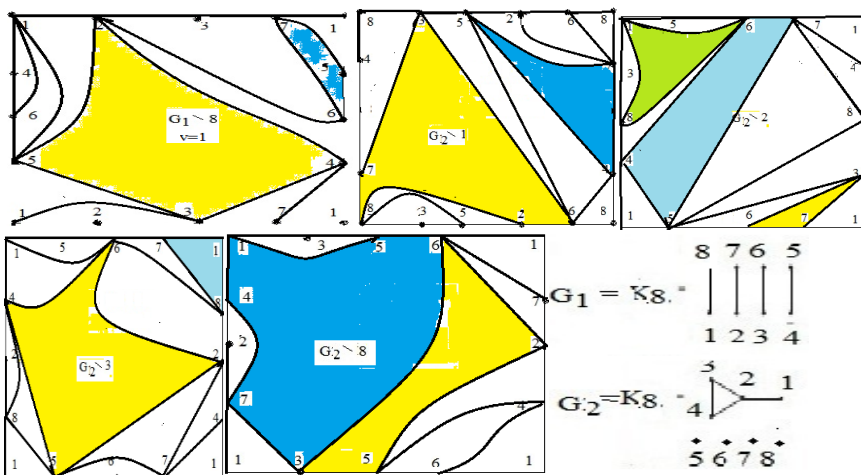


Рис. 5. Карти вкладень графів $G_i \setminus v$, де $i=1,2$, в N_2 -пляшку Клейна.

Твердження 4. Видалення довільної вершини v графів G_i , G_3 , $G_3 = K_8 \setminus 2K_3^1$, $G_4 = K_8 \setminus 2(K_5 \setminus K_4^1)$, де $i=3,4$, призводить до одного з наступних тверджень (в залежності від $\deg v$ та підмножини M , складеної з вершин інцидентних v , та числом досяжності 2 відносно N_2):

1). Множини вершин графів $G_3 = K_8 \setminus 2K_3^1$, $G_4 = K_8 \setminus 2(K_5 \setminus K_4^1)$ мають два класи еквівалентності відносно перестановки вершин одного й того степеня;

2) Для графа $G_3 = K_8 \setminus 2K_3^1$ маємо два випадки:

а) якщо $\deg v = 7$, то $G_3 \setminus v = K_7 \setminus 2K_3^1$, $M = K_7^0$;

б) якщо $\deg v = 6$, то $G_3 \setminus v = K_7 \setminus K_3^1$, $M = K_6^0$;

3) Для графа $G_4 = K_8 \setminus 2(K_{1,3}^1)$ маємо два випадки:

а) якщо $\deg v = 4$, то $G_4 \setminus v = K_7 \setminus K_{1,3}^1$, $M = K_4^0$;

б) якщо $\deg v = 6$, то $G_4 \setminus v = K_7 \setminus (K_{1,3}^1 \cup K_{1,2}^1)$, $M = K_7^0$.

Доведення твердження 3 випливатиме із наведених на рис.6 карт вкладень графів $G_i \setminus v$ в N_2 , а вершина v є представником класу еквівалентності графів G_i , де $i = 3, 4$.

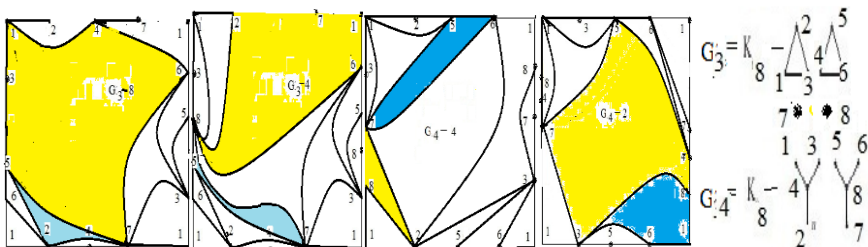


Рис. 6. Карти вкладень графів $G_i \setminus v$, де $i = 3, 4$, в N_2 - пляшку Клейна.

Твердження 5. Видалення довільної вершини v графа $G_5 = K_8 \setminus (K_{1,4}^1 \cup K_3^1)$, призводить до одного з наступних тверджень (в залежності від $\deg v$ та підмножини M , складеної з вершин інцидентних v , та числом досяжності 2 відносно N_2):

1) Множина вершин графа $G_5 = K_8 \setminus (K_{1,4}^1 \cup K_3^1)$, має три класи еквівалентності відносно перестановки вершин одного й того ж степеня;

2) Для графа $G_5 = K_8 \setminus (K_{1,4}^1 \cup K_3^1)$ маємо три випадки:

а) якщо $\deg v = 3$, то $G_5 \setminus v = K_7 \setminus K_3^1$, $M = K_3^0$;

б) якщо $\deg v = 5$, то $G_5 \setminus v = K_7 \setminus (K_{1,4}^1 \cup K_2^1)$, $M = K_5^0 \setminus K_{1,4}^1$;

в) якщо $\deg v = 6$, то $G_5 \setminus v = K_7 \setminus (K_{1,3}^1 \cup K_3^1)$, $M = K_7^0 \setminus (K_{1,3}^1 \cup K_3^1)$.

Доведення твердження 4 випливатиме із наведених на рис.7 карт вкладень графів $G_5 \setminus v$ в N_2 , а вершина $v \in \{8, 5, 1\}$ є представником класу еквівалентності

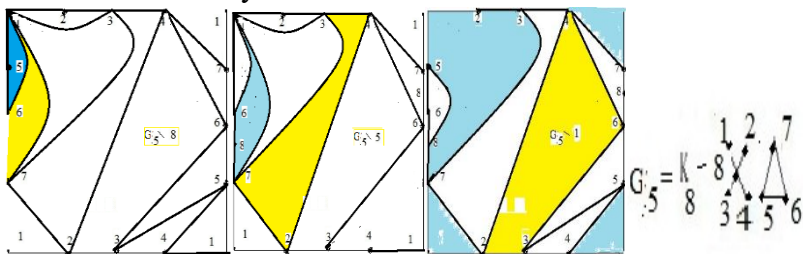


Рис. 4. Карти вкладень графів $G_5 \setminus v$ в N_2 - пляшку Клейна.

Теорема 1. Мають місце наступні твердження:

1) Мінімальні 7-ми вершинні підграфи п'яťох 8-ми вершинних графів-обструкцій G_i для поверхні Клейна ізоморфні наступним графам із заданими множинам точок приєднання, позначеними через M , матимуть вид: 1) $K_7 \setminus 3K_2$, $M = K_6^0$; 2) $K_7 \setminus (K_4^1 \setminus K_{1,2}^1)$, $M = K_7^0$; 3) $K_7 \setminus K_3^1$, $M = K_6^0$; 4) $K_7 \setminus e$, $M = K_4^0$; 5) $K_7 \setminus K_{1,2}^1$, $M = K_5^0$; 6) $K_7 \setminus 2K_3^1$, $M = K_7^0$; 7) $K_7 \setminus K_3^1$, $M = K_6^0$; 8) $K_7 \setminus K_{1,3}^1$, $M = K_4^0$; 9) $K_7 \setminus (K_{1,3}^1 \cup K_{1,2}^1)$, $M = K_7^0$; 10) $K_7 \setminus K_3^1$, $M = K_3^0$; 11) $K_7 \setminus (K_{1,4}^1 \cup K_2^1)$, $M = K_5^0$; 12) $K_7 \setminus (K_{1,3}^1 \cup K_3^1)$, $M = K_7^0$.

2) $(K_7 \setminus K_3^1, M = K_6^0)$, $(K_7 \setminus e, M = K_4^0)$, $(K_7 \setminus K_{1,2}^1, M = K_5^0)$, $(K_7 \setminus K_{1,3}^1, M = K_4^0)$;

3) Мінімальні 7-ми вершинні графи трьох 8-ми вершинних графів-обструкцій для тора є мінімальними 7-ми вершинними підграфами п'яťох 8-ми вершинних графів-обструкцій для поверхні Клейна, за винятком підграфів 3), 5) та 7).

Доведення. Із наведених тверджень 2,3,4 та 5 випливатиме наступний список 7-ми вершинних графів 8-ми вершинних графів-обструкцій для поверхні Клейна неорієнтованого роду 2 із заданими множинам точок приєднання, позначеними через M ,

до кожної з яких мають приєднуватися, шляхом ототодження пар вершин, по одній кінцевій вершини зірки $St_m(v)$, $m=|M|$, :

- 1) $K_7 \setminus 3K_2$, $M = K_6^0$; 2) $K_7 \setminus (K_4^1 \setminus K_{1,2}^1)$, $M = K_7^0$; 3) $K_7 \setminus K_3^1$, $M = K_6^0$; 4) $K_7 \setminus e$, $M = K_4^0$; 5) $K_7 \setminus K_{1,2}^1$, $M = K_5^0$; 6) $K_7 \setminus 2K_3^1$, $M = K_7^0$; 7) $K_7 \setminus K_3^1$, $M = K_6^0$; 8) $K_7 \setminus K_{1,3}^1$, $M = K_4^0$; 9) $K_7 \setminus (K_{1,3}^1 \cup K_{1,2}^1)$, $M = K_7^0$; 10) $K_7 \setminus K_3^1$, $M = K_3^0$; 11) $K_7 \setminus (K_{1,4}^1 \cup K_2^1)$, $M = K_5^0$; 12) $K_7 \setminus (K_{1,3}^1 \cup K_3^1)$, $M = K_7^0$.

Граф 3) є підграфом графа G_1 ізоморфним підграфу 7) графа G_3 та підграфу 10) графа G_5 , тому залишимо граф 3), а інші графи 7), 10) видалимо зі списку. Граф 1) є підграфом графа G_1 та містить підграф 6) графа G_3 , який в свою чергу містить підграф 4) графа G_2 , тому залишимо граф 4), а графи 6), 1) видалимо зі списку. Граф 8) є підграфом графа G_4 та має ізоморфний підграф у кожного з графів 2), 9), 11), 12), тому залишимо граф 8), а графи 2), 9), 11), 12) видалимо зі списку. Властивість 1) доведена. Властивість 2) випливає з того, що саме $K_7 \setminus K_3^1$, $K_7 \setminus e$, $K_7 \setminus K_{1,2}^1$, $K_7 \setminus K_{1,3}^1$ є підграфами чи частинами наведених вище графів. Доведемо властивість 3) шляхом порівняння списку мінімальних тороїдальних 7-ми вершинних графів, виписаних в [7], із наведеним вище. Для повноти наведемо список всіх мінімальних тороїдальних 7-ми вершинних графів ізоморфних наступним графам із заданими множинам точок приєднання, позначеними через M : 1. $K_7 \setminus e$,

$$M = K_7^0 \setminus \{a, b\}, \quad e = (a, b); \quad 3. \quad H_1,$$

$$\varphi(K_5 + K_4, ((a_1 + a_2), (b_1 + b_2))) \rightarrow (H_1, (a, b)), \quad M = H_1^0; 2. \quad K_7 \setminus K_3^1,$$

$$M = K_7^0; \quad 4. \quad H_2, \quad H_2 = K_7 \setminus K_{1,3}^1, \quad M = K_4^0; \quad 6. \quad K_7 \setminus 2K_2^1,$$

$$M = K_7^0 \setminus \{v, u\}; 5.$$

$$\varphi(K_5 + K_5, ((a_1 + a_2), (b_1 + b_2), (c_1 + c_2))) \rightarrow (H_3, (a, b, c)), \quad M = K_5^0,$$

$$\{a, b, c\} \subset M; 7. \quad K_7 \setminus (K_{1,2}^1 + K_2^1), \quad M = K_7^0 \setminus v; \quad 8. \quad K_7 \setminus 3K_2^1,$$

$M = K_7^0 \setminus v$, де H_1 є ϕ -образом графів K_5, K_4 із ототождженою парою ребер $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ (склеєними по ребру), граф H_2 є ϕ -образом графів K_6, K_4 при ототождженні пари простих циклів довжини 3, а граф H_3 є ϕ -образом двох графів K_5 , K_5 при ототождженні пари циклів C_1, C_2 довжини 3, (цикл C_i матиме вершини a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} , які попарно ототожнюються і утворюють цикл з вершинами a, b, c , $j = 1, 2, 3, i = 1, 2$), з іншого боку граф H_3 є $K_7 \setminus C_4^1$. Доведення теореми 1 закінчене.

Література

1. Хоменко М. П. ϕ -перетворення графів. Препринт ІМ НАНУ, Київ, 1971, 378с.
2. Хоменко М. П. Топологические аспекты теории графов. Препринт ИМ НАНУ, Киев, 197, 64с..
3. Archdeacon D., Huneke P., A Kuratowski Theorem for Nonorientable Surfaces, Journal of Combinatorial theory, Series B 46, 1989, p.173-231.
4. Cashy J., Irreducible graphs for the Klein bottle, Ohio State University Ph.D. Thesis, 2000.
5. Mohar B., Thomassen C., Graphs on Surfaces, Johns Hopkins University Press, 2001.
6. Suhkjin Hur. The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10, Phd, Ohio St University, 2008.
7. Петренюк В.І., Петренюк Д.А., Шуленок І.Е. Структура 7-ми вершинних графів-обструкцій для тора. Теорія оптимальних рішень. Інститут кібернетики НАНУ, 2017, с.92-101

ДОСЛІДЖЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ АЛГОРИТМУ ОМК ЗІ ЗБІЛЬШЕНИМ ОКОЛОМ МОЖЛИВИХ ПЕРЕХОДІВ

Рибальченко О.В.

Інститут Кібернетики НАН України

ANALYSIS OF EFFECTIVENESS OF ACO ALGORITHM WITH EXTENDED NEIGHBOURHOOD DEFINITION

Abstract. The formal statement and comparative study of the particular ACO-based algorithm is covered. The algorithm under examination involves extended neighbourhood definition to increase number of options considered on a single ant step. The metaheuristic algorithm for solving the problem have been developed and analyzed based on the results of computational experiment.

Вступ. Розглядається алгоритм оптимізації мурашиними колоніями зі збільшенням околом можливих переходів на кожному кроці. Даний алгоритм було запропоновано Л.Ф.Гуляницьким [2], подібний підхід застосовано також для задачі маршрутизації безпілотних літальних апаратів (UAVRP) [3] (що є розширенням задачі маршрутизації транспортних засобів). Метою публікації є дослідження ефективності реалізації такого підходу для задачі комівояжера на прикладі бібліотеки прикладних задач TSPLIB.

Задача комівояжера (англ. Travelling Salesman Problem, TSP) полягає у знаходженні найвигіднішого за визначеним критерієм маршруту, що проходить через вказані міста хоча б по одному разу. Зазвичай додається обмеження, що маршрут повинен проходити через кожне місто тільки один раз, в такому випадку розв'язок знаходиться серед гамільтонових циклів.

Загальна схема. Загальна схема алгоритму ОМК. Серед відомих алгоритмів ройового інтелекту (swarm intelligence) в комбінаторній оптимізації значного поширення набули алгоритми ОМК (ant colony optimization – ACO) [1]. Вони успішно застосовуються для розв'язування багатьох типів задач комбінаторної оптимізації, починаючи з класичної задачі комівояжера.

Основні компоненти обчислювальної схеми мурашиних алгоритмів такі:

- модель задачі, що подається спеціальним графом;

- феромонні значення;
- евристична інформація;
- пам'ять (локальна та глобальна).

В алгоритмах ОМК формується спеціальна модель задачі, що розв'язується, тому вони належать до класу моделє-орієнтованих методів [1]. Модель задачі комівояжера подається у вигляді зваженого графа $G(V, E)$, де $v_i \in V, i = 1, \dots, n + k$ – вершини, що відповідають компонентам розв'язку, а $e_{ij} \in E, e_{ij} = (v_i, v_j), v_i, v_j \in V$ – ребра, які відповідають можливим з'єднанням (переходам) між відповідними вершинами (містами). Для кожного ребра визначена функція вартості з'єднання, що відповідає відстані по поверхні між вершинами, з'єднаними даним ребром.

На кожному кроці алгоритму для будь-якої вершини $i \in V$ може бути побудована множина сусідніх вершин N_i .

Евристична інформація η_{ij} – це числове значення, що не залежить від знайдених на попередніх кроках розв'язків і відображає ступінь бажаності включення в побудований фрагмент розв'язку того чи іншого нового ребра графа моделі $e_{ij} \in E$. Евристичні значення η_{ij} базуються на апріорній інформації, що відображає умови конкретної задачі та надається джерелом, відмінним від мурах.

Рівень феромону (феромонний слід) – τ_{ij} , що відповідає ребру $e_{ij} \in E$, – це додатне число, яке показує, наскільки часто мурахами використовувалося це ребро на попередніх кроках чи при формуванні повного розв'язку. Феромонні сліди виконують роль довготривалої пам'яті для мурах щодо всього процесу пошуку [1].

Загальну обчислювальну схему алгоритмів ОМК можна подати так, як на рисунку 1 [4].

Двокроковий перехід. У розробленому алгоритмі в якості множини припустимих вершин (1*) обрано множину невідвіданих вершин, до яких одна з мурах зі своєї поточної позиції може дістатися не більше, ніж за два кроки [3].

```

procedure ACO (x)
  ініціалізація_алгоритму;
  while критерій_завершення_не_задоволений do
    формування_популяції_мурах;      {поточне покоління}
  foreach мураха_з_популяції do      {життєвий цикл мурахи}
    ініціалізація_мурахи;
    M = оновлення_пам'яті_мурахи;
    while поточний_стан ≠ повний_розв'язок do
      A = локальна_матриця_мурашиних_маршрутів;
      сформувати_множину_припустимих_вершин;      (1*)
      p = обчислити_ймовірність_переходів(A, M, Π);
      наступний_стан = правило_прийняття_рішення(p, Π);
      перейти_в_наступний_стан(наступний_стан);
      if онлайнове_покрокове_оновлення_феромону then
        відкласти_феромон_на_відвіданий_дузі;
        поновити_матрицю_мурашиних_маршрутів_А;
      endif
      M = оновити_внутрішній_стан;
    endwhile
    if онлайнове_відстрочене_оновлення_феромону then
      foreach відвіданої_дуги_побудованого_розв'язку do
        відкласти_феромон_на_відвіданий_дузі;
        оновити_матрицю_мурашиних_маршрутів_А;
      endforeach
    endif
    завершити_діяльність;
  endforeach
  випаровування_феромону;
  оновлення_рекорду(x);
  дії_Демона;      {необов'язково}      (2*)
endwhile
end

```

Рис. 1. Обчислювальна схема алгоритму ОМК

У даному дослідженні не використовуються методи коригування розв'язку, також відомі як дії демона. Зроблено це з метою якомога більш наочного спостереження впливу розширення околу при кожному переході на роботу алгоритму.

Спочатку для кожної мурахи k із популяції здійснюється формування підмножини припустимих вершин $N_i^k \subseteq N_i$ із множини вершин, сусідніх для тієї вершини $i \in V$, яка є останньою в поточному фрагменті маршруту. Отже, N_i^k є множиною можливих переходів за один крок для мурахи k з вершини i . Потім додатково будується D_i^k – множина точок, до яких можливий перехід у два кроки, тобто, всі невідвідані точки з можливістю прямого переходу від однієї з точок попередньої множини N_i^k

$$D_i^k = \bigcup_{s \in N_i^k} N_s^k. \quad (1)$$

Іншими словами, множина D_i^k є об'єднанням множин допустимих переходів для кожної з точок s з множини допустимих переходів для обраної вершини i та мурахи k .

Перехід k -ї мурахи з вершини i в j через вершину s на поточній ітерації t здійснюється з ймовірністю, що розраховується за наступною формулою:

$$p_{isj}^k = \frac{[\tau_{is}(t) \cdot \tau_{sj}(t)]^\alpha \cdot [\eta_{is}(t) \cdot \eta_{sj}(t)]^\beta}{\sum_{r \in N_i^k} [\tau_{ir}(t)]^\alpha \cdot [\eta_{ir}(t)]^\beta \cdot \sum_{r \in N_s^k} [\tau_{rj}(t)]^\alpha \cdot [\eta_{rj}(t)]^\beta}, \quad (2)$$

де $N_{ilj}^k = \{l : l \in N_i^k, j \in N_l^k\}$.

Формула (2) описує ймовірності для переходів через проміжну вершину, тобто, двокрокового алгоритму ОМК. Для прямих переходів до вершин з множини N_i^k застосовується наступна формула:

$$q_{ij}^k = \frac{[\tau_{ij}^\alpha(t) \cdot \eta_{ij}^b(t)]}{\sum_{r \in N_i^k} [\tau_{ir}^\alpha(t) \cdot \eta_{ir}^b(t)]}. \quad (3)$$

Вибір точки для наступного переходу здійснюється серед елементів множини $D_i^k \cup N_i^k$, тобто, може бути обрано як прямий, так і двокроковий перехід. Ймовірність кожного переходу для мурахи k з вершини i обчислюється як:

p_{isj}^k , $s \in N_i^k$, $j \in D_i^k$ для двокрокових переходів;

q_{ij}^k , $j \in N_i^k$ для прямих переходів.

Обчислювальний експеримент. Дослідження ефективності поданого підходу було проведено для задачі маршрутизації БПЛА і показало зменшення середньої відносної похибки з 6.63% до 0.93% [2]. Тим не менш, з урахуванням суттєвих особливостей задачі, доцільним є проведення дослідження впливу розширення околу на алгоритм для класичної задачі комівояжера.

Далі буде проведено порівняльний аналіз реалізації алгоритму ОМК з наступними розширеннями:

- Max-Min Ant System (MMAS), що передбачає обмеження нижньої та верхньої сили феромонного сліду;
- Elitist Ant System – тільки кращий мураха з кожної ітерації може оновити феромонний слід.

Виконання програми проводиться у два етапи:

- визначення найкращого набору параметрів на основі серії тестових запусків зі зменшеною кількістю мурах та ітерацій;
- запуск з обраним набором параметрів з обмеженням на кількість ітерацій без покращення існуючого результату.

Для обчислення відносної похибки ε використовується f^* – найменше відоме значення цільової функції для даної задачі ($f^* = 253,097$), а відносна похибка розв'язку обчислюється за формулою $\varepsilon = 100 \cdot (f - f^*) / f^*$.

У таблиці 1 наведено середні значення відносної похибки для запуску обох алгоритмів на прикладних задачах att48, berlin52, eil51, eil76, kroA100. Де n – кількість запусків, ε – середня відносна похибка.

Таблиця 1.

Результати роботи алгоритмів

Проблема	Алгоритм			
	З 2-кроковим переходом		З однокроковим переходом	
	ε , %	n	ε , %	n
att48.tsp	2.2	16	0.6	16
berlin52.tsp	3.7	16	3.1	16
eil51.tsp	2.9	16	2.1	16
eil76.tsp	5.0	16	4.6	16
kroA100.tsp	7.3	16	6.1	16
Середнє	4.22		3.3	

Висновок. Подана реалізація може бути покращена за допомогою введення детермінованого локального пошуку в якості демона, використання феромонного сліду більшої кількості мурах тощо. Проте, оскільки першочерговою метою є дослідження впливу двокрокового переходу на роботу алгоритму, реалізація з невеликою кількістю розширень дозволяє зосередитися на зазначених особливостях. Було проведено обчислювальний експеримент з окремими прикладними задачами з TSPLIB, середня відносна похибка становила **4.2%** для версії з двокроковим переходом і **3.3%** для версії з однокроковим.

На відміну від дослідження для UAVRP [2], введення двокрокового переходу у розглянутій реалізації не призвело до зменшення середньої відносної похибки.

Література

1. Dorigo M., Stützle T. Ant Colony Optimization: Overview and Recent Advances. In: Gendreau M., Potvin JY. (eds) Handbook of Metaheuristics. International Series in Operations Research & Management Science, vol 272. Springer, Cham, 2019
2. Гуляницький Л.Ф. Новий алгоритм оптимізації мурашиними колоніями. Пр. Міжн. конф., присвяченої 60-річчю заснування ІК ім.В.М.Глушкова НАН України "Сучасна інформатика: проблеми, досягнення та перспективи розвитку" (Київ, 13-15 грудня 2017). К.: ІК ім.В.М.Глушкова НАН України, 2017. С. 41-43.
3. Рибальченко О.В., Гуляницький Л.Ф. Формалізація та розв'язування одного типу задач маршрутизації БПЛА. Теорія оптимальних рішень, 2018.
4. Гуляницький Л.Ф., Мулеса О.Ю. Прикладні методи комбінаторної оптимізації. К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2016. 142 с.

КЛАСИФІКАЦІЯ ЛИВАРНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

Самарай В.П., Самарай Р.В.
НТУУ "КПІ ім.І.Сікорського"

Abstract. On the basis of production experience and scientific activity the classification of mathematical and simulation models for foundry production which allows to apply effectively all presented types of models for intensification, reduction in price, optimization of foundry production is offered.

У науковому, технологічному, економічному моделюванні ливарництва можна виділити 8 популярних і 12 рідкісних видів моделей для прогнозування, діагностики, керування, регулювання, аналізу, контролю, структурно-параметричної оптимізації:

Популярні математичні моделі ливарництва:

1.ЕКОНОМЕТРИЧНІ МОДЕЛІ або РЕГРЕСІЙНІ МОДЕЛІ.

2.ЕВРИСТИЧНІ МОДЕЛІ. Замість математичного розрахунку коефіцієнтів регресії на базі статистичних спостережень використовують оцінки відомих фахівців-експертів

3.МОДЕЛІ СИСТЕМ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ:

- СМО з бункером (обмеження розміру черги).
- СМО з відмовами (тимчасові відмови у постачанні).
- СМО з обмеженим часом очікування.
- СМО з необмеженим часом очікування.

В СМО завжди існує два види подій і відповідно два види черг:

- надходження замовлень.і виконання замовлень.

4.МОДЕЛІ ТЕОРІЇ ІГОР (КОНФЛІКТНИХ СИТУАЦІЙ).

Вони базуються на теорії ймовірностей і математичній статистиці.

Існують моделі макроекономіки і мікроекономіки: в мікроекономіці превалує *теорія конфліктних ситуацій(теорія ігор)*, тому що відбувається конкуренція, а в макроекономіці на рівні держави використовується *теорія* регулювання для всіх виробників для користі держави в цілому.

Як приклад прийняття рішення в теорії ігор – “гра з природою”. Наприклад: а)задача на випадковий брак виробництва – як “гра з природою”; б)співвідношення ярових та озимих культур у сільському господарстві при грі “з природою”.

Стратегія поведінки (дії) – це є найголовніше рішення (вибір однієї стратегії або декількох стратегій – змішана стратегія). Теорія ігор обов’язково приймає до уваги негативні наслідки прийняття рішення, бо вони завжди є для будь-якої стратегії поведінки.

5. ІМІТАЦІЙНІ МОДЕЛІ – є алгоритмом, комп’ютерною програмою, у якій можна реалізувати динамічність і стохастичність – головні ознаки і властивості складних моделей.

6. ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ (Л.Канторович,

В.Леонтьєв – нобелєвські лауреати СРСР й Данціг, Купманс, Дорфман - США):

Складаються з двох частин: Критерії оптимізації (цільова функція)

і система обмежень.

ЗАУВАЖЕННЯ ДО ОПТИМІЗАЦІЙНИХ МОДЕЛЕЙ.

Можливе графічне рішення оптимізаційних задач. Загальний вигляд оптимізаційної моделі, що складається з двох частин:

Цільова функція

$$\mathbf{F} = \mathbf{c}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{c}_2\mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{c}_n\mathbf{x}_n \rightarrow \text{Max (Min, CONST)} \quad (1)$$

Система обмежень (2)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq (=) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq (=) b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq (=) b_m \end{cases} \quad (2)$$

Напрями і приклади видів оптимізаційних моделей і задач:

6.1. Лінійне програмування (розподіл ресурсів або транспортна задача).

6.2. Нелінійне програмування (3) (наприклад, непряма лінійна задача призначена на посадку).

$$y = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_2^2 + \dots + a_{1n}x_n^2 \leq b_1 \quad (3)$$

6.3. Цілочисельне програмування (х – цілі значення).

6.4. Стохастичне програмування (вірогіднісні змінні).

6.5. Булеве (двійкове) програмування, коли змінні мають бути в межах **0 - 1**.

6.6. Параметричне програмування (коли існує кореляційний зв'язок між факторами).

6.7. Динамічне програмування (методи: модель Беллмана і модель Понтрягіна).

6.8. Дробово-лінійне програмування (4) (з'являється знаменник)

$$F = \frac{c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n}{z(d_1 + d_2 z)} \quad (4)$$

6.9. Багатокритеріальне програмування (в цьому випадку декілька критерій оптимізації).

6.10. Мережеве програмування:

6.10.1. Задача і модель на тах потік та \min переріз;

6.10.2. Мережева транспортна задача і модель;

6.10.3. Задача і модель на найкоротший шлях;

6.10.4. Задача і модель на найдовший шлях;

6.10.5. Задача і модель комівояжера;

6.10.6. Задача і модель звичайної транспортної задачі;

6.10.7. Задача і модель простої транспортної задачі на максимум;

6.10.8. Задача і модель на потік мінімальної вартості.

Мережеві моделі виокремлюються окремо - моделі теорії графів:

7.МОДЕЛІ ТЕОРІЇ ГРАФІВ

Зручним для практичного виробництва, наприклад для ливарництва є те, що на відміну від інших моделі теорії графів являють собою головну базу для рішення задач саме **структурної оптимізації**, мають математичний вигляд звичайних оптимізаційних моделей (пункт 6) і обов'язково представляються у вигляді графів для можливостей визначення, створення і розв'язання готових математичних моделей. Деякі інші оптимізаційні моделі теж можуть вирішувати задачі саме структурної оптимізації. Додатково для вирішення задач структурної оптимізації до моделей теорії графів додаються і інші графічні моделі – Когнітивні Моделі, інші Потоківі (Мережеві) Моделі, Мережі Петрі, Ланцюги Маркова, Алгоритми Імітаційних Моделей, Клітинні Автомати, Скінчені Автомати, Семантичні Мережі, граfi систем масового обслуговування (СМО), Фрактальні Моделі, Нейронні Мережі. Слід зазначити що названі моделі теорії графів спроможні вирішувати не тільки завдання структурної оптимізації, а й наряду з вище названими моделями спроможні вирішувати і задачі параметричної оптимізації.

8.МОДЕЛІ ТЕОРІЇ АВТОМАТИЧНОГО КЕРУВАННЯ

Моделі ТАУ разом з імітаційними моделями є найпотужнішими і володіють динамічними властивостями, яких

переважно не мають жодні інші моделі, окрім деяких моделей, що базуються на теорії графів (мережі Петрі). Найбільш потужним апаратом моделей ТАУ є передавальні функції (ПФ), перехідні характеристики (криві розгону). Для побудови і аналізу передавальних функцій ТАУ передбачає шість стандартних первинних сигналів: а)ступінчаста функція (“одиничний сигнал” або функція Хевісайда); б)імпульсний сигнал (функція Дірака); в) синусний сигнал; г) лінійний сигнал; д) сигнал “білий шум”; є) асимптотично наближаючийся сигнал (експонента).

Моделі ТАУ дозволяють побудувати три основні види замкнутих систем регулювання: а)з послідовним регулятором; б)з паралельним регулятором; в)з регулятором в ланцюзі зворотнього зв'язку з ланками будь-якого порядку і з функціями П-, Д-, І-, ПІ-, ПД-, ПІД-, ІД-регуляторів. Можлива побудова математичних моделей декількох видів: а)в просторі станів; б)у вигляді поліномів; в)у вигляді розкладання на множники (теореми Безу і Вієта, схема Горнера); г)у вигляді нулів і полюсів.

Рідкісні математичні моделі ливарництва:

9.Моделі теорії хаосу.

10.Моделі теорії катастроф.

11.Моделі часових рядів: а) ряди Фур'є; б) лагові, рекурентні моделі, рекурсії; в) вейвлети (Хаара, Габбара, ін.) .

12.Динамічні моделі: а)МАХ Понтрягіна; б)моделі Беллмана; в)диференціально-інтегральні моделі; г)операційний аналіз.

13.Моделі штучного інтелекту: а)експертні системи; б)нечітка логіка; в) нейронні мережі; г)моделі на генетичних алгоритмах; д)моделі на еволюційних алгоритмах; є)системи розпізнавання образів.

14.Схемотехнічне моделювання академіка Шимова.

15.Методи і моделі математичної статистики.

16.SWOP-аналіз.

17.Моделі на мові GPSS

18.Ігрові моделі IDEF, DFD, Case,CALS-технології.

19.Реологічні моделі.

20. Моделі SCADA – ERP систем.

Резюме: на основі виробничого досвіду і наукової діяльності запропонована класифікація математичних і імітаційних моделей для ливарного виробництва, яка дозволяє ефективно застосувати всі представлені види моделей для інтенсифікації, здешевлення, оптимізації ливарного виробництва.

МОДЕЛЬНИЙ АПАРАТ ОПТИМІЗАЦІЇ ЛИВАРНОГО ВИРОБНИЦТВА І ТЕОРІЯ ГРАФІВ

Самарай В.П., Самарай Р.В.
НТУУ “КПІ ім.І.Сікорського”

Abstract. An overview and analysis of the principles of application and properties of mathematical models in foundry production for integrated use at the stages of production preparation, in production, during quality control and at the stage of feedback on the regulation of technological parameters of foundry production.

Математичні моделі (ММ) можуть значно покращити, поживавити, прискорити, оптимізувати, здешевити всі процеси ливарного виробництва.

ММ є важливим важелем для правильної побудови ливарних процесів і на різних етапах підготовки виробництва і самого виробництва, і на різних переділах у різних дільницях і відділеннях ливарництва, і можуть бути застосовані до різних систем автоматизації і комп'ютеризації сучасного рівня. Вони можуть сприяти і реалізувати організацію розрахунків, адекватного проектування, моделювання, прогнозування, оптимізації, контролю, діагностики, керування, регулювання, аналізу. Сфера застосування торкається одночасно і виробничих питань, і питань якості продукції. Ідеальним варіантом залучення і впровадження математичних і імітаційних моделей є одночасне застосування всіх можливих методів системного аналізу (СА), кібернетики, теорії моделювання і для підготовки виробництва, і для власно

виробничого процесу, і для контролю якості виробництва з можливістю з'ясування взаємовпливів, визначення і побудови всіх можливих аналітичних, часових, графічних взаємозалежностей з метою якнайшвидше реагувати на вихід процесів за межі регулювання і управління, за межі контрольованих технологічних параметрів, за технологічні допуски і дозволені межі всіх можливих дефектів виробів.

З метою ефективного виведення виробництва на сучасний рівень і його значного покращення слід чітко визначити корисні теоретичні і практичні сучасні напрями і чітку класифікацію застосованих моделей і методів моделювання. Не слід забувати, що моделі і методи типів “білої скрині” і “чорної скрині” чудово доповнюють одне одного, таким чином набувають властивостей моделей типу “сіра скриня” і їх симбіоз здатен виявляти різні рівні емерджентностей різних систем на рівнях і етапах підготовки виробництва, власно виробництва, контролю якості продукції, на етапі реагування на рівень відповідності якості, на дефекти і брак виробництва (через відсоток браку за кожним дефектом) через зворотній зв'язок. Мають бути забезпечені всі можливості для одночасного постійного моніторингу і технологічних параметрів (!), і статистики всіх дефектів виливків (!) і браку (!) виробництва з метою пов'язати їх між собою у вигляді різноманітних математичних, графічних, імітаційних моделей і залежностей (у найпростішому випадку наприклад, як парні і множинні регресійні моделі лінійного або нелінійного типу, динамічні або статичні, ймовірнісні або детерміновані).

За характером часової залежності – найбільш застосовані моделі **статичні**, у яких усі залежності стосуються одного моменту чи періоду часу, рідше застосовані моделі **динамічні**, у яких відображається процес зміни об'єкта в часі і в яких задачі розв'язують кількома етапами, причому результат на кожному з них залежить від функції та розв'язків, прийнятих на попередніх етапах.

За характером відображення причинно-наслідкових зв'язків моделі технологічних і економічних процесів можна поділити на **детерміновані**, у яких виходи однозначно

визначаються звичайною множиною входів (факторів, параметрів), а саму модель можна подати як деяку функцію не випадкових параметрів і змінних, і, навпаки, **ймовірнісні моделі**, які відзначаються тим, що умови функціонування і характеристики станів змодельованого об'єкта є випадковими величинами і пов'язані між собою випадковими залежностями за рахунок введення так званого фактору невизначеності.

За співвідношенням вхідних (екзогенних) і вихідних (ендогенних) параметрів розрізняють моделі **закриті і відкриті**; за характером взаємозв'язків між параметрами - **лінійні і нелінійні**; за ступенем структуризації технологічних і господарських процесів - **одно- і багатопродуктові, одно- і багатогалузеві**; за характером вимог до результатів розв'язування задач - **балансові й оптимізаційні**; за глибиною часового обрію - **довгострокового прогнозування, перспективні й поточні**; за ступенем повноти охоплення економічного об'єкта - **макро- та мікромоделі**.

Математична модель може охоплювати всі можливі технологічні або економічні процеси і виробництва, їхню частину або лише один, досить відокремлений процес (виробництво, підрозділ, переділ, окреме обладнання, окрема ланка процесу, окремий контур регулювання, окремий контур керування, окремий контур контролю, окремий колектив, окреме оснащення, окремий технологічний процес, окремий якісний контроль).

За специфікою застосовуваних методів аналізу і моделей кібернетики, системного аналізу, теорії моделювання і задач дослідження операцій у ливарництві їх можна поділити на: балансові, кореляційні та регресійні, умовної оптимізації (лінійні та нелінійні, детерміновані та стохастичні, статичні та динамічні), теорії масового обслуговування, запасів, ігор, статистичних рішень, інформації, заміни обладнання, теорії графів, імітаційні і інші.

Така класифікація і бачення загальної сукупності моделей і методів моделювання допомагає чітко розмежувати різноманітні технологічні, економічні процеси і їх специфіку, мету моделювання, моделі, які використовують, і методи їх

дослідження і в той самій час найбільш повно і комплексно використати всі переваги кожної моделі і кожного науково-технологічного підходу.

Математичний апарат теорії моделювання, системного аналізу, кібернетики і сучасна обчислювальна техніка сприяють значному підвищенню конкурентоздатності продукції і самого виробництва, якості виробів, наукового рівня наукових, технологічних або економічних досліджень на виробництві, вірогідності отримання адекватності і правильності отриманих висновків, ефективності прийнятих рішень і розв'язків поставлених виробничих, технологічних, економічних, фінансових, організаційних, кадрових і наукових завдань і задач.

Таким чином, в науковому, технологічному і економічному моделюванні ливарництва можна виділити 8 основних найбільш застосованих і 12 додаткових менш застосованих видів моделей для прогнозування, діагностики, керування, регулювання, аналізу, контролю і для структурно-параметричної оптимізації процесів ливарного виробництва.

Зручним для практичного виробництва, наприклад для ливарництва є те, що на відміну від інших моделі теорії графів являють собою головну базу для рішення задач саме **структурної оптимізації**, частина з них (потоківі або мережеві моделі математичного програмування) мають математичний вигляд звичайних оптимізаційних моделей (моделей математичного програмування) і обов'язково представляються у вигляді графів для можливостей визначення, створення і розв'язання готових математичних моделей. Деякі інші оптимізаційні моделі теж можуть вирішувати задачі саме структурної оптимізації. Додатково для вирішення задач структурної оптимізації до моделей теорії графів додаються і інші графічні моделі – Когнітивні Моделі, інші Потоківі (Мережеві) Моделі, Мережі Петрі, Ланцюги Маркова, Алгоритми Імітаційних Моделей, Клітинні Автомати, Скінчені Автомати, Семантичні Мережі, графи систем масового обслуговування (СМО), Фрактальні Моделі, Нейронні Мережі. Частина з моделей, що базуються на теорії графів, набувають потужних динамічних властивостей, що є величезною

перевагою перед іншими моделями. Слід зазначити що названі моделі теорії графів спроможні вирішувати не тільки завдання структурної оптимізації, а й наряду з вище названими моделями спроможні вирішувати і задачі параметричної оптимізації.

Таким чином для рішення задач саме моделювання в просторі і структурної оптимізації найбільше пристосовані методи і моделі теорії графів, деякі з яких можуть відтворювати динамічні просторові процеси. Для рішення задач саме параметричної оптимізації більше пристосовані всі інші різноманітні види моделей. І ті і інші види моделей мають застосовуватися на всіх ланках ливарництва.

Резюме: Представлено огляд і аналіз принципів застосування і властивостей математичних моделей у ливарному виробництві задля комплексного використання на етапах підготовки виробництва, у виробництві, під час контролю якості і на етапі зворотнього зв'язку з регулювання технологічних параметрів ливарного виробництва.

ПРОЦЕДУРНАЯ ГЕНЕРАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПЛАНАРНЫХ ГРАФОВ

Сгадов С.А.

Национальный университет "Запорожская политехника"

PROCEDURAL GENERATION OF RANDOM PLANAR GRAPHS

Abstract. This paper presents a simple algorithm for generating a family of random planar graphs based on a rectangular triangulated graph. The algorithm is based on the principle of removing random edges.

При тестировании программ, которые реализуют алгоритмы на графах [1],[2], часто встает проблема генерации графов, обладающих определенными свойствами. В этом смысле большой интерес представляют графы, которые могут быть уложены на плоскость без пересечения ребер (планарные).

Целью данной работы является алгоритм процедурной генерации случайного планарного графа без "висячих" вершин, петель. Для простоты не будем требовать, чтобы полученный граф был односвязным, также предположим, что задано наперед число вершин $N \geq 4$ (N – составное).

Автором предлагается следующий алгоритм:

1. Создание начального триангулированного графа.

Представим, что вершина графа образует сетку K на M ($K \cdot M = N$), где K и M – произвольные числа ≥ 2 , являющиеся делителями N . Соединим вершины ребрами, чтобы получился триангулированный треугольник (при этом можно каждый квадрат триангулировать случайным образом) (рис. 1).

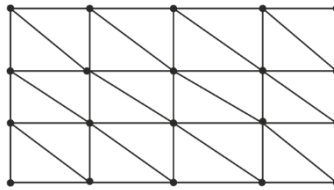


Рис.1. Пример исходного графа G^0

Получившуюся фигуру рассмотрим как укладку плоского графа G^0 . Очевидно, что если есть необходимость получить рисунок, то имеет смысл задавать вершинам координаты, тогда это позволит легко получать рисунки случайных плоских графов. Но для данного алгоритма геометризацию графа не имеет значения, так как все операции можно проводить, например, над матрицей смежности графа. Основным смысл получившегося шага – создать планарный граф на N -вершинах с большим количеством ребер L .

2. Составим список ребер E_i , $1 \leq i \leq L$.

3. Возьмем случайное целое $n \sim L^{y^0}_{max}$, где $L^{y^0}_{max}$ – максимальное количество удаляемых ребер.

4. n раз повторим следующую процедуру:

возьмем случайное ребро E_j . По матрице смежности проверим валентность инцидентных вершин с E_j , и если хоть одна из них имеет валентность 1, – берем другое случайное ребро;

если сделано L безуспешных попыток найти такое ребро, то алгоритм окончен;

найденное ребро исключаем из графа.

После того как мы удалим случайное количество случайных ребер из планарного графа G^0 мы получили случайный граф G_i , который являясь суграфом G^0 является также планарным. на этапе 4 можно также проверить не приводит ли удаление ребра E_j к нарушению связности или выдвинуть другие условия к валентности вершин (например ограничить валентность вершин каким-либо способом).

Таким образом, получен алгоритм, который генерирует случайный граф с N вершинами. Если сохранить данные исходного графа G^0 в памяти, то можно генерировать 2^L случайных суграфа G^0_i . Если закодировать удаляемые/присутствующие ребра двоичным методом из L -элементов, то каждый суграф G^0_i будет характеризоваться единственным двоичным числом относительно графа G^0 . Алгоритм не лишен недостатков: получаемые случайные графы будут часто иметь много граней-треугольников. После удаления очередного ребра, может быть необходимо проверять свойства суграфа, например, связность. При слишком большом количестве удаляемых ребер, граф может превратиться в дерево.

Литература

1. Курапов С.В., Давидовский М.В. Алгоритмы построения топологического и геометрического рисунков графа СЭП // Компоненты и Технологии. - № 6 - 2017. – С.128-132.

2. Курапов С. В. , Давидовский М. В. , “Проверка планарности и построение топологического рисунка плоского графа (поиском в глубину)”, *ПДМ*, 2016, № 2(32), 100–114

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПРЫГАЮЩИХ ЛЯГУШЕК ДЛЯ ЗАДАЧИ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОИЗВОДСТВА

Селютин Е.К.

Запорожский национальный университет

APPLICATION OF THE JUMPING FROG METHOD FOR THE PROBLEM OF PRODUCTION PLACING

Abstract. The problem of placing production with restrictions on production volumes is considered. To search for suboptimal solutions to the problem, an algorithm is proposed based on the method of mixed jumping frogs.

Задача размещения производства является одной из наиболее актуальных задач оптимизации. Она встречается в виде задачи выбора оптимального ряда изделий одноразового использования, стандартизации и унификации, оптимизации параметров однородной технической системы, размещения филиалов банка или складов, задачи формирования сетей обслуживания и так далее.

Пусть множество $I = \{1, \dots, I\}$ задает номера возможных пунктов размещения предприятий по производству некоторого однородного продукта. Для каждого из пунктов $i \in I$ определена величина $c_i \geq 0$ затрат на открытие предприятия. Открытое предприятие может производить продукцию для потребителей в необходимом количестве.

Перечень потребителей задается множеством $J = \{1, \dots, J\}$. Для каждой пар ij известна величина $g_{ij} \geq 0$ затрат на производство и доставку продукции из пункта i потребителю с номером j . Задача состоит в том, чтобы найти такое подмножество номеров $S \in I, S \neq \emptyset$ и определить связи между предприятиями с этими номерами и потребителями, при которых затраты на создание соответствующих предприятий и обслуживание потребителей будут минимальны. С использованием введенных обозначений оптимизационная постановка задачи может быть записана следующим образом:

$$(S) = \sum_{i \in S} c_i + \sum_{j \in J} \min_{i \in S} g_{ij} \rightarrow \min_{S \in I}$$

Сформулированная задача является обобщением известной задачи о покрытии множествами [1] и, следовательно, относится к числу *NP*-трудных задач в сильном смысле. Для решения простейшей задачи размещения разработаны точные алгоритмы, приближенные алгоритмы с гарантированными оценками точности, разного рода эвристические алгоритмы. Исследованы полиномиально разрешимые классы задач. Однако в общем случае задача до сих пор остается интересной как для теоретического исследования, так и для многочисленных практических приложений.

Задача размещения с ограничениями на мощности предприятий является обобщением простейшей задачи размещения. В отличие от последней в ней предполагается, что каждое предприятие может производить продукцию только в ограниченных количествах. Такое естественное и важное предположение слегка меняет математическую модель и сильно усложняет методы решения оптимизационной задачи.

Приведем математическую постановку задачи в терминах целочисленного линейного программирования. Пусть множество $I = \{1, \dots, I\}$ задает перечень возможных пунктов размещения предприятий по производству некоторого однородного продукта. Величина $c_j \geq 0$ задает стоимость открытия предприятия в пункте $i \in I$, а величина $V_i \geq 0$ определяет максимально возможный объем производства в данном пункте.

Перечень потребителей задается множеством $J = \{1, \dots, J\}$. Для каждой пары ij известна величина $g_{ij} \geq 0$ затрат на производство и доставку продукции потребителю, а также величина $p_{ij} \geq 0$ — объем продукции i -го предприятия, необходимый для удовлетворения потребностей j -го потребителя.

Введем следующие переменные:

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{если соответствующее предприятие открыто} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если предприятие } i \text{ обслуживает потребителя } j \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

С использованием введенных обозначений оптимизационная постановка задачи записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \min \{ & \sum_{i \in I} c_i y_i + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} g_{ij} x_{ij} \} \\ & \sum_{i \in I} x_{ij} = 1, j \in J, \\ & \sum_{j \in J} p_{ij} x_{ij} \leq V_i y_i, i \in I, \\ & x_{ij}, y_{ij} \in \{0, 1\}, i \in I, j \in J \end{aligned}$$

Целевая функция имеет смысл суммарных затрат на открытие предприятий и обслуживание потребителей. Первое ограничение требует удовлетворения потребностей всех потребителей. Второе ограничение несет сразу две функции. Оно позволяет обслуживать потребителей только с открытых предприятий, а также ограничивает сверху возможные объемы поставок продукции с каждого предприятия.

Для отыскания субоптимальных решений этой задачи предложена метаэвристика на основе алгоритма перемешанных прыгающих лягушек (АПР). Каждому допустимому размещению соответствует элемент базового множества, который условно будем называть «лягушкой». Вся популяция лягушек делится на несколько групп или мемплексов, соответствующих различным вариантам размещения производства. После поиска в каждом мемплексе лягушки из всех мемплексов перераспределяются, формируя новые мемплексы, что уменьшает шансы попадания в локальный оптимум [3, 4]. Алгоритм прост для понимания и реализации, имеет небольшое количество параметров, успешно применялся для решения задач комбинаторной и непрерывной оптимизации [5].

Суть алгоритма прыгающих лягушек для решения задачи размещения производства сводится к следующей последовательности.

Шаг 0. Определить численный критерий качества классификации.

Шаг 1. Инициализировать популяцию лягушек, как множество точек некоторого дискретного пространства с заданной метрикой.

Шаг 2. Вычислить значение функции качества каждого решения.

Шаг 3. Упорядочить решения в порядке убывания значения функции качества.

Шаг 4. Разделить виртуальных лягушек (решения) на мемплексы таким образом, что первая в отсортированном списке виртуальная лягушка попадает в первый мемплекс, вторая заносится во второй мемплекс.

Шаг 5. Так продолжается пока все лягушки не будут распределены в указанное количество мемплексов.

Шаг 6. В каждом мемплексе найти лучшее и худшее решение.

Шаг 7. Попытаться улучшить положение худшей виртуальной лягушки путем случайного перемещения ее в направлении лучшей лягушки.

Шаг 8. Если предыдущая операция не улучшает решение, то попытаться улучшить положение худшей виртуальной лягушки путем перемещения ее в направлении глобально лучшей лягушки.

Шаг 9. Если и последняя операция не приводит к улучшению позиции виртуальной лягушки, то взамен ее случайным образом создать в области поиска новую лягушку.

Шаг 10. Объединить виртуальных лягушек всех мемплексов в одну группу.

Шаг 11. Если условия завершения алгоритма не выполнены, то – переход к Шагу 3.

Шаг 12. Последняя глобально лучшая виртуальная лягушка соответствует субоптимальному решению задачи.

Литература

1. Береснев В.Л., Гимади Э.Х., Дементьев В.Т. Экстремальные задачи стандартизации. Новосибирск: Наука, 1978.

2. Diaz J.A., Fernandez E. Column generation for the single source capacitated plant location problem. Technical report DR 2000/17, UPC Barcelona, 2000.

3. Eusuff M. M. Optimization of water distribution network design using the shuffled frog leaping algorithm. Water Resour. Plann. Manag. 2003. Vol.129. P. 210-225.

4. Eusuff M. M. Shuffled frog-leaping algorithm: a memetic meta heuristic for discrete optimization. Engineering Optimization. 2006. Vol. 38(2). P. 129-154.

5. Wang L. Diversity Analysis of Population in Shuffled Frog Leaping Algorithm. ICSI 2013, Part I, LNCS 7928. Springer, 2013. P. 24-31.

СУПЕР ФИБОНАЧЧИ ГРАЦИОЗНАЯ РАЗМЕТКА ЭЙЛЕРОВЫХ ГРАФОВ

Семенюта М.Ф.

Летняя академия НАУ

SUPER FIBONACCI GRACEFUL LABELING OF EULERIAN GRAPHS

Abstract. We found the necessary and sufficient conditions for the existence of a super Fibonacci graceful labeling of a cycle C_n , and also solved the problem of constructive enumeration for C_n . We determined the structures of Euler super Fibonacci graceful graphs.

Под оптимальной нумерацией (или разметкой) конечного неориентированного графа понимают присвоение номеров его вершинам таким образом, чтобы сумма модулей разностей между номерами смежных вершин была минимальной. Задача построения такой нумерации относится к задачам комбинаторной оптимизации и для произвольного графа является NP-трудной. Интерес вызывают различные варианты оптимальной нумерации. Среди них грациозная разметка, предложенная А. Роса. Инъективную функцию

$f: V \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, q\}$ считают *грациозной разметкой* графа $G = (V, E)$ размера q , если она индуцирует такую реберную разметку $f^*: E \rightarrow \{1, 2, 3, \dots, q\}$, что f^* — биекция и $f^*(uv) = |f(u) - f(v)|$ для любых смежных вершин $u, v \in V$.

Граф G — *грациозный*, если он допускает грациозную разметку. Больше информации по этому вопросу можно найти в [1]. Естественным продолжением идеи грациозности графа $G = (V, E)$ является случай, когда реберная разметка представляет собой биекцию из множества ребер на первые $|E|$ чисел произвольной последовательности $\{a_i\}$. Интерес вызывают структурные свойства графов, для которых эта последовательность состоит из чисел ряда Фибоначчи.

Определение 1. Функцию f назовем *супер Фибоначчи грациозной разметкой* графа G размера q , если f — инъекция из $V(G)$ в множество $\{F_0, F_1, F_2, F_3, \dots, F_q\}$, где $F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, \dots, F_q = F_{q-2} + F_{q-1}$, а порожденная ею реберная разметка $f^*(u, v) = |f(u) - f(v)|$, где $(u, v) \in E(G)$, есть биекция из $E(G)$ на множество $\{F_1, F_2, F_3, \dots, F_q\}$. Граф, допускающий такую разметку f , назовем *супер Фибоначчи грациозным*. В случае супер Фибоначчи грациозного дерева функция f — биективная.

Аналогичный термин впервые появился в работе [2], где ряд Фибоначчи состоит из различных чисел $F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 3, F_4 = 5, F_5 = 8, \dots$. В соответствии с этой терминологией С. Вайдья и В. Праджапати исследовали одноточечное соединение двух циклов C_{3m} и C_{3n} , а также k циклов C_n [2], Р. Шридеви и др. — графы $F_n \oplus K_{1,m}^+, C_n \oplus P_m, K_{1,n} \oslash K_{1,2}, F_n \oplus P_m, C_n \oplus K_{1,m}, F_n^t, S_{m,n}^t$ [3].

Некоторые, так называемые специальные графы, имеют название и обозначения. В данной работе — это цикл C_n . Цикл C_n ($n \geq 3$) представляет собой граф порядка n , для которого

множество ребер имеет вид
 $E = \{(u_1, u_n) \cup (u_i, u_{i+1}) : i = 1, 2, \dots, n-1\}$, где u_1, u_2, \dots, u_n – вершины C_n .

Следующие две теоремы демонстрируют связь графов циклической структуры с рекуррентным способом задания чисел Фибоначчи.

Теорема 1. Цикл C_n – супер Фибоначчи грациозный граф тогда и только тогда, когда $n \equiv 0 \pmod{3}$.

Следствие. Для цикла C_n число неэквивалентных супер Фибоначчи грациозных разметок равно единице.

Теорема 2. Пусть граф $G = (V, E)$ размера q имеет супер Фибоначчи грациозную разметку и цикл C_n является порожденным подграфом G с $n < q$. Если C_n не содержит вершину с меткой 0, то $n = 3$.

Далее описаны графы, которые используются при определении структуры эйлеровых графов, допускающих супер Фибоначчи грациозную разметку.

Пусть G_1, G_2, \dots, G_k , где $k \geq 2$ – связные графы. В каждом из них, произвольным образом, выбираем вершину $u_i \in V(G_i)$, $i = 1, 2, \dots, k$. *Одно-точечным соединением* графов G_1, G_2, \dots, G_k называется граф, полученный отождествлением вершин u_i для всех $i = 1, 2, \dots, k$.

Пусть задано k циклов $C_{n_1}, C_{n_2}, \dots, C_{n_k}$ ($k \geq 2$) и, произвольным образом, выбраны две вершины $u_i, v_i \in V(C_{n_i})$, где $u_i \neq v_i$, $i = 1, 2, \dots, k$. Граф, полученный отождествлением вершины v_i цикла C_{n_i} с вершиной u_{i+1} цикла $C_{n_{i+1}}$ для всех $i = 1, 2, \dots, k-1$ назовем *цепным соединением* циклов. Если все циклы имеют порядок 3, то цепное соединение таких циклов называют *треугольной змеей* из k звеньев.

О. Веблен получил результаты относительно представления конечного графа четной степени в виде объединения

непересекающихся циклов. Но в случае связности такого графа он будет эйлеровым. Кроме того, в терминах циклических структур Ш. Тойда предложил необходимое, а Т. Макки – достаточное условия существования эйлеровых графов. Все эти свойства графов можно сформулировать так: нетривиальный связный граф G является эйлеровым тогда и только тогда, когда G разложим в попарно пореберно-непересекающиеся циклы, такие что каждое ребро G принадлежит одному из этих циклов; нетривиальный связный граф G эйлеров тогда и только тогда, когда каждое его ребро принадлежит нечетному числу циклов [4]. Эти характеристики эйлеровых графов применяются для доказательства теоремы 3.

Теорема 3. Если эйлеров граф $G=(V, E)$ размера n допускает супер Фибоначчи грациозную разметку, тогда G изоморфен одному из графов

- циклу размера n , где $n \equiv 0(\text{mod } 3)$;
- одно-точечному соединению циклов, порядок каждого из которых равен числу, кратному 3;
- треугольной змее из 3-х или 4-х звеньев;
- цепному соединению 3-х циклов C_{m_1} , C_{m_2} и C_{m_3} , где $m_1 = m_2 = 3$, $m_3 \equiv 0(\text{mod } 3)$ с вершиной v , общей для C_{m_1} , C_{m_2} , и u – для C_{m_2} , C_{m_3} ;
- цепному соединению 3-х циклов C_{m_1} , C_{m_2} и C_{m_3} , где $m_1 = m_3 = 3$, $m_2 \equiv 0(\text{mod } 3)$ с вершиной u , общей для C_{m_1} , C_{m_2} и v – для C_{m_2} , C_{m_3} .

Литература

1. Gallian J. A. A dynamic survey of graph labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics*. 2019. DS6: Dec 15. 535 p. DOI: <https://doi.org/10.37236/27>
2. Vaidya S. K, Prajapati U. M. Fibonacci and super Fibonacci graceful labeling of some cycle related graphs. // *International Journal of Mathematical Combinatorics*. 2011. Vol. 4. P. 56-69.

3. Sridevi R., Navaneethakrishnan S., Nagarajan K. Super Fibonacci graceful labeling. *International Journal of Mathematical Combinatorics*. 2010. Vol. 3. P. 22–40.

4. Chartrand G., Lesniak L., Zhang P. Graphs and Digraphs. – 6th Ed. / CRC Press, Taylor & Francis Group. – Textbooks in mathematics, 2015. 640 p.

МАССИВ КОЦИГА И МАГИЧЕСКАЯ РАЗМЕТКА ГРАФА

Семенюта М.Ф., Айвазян Э.И., Микаелян Г.С.

*Летняя академия НАУ,
Еркванский государственный университет,
Армянский государственный педагогический
университет им. Х. Абовяна*

KOTZIG ARRAY AND MAGIC LABELING OF GRAPH

Abstract. We presented a method for constructing a distance magic graph using the Kotsig arrays.

Массив Коцига и его разновидности часто применяются при решении задачи построения различных типов магических разметок графов. В данной работе остановимся на дистанционной магической разметки регулярных графов. М. Миллер и др. в работе [1] ввели понятие 1-вершинно-магической вершинной разметки. Авторы [2] для этой разметки предложили термин «дистанционная магическая». В большинстве статей используется терминология из [2].

Пусть $G=(V, E)$ – конечный неориентированный граф без кратных ребер и петель. Дистанционной магической разметкой графа G порядка n называется биекция $f: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, для которой существует такое натуральное число k , что для каждой вершины u верно равенство $k = \sum_{v \in N(u)} f(v)$, где $N(u)$ – множество

вершин графа G смежных с u . Постоянную k называют *магической постоянной разметки* f , а граф, допускающий такую разметку, – *дистанционным магическим*.

Под массивом Коцига $KA(a, b)$ понимают $a \times b$ матрицу у которой каждая строка представляет собой перестановку чисел $0, 1, 2, \dots, b-1$ и сумма элементов каждого столбца равна одному и тому же числу $\frac{1}{2}a(b+1)$.

Этот термин был введен Э. Марр и У. Уоллисом [3] на основе статьи А. Коцига [4].

Теорема [3]. Массив Коцига $KA(a, b)$ существует тогда и только тогда, когда $a > 1$ и $a(b-1)$ – четное.

Поднятым массивом Коцига $LKA(a, b, l)$ называют $a \times b$ матрицу с элементами $f_{ij} = e_{ij} + (i-1)b + l$, где e_{ij} – элемент i -ой строки и j -го столбца в соответствующем массиве Коцига $KA(a, b)$. Сумма каждого столбца в $LKA(a, b, l)$ равна $\sigma(a, b, l) = \frac{1}{2}a(ab + 2l + 1)$.

Для графов $G_1=(V_1, E_1)$ и $G_2=(V_2, E_2)$ введем понятие композиции, или другими словами, лексикографического произведения, используя терминологию Харари. Граф $G=G_1[G_2]$ называется композицией графов G_1 и G_2 , при условии, что он имеет множество вершин $V=V_1 \times V_2$, а множество ребер $E(G)$ определяется следующим образом: вершины $u_{ij}=(u_i, u_j)$ и $u_{is}=(u_i, u_s)$ смежны в G тогда и только тогда, когда или $(u_i, u_i) \in E_1$, или $u_i=u_i$, а $(u_j, u_s) \in E_2$.

Известно, что r -регулярный дистанционный магический граф порядка n существует, если r – четное и $n \equiv 0 \pmod{4}$ или $n \equiv 2 \pmod{4}$ и $r \equiv 0 \pmod{4}$, или $n = tq$ – нечетное, $r = 2^s q$, где $s \geq 1$ и $t \geq 2^s + 1$ [5, 6].

Рассмотрим на примере способ построение 6-регулярного дистанционного магического графа $G=(V, E)$ порядка 21 с привлечением массивов Коцига.

Пусть G_1 – это 2-регулярный граф порядка 7, т. е. цикл C_7 с вершинами $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u_7$. Воспользуемся массивом $KA(3, 7)$:

1	2	3	4	5	6	7
7	5	3	1	6	4	2
4	5	6	7	1	2	3

Зададим массив $LKA(3, 7, 0)$:

1	2	3	4	5	6	7
14	12	10	8	13	11	9
18	19	20	21	15	16	17

Затем выполним операцию композиции над графами C_7 и \overline{K}_3 . Результирующий граф $G = C_7[\overline{K}_3]$ будет 6-регулярным графом порядка 21. Можно сказать, что он получается заменой каждой вершины $u_i \in V(C_7)$ множеством вершин $U_i = \{u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}\}$, а каждого ребра $(u_i, u_j) \in E(C_7)$ – ребрами полного двудольного графа $K_{3,3}$ с долями $U_i, U_j, i, j \in \{1, \dots, 7\}$, где $i \neq j$. Таким образом, множество вершин графа G состоит из 7 подмножеств U_1, \dots, U_7 . Разметим каждую вершину из U_j элементами f_{kj} , где $1 \leq k \leq 3$, j -го столбца поднятого массива Коцига $LKA(3, 7, 0)$. Представленная разметка является дистанционной магической.

Эту идею можно использовать для построения нерегулярных дистанционных магических графов.

Литература

1. Miller M., Rodger C., Simanjuntak R. Distance magic labelings of graphs // Australian Journal of combinatorics. 2003. Vol. 28. P. 305-315.

2. Sugeng K. A., Fronček D., Miller M., Ryan J., Walker J. On distance magic labeling of graphs// JCMCC – 2009. Vol. 71. P. 39-48.

3. Wallis W.D. Magic Graphs. / Springer Science & Birkhauser, Boston-Basel-Berlin, 2001. 146 p.

4. Kotzig A. On magic valuations of trichromatic graphs. // Reports of the CRM, CRM-148, 1971.

5. Froncek D., Kovar P., Kovarova T. Fair incomplete tournaments. // Bull. of ICA – 2006 Vol. 48, P.31-33.

6. Froncek D. Fair incomplete tournaments with odd number of teams and large number of games. // In: Proceeding of the Thirty-Eighth Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing Congressus Numerantium. – 2007/ Vol. 187. P. 83-89.

О ГРУППОВЫХ МАГИЧЕСКИХ РАЗМЕТКАХ ГРАФОВ

Семенюта М.Ф., Дмитриев О.Н., Шульгин В.А.

Летняя академия НАУ

ON GROUP LABELINGS OF GRAPHS

Abstract. In this paper, we continue the study to determine the groups for which the Hamming graph admits a group distance magic labeling.

Пусть Γ – конечная абелева группа порядка n . Для групповой операции будем использовать аддитивную форму записи.

Под Γ -дистанционной магической разметкой графа $G = (V, E)$ порядка n понимают биективное отображение f из V на абелеву группу Γ порядка n , при котором вес $w(u) = \sum_{v \in N(u)} f(v)$ для каждой вершины $u \in V$ равен одному и

тому же элементу $\mu \in \Gamma$, называемому магической постоянной [9]. Если граф G допускает Γ -дистанционную магическую разметку, то говорят, что он является Γ -дистанционным магическим. Граф G называют групповым дистанционным

магическим, если существует Γ -дистанционная магическая разметка для каждой абелевой группы Γ порядка $|V(G)|$.

В [1] рассматривается задача существования групповых дистанционных магических разметок декартовых произведений графов. Получены результаты для графов Кэли, декартова произведения циклов.

Графом Хэмминга $H(n, m)$ называется граф с множеством вершин M^n , где $|M| = m$, $m \geq 2$ и вершины (x_1, x_2, \dots, x_n) , (y_1, y_2, \dots, y_n) смежны, если они различаются точно в одной координате. Другими словами граф Хэмминга $H(n, m)$ получают декартовым произведением n полных графов K_m . Если $m=2$, тогда $H(n, 2) = Q_n$, т.е. является гиперкубом размерности n . Отметим, что $H(n, m)$ представляет собой граф Кэлли на группе Z_m^n .

Авторами данной работы определены группы Γ , для которых граф Хэмминга допускает Γ -дистанционную магическую разметку.

Литература

1. Cichacz S., Froncek D., Sugeng ., Zhou S. Group distance magic and antimagic graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*. 2015. Vol. 48 – P. 41-48.

О СВОЙСТВАХ КУБОВ ФИБОНАЧЧИ
Семенюта М.Ф., Неделько С.Н., Неделько В.Н.
Летняя академия НАУ

ON PROPERTIES FIBONACCI CUBES

Abstract. We systematized the results describing the basic structural properties and characteristics of Fibonacci cubes.

Чтобы получить графы со свойствами гиперкуба, порядок которых не является степенью двойки В. Хсу вводит кубы Фибоначчи [1]. Он рассматривал их в качестве топологии в мультикомпьютерных системах. В [2] кубы Фибоначчи представлены в обобщенной форме. Тесно связанные с ними структуры изучались и ранее в [3, 4, 5]. Цель данной работы описать основные структурные свойства и характеристики кубов Фибоначчи.

В качестве ряда Фибоначчи используем числа $F_0 = 1$, $F_1 = 2$, и каждое следующее число удовлетворяет рекуррентному соотношению $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$. По теореме Зекендорфа любое натуральное число можно единственным образом записать в виде суммы чисел Фибоначчи. Для $n \geq 1$ Фибоначчи строки длины n – это бинарные строки вида:

$$\mathcal{F}_n = \{b_n b_{n-1} \dots b_2 b_1 \in B_n \mid b_i \cdot b_{i+1} = 0, \quad 1 \leq i \leq n-1\},$$

где $B_n = \{b_n b_{n-1} \dots b_2 b_1 \mid b_i \in \{0, 1\}, 1 \leq i \leq n\}$. Множество \mathcal{F}_n состоит из всех двоичных строк длины n , не содержащих двух последовательных единиц. Таким образом, для любого натурального числа N существует единственное представление в виде строки Фибоначчи. Его можно реализовать, используя следующий алгоритм:

- находим наибольшее значение $F_k \leq N$ и присваиваем 1 координате соответствующей F_k ;
- выполняем рекурсивные действия для $N - F_k$, пока остаток не станет равным 0;
- не назначенные координаты равны 0.

Запишем числа от 0 до 10 строками Фибоначчи, их длина равна 5. Воспользуемся приведенным алгоритмом:

$$\begin{aligned} 0 &= (00000)_F; & 1 &= (00001)_F; & 2 &= (00010)_F; & 3 &= (00100)_F; \\ 4 &= (00101)_F; & 5 &= (01000)_F; & 6 &= (01001)_F; & 7 &= (01010)_F; \\ 8 &= (10000)_F; & 9 &= (10001)_F; & 10 &= (10010)_F. \end{aligned}$$

Под *кубом Фибоначчи* Γ_n порядка n понимают граф с множеством вершин $V = \mathcal{F}_n$ и две вершины смежны, если они отличаются только в одной координате. Куб Фибоначчи Γ_n — это подграф гиперкуба Q_n . Он получен из Q_n удалением всех вершин, содержащих хотя бы две последовательные единицы.

Множество строк Фибоначчи длины n можно разложить на два подмножества: подмножество строк, начинающихся с 0 и подмножество строк, начинающихся с 10. В соответствии с этим, число вершин графа Γ_n равно числу Фибоначчи F_n .

Описание структуры куба Фибоначчи начнем со свойства доказанного в работе [1]: граф Γ_n разлагается на два не пересекающихся и соединенных точно F_{n-2} ребрами подграфа Γ_{n-1} и Γ_{n-2} . Эту рекурсивную структура называют *фундаментальным разложением* Γ_n . Б. Конг, С. Чжэн и С. Шарма описали конструкцию, которая иммитирует фундаментальное разложение [6]. Пустая последовательность $g_0 = \lambda$ и последовательность $g_1 = 0, 1$ представляют собой графы Γ_0 и Γ_1 , соответственно. Для $n \geq 2$, пусть

$$g_n = 0\overline{g}_{n-1}, 10\overline{g}_{n-2},$$

где \overline{g} означает последовательность обратную g и αg — последовательность, полученная из g , добавлением строки α перед каждым элементом из g . Таким образом, первые последовательности g_i имеют вид

$$\begin{aligned} g_0 &= \lambda \\ g_1 &= 0, 1 \\ g_2 &= 01, 00, 10 \end{aligned}$$

$$g_3 = 010, 000, 001, 101, 100$$

$$g_4 = 0100, 0101, 0001, 0000, 0010, 1010, 1000, 1001$$

.....

Последовательность g_n содержит все вершины Γ_n . Более того, по индукции последовательные члены в $0\bar{g}_{n-1}$ так же как и в $10\bar{g}_{n-2}$ отличаются в одной позиции. Кроме того, последний член $0\bar{g}_{n-1}$ и первый член $10\bar{g}_{n-2}$ отличаются в одной позиции. Это привело к доказательству теорем 1 и 2.

Теорема 1 [6]. Граф Γ_n имеет гамильтонову цепь для любого $n \geq 0$.

Теорема 2 [7]. Граф Γ_n нельзя представить как декартово произведение нетривиальных графов.

Существуют альтернативные определения куба Фибоначчи. Одно из них связано с дистрибутивными решетками [8], второе с симплексными графами [9]. Поскольку графы дистрибутивных решеток и симплексные графы относятся к медианным графам, справедлива теорема 3.

Теорема 3 [10]. Фибоначчи куб является медианным графом. В частности, Γ_n — это частичный куб, и он изометрически вложим в Q_n .

К фундаментальным структурным свойствам графов относится оценка количества вершин данной степени. Для Γ_n она представлена в теореме 4.

Теорема 4 [11]. Пусть $n \geq k \geq 0$. Тогда число вершин в Γ_n , имеющих степень k равно

$$\sum_{i=0}^k \binom{n-2i}{k-i} \binom{i+1}{n-k-i+1}.$$

В теореме 4 суммирование можно ограничить интервалом между $\left\lceil \frac{n-k}{2} \right\rceil$ и $\min(k, n-k)$, так как остальные слагаемые равны нулю.

Важными характеристиками графа выступают дистанционные инварианты. Для Γ_n получены следующие результаты

- диаметр равен n ;
- радиус равен $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$;
- число вершин с эксцентриситетом k равно $\binom{k}{n-k} + \binom{k-1}{n-k}$, где $n \geq k \geq 1$;
- индекс Винера равен $\sum_{i=0}^n F_i F_{i+1} F_{n-i+1} F_{n-i+2}$, где $n \geq 0$;
- поведение среднего расстояния $\mu(\Gamma_n)$ описывается предельным равенством $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(\Gamma_n)}{n} = \frac{2}{5}$.

Спектр применений кубов Фибоначчи расширяется. Поэтому продолжение изучения его свойств является актуальной задачей. Представляет также интерес проблема вложения других гафов в кубы Фибоначчи.

Литература

1. Hsu W.-J. Fibonacci Cubes – A New Interconnection Topology. / IEEE Trans. on Parallel and Distributed Systems. 1993 Vol. 4. P. 3-12.
2. Liu J., Hsu W.-J., Chung M.J. Generalized Fibonacci Cubes Are Mostly Hamiltonian. / Journal of Graph Theory. 1994. Vol. 18. P. 817-829.
3. Gansner E.R. On the lattice of order ideals of an up-down poset. / Discrete Math. 1982. Vol. 39(2). P. 113-122.
4. Höft H., Höft M. A Fibonacci sequence of distributive lattices. / Fibonacci Quart. 1985. Vol. 23(3). P. 232-237.
5. Beck I. Partial orders and the Fibonacci numbers. / Fibonacci Quart. 1990. Vol. 28(2). P. 172-174.
6. Cong B., Zheng S., Sharma S. On simulations of linear arrays, rings and $2d$ meshes on fibonacci cube networks. / In Proceedings of

the 7-th International Parallel Processing Symposium, 1993. P. 747-751.

7. Munarini E., Zagaglia Salvi N. Structural and enumerative properties of the Fibonacci cubes. / Discrete Math. 2002. Vol. 255(1-3). P. 317-324.

8. Beck I. Partial orders and the Fibonacci numbers. / Fibonacci Quart. 1990. Vol. 28(2). P. 172-174.

9. Bandelt H.-J., van de Vel M. Embedding topological median algebras in products of dendrons. / Proc. London Math. Soc. 1989. Vol. (3), 58(3). P. 439-453.

10. Klavžar S. On median nature and enumerative properties of Fibonacci-like cubes. / Discrete Math. 2005. Vol. 299(1-3) P. 145-153.

11. Klavžar S., Mollard M., Peškovek M. The degree sequence of Fibonacci and Lucas cubes. / Discrete Math. 2011. Vol. 311(14). P. 1310-1322.

ПРО МЕТОД ДОВЕДЕННЯ З НУЛЬОВИМ ПІЗНАННЯМ

Сіряк А.В., Турчина В.А.

Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара

Abstract. A notion of Zero-Knowledge Proofs is considered. Various possible uses of the aforementioned proofs in information security are examined. Their classification with regard to the required agents' communication is given. Key properties of all Zero-Knowledge Proof systems are considered. Known Zero-Knowledge Proofs for demonstrative as well as practical problems are listed. Possible areas for future research are discussed and promising applications in those areas are proposed.

Доведення з нульовим пізнанням (далі - ДзНП) — це метод, за допомогою якого одна сторона може довести іншій, що вона знає значення x , не розкриваючи ніякої інформації про x . Тут і надалі сторону, що доводить, будемо називати P (з англ.

prover - доказуючий), а сторону, яка перевіряє, - V (з англ. verifier — перевіряючий).

За інтенсивністю участі сторін розділяють два типи ДзНП:

- [1] інтерактивні [1];
- [2] не інтерактивні [2].

В інтерактивних ДзНП (ІДзНП) V повинен ставити питання, а P — відповідати на них, таким чином доведення можливе лише за неперервної участі двох сторін. Одну ітерацію взаємодії зазвичай називають раундом.

В не інтерактивних ДзНП (НДзНП) P створює доведення і передає його V , після чого V може будь-коли перевірити справедливість цього доведення без участі P .

Головними ознаками ДзНП є повнота, коректність та нульове пізнання [2]. Сформулюємо ці властивості словесно.

Властивість повноти полягає в тому, що якщо твердження істинне, той P , хто чесно доводить (такий, що повністю слідує протоколу) завжди переконає чесного перевіряючого V .

Властивість коректності полягає в тому, що якщо твердження не істинне, то ймовірність обману в будь-якому випадку має бути дуже низькою. Взагалі кажучи, в ІДзНП вона може бути як завгодно малою, а в НДзНП вірогідність обману — деяке достатньо мале для практики число.

Властивість нульового пізнання полягає в тому, що якщо твердження істинне, жоден перевіряючий, який грає не за правилами, не може дізнатись нічого, окрім факту істинності.

Наведемо декілька простих прикладів ІДзНП:

1. задача про доведення можливості розрізняти два кольори;
2. задача про печеру Алі Баби (інтерактивний варіант) [3];
3. задача про доведення знання дискретного логарифму заданого числа;
4. задача про доведення знання гамільтонова цикла у графі.

Наведемо декілька простих прикладів НДзНП:

1. задача про колір обраної навмання гральної карти;

2. задача про печеру Алі Баби (неінтерактивний варіант) [3].

ДзНП вже успішно застосовують у таких цілях:

1. контроль ядерного роззброєння, а саме перевірка відповідності внутрішньої будови ядерної босголовки поставленим вимогам [4];

2. насадження етичної поведінки шляхом контролю за дотриманням правил комунікації між агентами;

3. аутентифікація користувачів в централізованих та децентралізованих системах заснована на важкості задачі дискретного логарифмування;

4. контроль коректності перерахування коштів в децентралізованих блокчейн системах.

Розглянемо деякі перспективні області для застосування ДзНП. Одним з найбільш перспективних напрямів, на наш погляд, є напрям пов'язаний з застосуванням ДзНП для реалізації розрахунків, що можуть бути перевірені. Скажімо, комусь необхідно виконати велику кількість розрахунків на ЕОМ, але він не має у своєму розпорядженні достатньо потужної машини. Так, цей агент може виконати обчислення на сервері якоїсь компанії, але він не буде впевнений в тому, що обчислення були виконані відповідно до інструкцій і отримана відповідь дійсно була отримана з використанням наданого алгоритму. В такому випадку цей агент може скористатися послугами сервісу розрахунків, що можуть бути перевірені.

Цей сервіс дозволяє виконувати довільні обчислення на техніці постачальника послуг і після цього надає ДзНП про правильність виконаних розрахунків. На даний момент вже є деякі розробки у цьому напрямку, але для комерційного застосування цих технологій необхідно досягнути того, щоб ДзНП вимагало на порядки менше обчислювальних ресурсів ніж вихідні розрахунки.

Також одним з перспективних напрямків є надання таргетингової інформації агрегаторам з метою вибору найбільш підходящої рекламної інтеграції. Скажімо, деяка людина дуже любить пити чай і п'є по 5 чашок чаю на день. В цій інформації дуже зацікавлені виробники чаю, які могли б рекламувати цій людині чай. Звичайно, ця особа не хоче, щоб хтось знав точний

час коли вона пила чай, або який саме чай вона пила, але вона зацікавлена в перегляді більш релевантної її інтересам реклами. В такому випадку можна розробити систему, яка, використовуючи ДзНП, довела б виробникам чаю, що ця людина зацікавлена в їх продукції не розкриваючи подробиць приватного життя та іншої інформації про користувача системи.

Література

1. S. Goldwasser, S. Micali, and C. Rackoff. 1985. The knowledge complexity of interactive proof-systems. In Proceedings of the seventeenth annual ACM symposium on Theory of computing (STOC '85). Association for Computing Machinery, New York, NY, USA, 291–304. DOI:<https://doi.org/10.1145/22145.22178>
2. Wu, Huixin & Wang, Feng. (2014). A Survey of Noninteractive Zero Knowledge Proof System and Its Applications. TheScientificWorldJournal. 2014. 560484. 10.1155/2014/560484.
3. Quisquater, Jean-Jacques & Guillou, Louis & Berson, Thomas & other. (1989). How to Explain Zero-Knowledge Protocols to Your Children. 628-631. 10.1007/0-387-34805-0_60.
- Glaser, Alexander & Barak, Boaz & Goldston, Robert. (2014). A zero-knowledge protocol for nuclear warhead verification. Nature. 510. 497-502. 10.1038/nature13457.

ТОПОЛОГІЇ НА n -ЕЛЕМЕНТНІЙ МНОЖИНІ, ЯКІ ІНДУКУЮТЬ БЛИЗЬКІ ДО ДИСКРЕТНОЇ ТОПОЛОГІЇ НА $(n-1)$ -ЕЛЕМЕНТНІЙ МНОЖИНІ

Скрябіна А. В., Стеганцева П. Г.
Запорізький національний університет

TOPOLOGIES ON n -ELEMENT SET THAT INDUCE THE TOPOLOGIES WHICH ARE CLOSE TO THE DISCRETE TOPOLOGY ON $(n-1)$ -ELEMENT SET

Abstract. The T_0 -topologies on n -element set that induce the topologies which are close to the discrete topology on $(n-1)$ -element set, have been investigated. In the work T_0 -topologies are described using the vector of the topologies. The form of the vector of T_0 -topologies with $k \in [5 \cdot 2^{n-4}, 2^{n-1}]$ open sets, which are described in the works of Stanley and Kolli, has been found. Some topologies with $k \in (2^{n-2}, 5 \cdot 2^{n-4})$ open sets have been described.

Топологію τ на впорядкованій множині $M = \{x_1, \dots, x_n\}$ будемо представляти неспадною послідовністю невід'ємних цілих чисел α_i , $\alpha_i = |M_i| - 1$, де M_i – мінімальний окіл елемента x_i в топології τ . Ця послідовність була введена в роботі [1] і названа вектором топології. При цьому вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ є вектором деякої T_0 -топології на n -елементній множині тоді і лише тоді, коли задовольняються умови:

1. $\alpha_i \leq \alpha_{i+1}$, $i = \overline{1, n-1}$,
2. $\alpha_i \leq i - 1$, $i = \overline{1, n}$.

З роботи [1] відомо також, що коли T_0 -топологія τ на множині M має вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, то на множині $M \setminus \{x_n\}$ індукована топологія τ' має вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1})$.

Отже, якщо T_0 -топології на n -елементній множині описуються векторами $(0, \dots, 0, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$ або $(0, \dots, 0, 1, 1, \alpha_n)$ (для

останнього виконується умова $M_{n-2} \cap M_{n-1} = \emptyset$), то індуковані на множині $M \setminus \{x_n\}$ T_0 -топології мають вектори $(0, \dots, 0, \alpha_{n-1})$ і $(0, \dots, 0, 1, 1)$ відповідно. Топології з такими векторами є близькими до дискретної [1].

Кількість відкритих множин в топології τ зручно називати *вагою топології* і використовувати позначення $|\tau|$.

Розглянемо T_0 -топології з векторами $(0, \dots, 0, 1, \alpha_n)$, $2 \leq \alpha_n \leq n-1$ на впорядкованій множині $M = \{x_1, \dots, x_n\}$. Вага кожної такої топології належить множині $(2^{n-2}, 2^{n-1}]$. Має місце

Теорема 1 (про T_0 -топології з вагою $|\tau| \in [5 \cdot 2^{n-4}, 2^{n-1}]$).

1. Топології на n -елементній множині з векторами $(0, \dots, 0, 1, \alpha_n)$, $2 \leq \alpha_n \leq n-1$ або $(0, \dots, 0, 2, 2)$ при $n \geq 5$ мають вагу $|\tau| > 3 \cdot 2^{n-3}$, причому всі класи T_0 -топологій з вагою $|\tau| \in (3 \cdot 2^{n-3}, 2^{n-1}]$, які знайдено в роботах Stanley [2] і Kolli [3], визначаються такими векторами.

2. При $n \geq 5$ топології на n -елементній множині з векторами $(0, \dots, 0, 2, \alpha_n)$, $3 \leq \alpha_n \leq n-1$ або $(0, \dots, 0, 3, 3)$ мають вагу $5 \cdot 2^{n-4} < |\tau| \leq 3 \cdot 2^{n-3}$. Топології з вектором $(0, \dots, 0, 3, 4)$ при $n \geq 5$ мають вагу $|\tau| = 5 \cdot 2^{n-4}$, якщо $M_{n-1} \subset M_n$ і $M_{n-1} \cap M_n = \{x_i, x_j, x_k\}$, $i, j, k = \overline{1, n-2}$. При цьому всі класи T_0 -топологій з вагою $|\tau| \geq 5 \cdot 2^{n-4}$, розглянуті в роботі Kolli [4], визначаються T_0 -топологіями з векторами $(0, \dots, 0, 2, \alpha_n)$, де $3 \leq \alpha_n \leq n-1$, $(0, \dots, 0, 3, 3)$ і $(0, \dots, 0, 3, 4)$ при вказаних обмеженнях.

Зауваження. Для топологій з вектором $(0, \dots, 0, 3, 4)$ можливі ще три випадки для мінімальних околів M_{n-1} і M_n :

$M_{n-1} \cap M_n = \{x_i, x_j\}$, $M_{n-1} \cap M_n = \{x_i\}$, $M_{n-1} \cap M_n = \emptyset$. Але в кожному з них топологія має вагу $|\tau| < 5 \cdot 2^{n-4}$.

Представлення топологій векторами дозволяє продовжити описання й тих топологій, які не розглядалися у вказаних публікаціях Stanley і Kolli. Нами доведена

Теорема 2. При $n \geq 5$ топології на n -елементній множині з векторами $(0, \dots, 0, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$, $3 \leq \alpha_{n-1} \leq n-2$, $4 \leq \alpha_n \leq n-1$ мають вагу $2^{n-2} < |\tau| < 5 \cdot 2^{n-4}$. При цьому для $\alpha_{n-1} = 3$ і $\alpha_n = 4$ розглядаються лише випадки, зазначені в зауваженні.

Розглянемо топології з вектором $(0, \dots, 0, 1, 1, \alpha_n)$ на n -елементній множині, які індукують на $(n-1)$ -елементній множині близькі до дискретної топології з вектором $(0, \dots, 0, 1, 1)$, де $M_{n-2} \cap M_{n-1} = \emptyset$. Має місце

Теорема 3. Топології на n -елементній множині з векторами $(0, \dots, 0, 1, 1, \alpha_n)$, де $M_{n-2} \cap M_{n-1} = \emptyset$ і $1 \leq \alpha_n \leq n-1$, мають вагу $9 \cdot 2^{n-5} < |\tau| < 2^{n-1}$. При цьому топології з такими векторами потрапляють у ті ж самі класи, що і топології з векторами $(0, \dots, 0, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$, $1 \leq \alpha_{n-1} \leq 3$, $2 \leq \alpha_n \leq n-1$.

Література

1. Величко И. Г., Стеганцева П. Г., Башова Н. П. Перечисление топологий близких к дискретной на конечных множествах // *Известия вузов. Математика*. 2015. № 11. С. 23–31.
2. Stanley R.P. On the number of open sets of finite topologies / R.P. Stanley // *Journal of combinatorial theory*. 1971. Vol. 10. P. 74–79.
3. Kolli M. Direct and elementary approach to enumerate topologies on a finite set. *Journal of Integer Sequences*. 2007. Vol. 10. Article 07.3.1.
4. Kolli M. On the Cardinality of the T_0 -Topologies on a Finite Set. *International Journal of Combinatorics*. 2014. Article ID 798074, 7 pages.

РЕАЛІЗАЦІЯ ІНФОРМАЦІЙНОЇ СТРУКТУРИ ТЕХНОЛОГІЧНОГО ПРОЦЕСУ ЕЛЕКТРОДУГОВОГО НАПИЛЕННЯ

Смірнова Т.В., Дреєв О.М., Смірнов О.А., Солових Є.К.
Центральноукраїнський національний технічний університет

IMPLEMENTATION OF THE INFORMATION STRUCTURE OF THE TECHNOLOGICAL PROCESS OF ELECTRIC ARRANGEMENT

Abstract. Due to the fact that nowadays any industry requires the use of information technologies, this paper proposes the implementation of the information structure of the electric arc sputtering process for an optimization expert system.

Актуальність теми дослідження. В зв'язку з тим, що в даний час будь яка галузь виробництва потребує застосування інформаційних технологій, у даній роботі запропонована реалізація інформаційної структури технологічного процесу електродугового напилення для оптимізаційної експертної системи.

Аналіз останніх досліджень і публікацій показав, що питання застосування інформаційних технологій у вигляді відповідних експертних систем в технологічних процесах дуже актуальне [1-3]. Тому проблема оптимізації ланцюга технологічного процесу в інформаційному забезпеченні експертних систем інформаційної структури технологічного процесу електродугового напилення, актуальна.

Метою роботи є реалізація інформаційної структури технологічного процесу електродугового напилення для оптимізаційної експертної системи.

Виклад основного матеріалу. Технологічний процес електродугового напилення в процесі створення виробів із покриттям, а також при відновленні або зміцненні поверхонь деталей, складається з поетапної обробки: струменево-абразивної обробки (САО); при потребі нанесення підшару; основний процес нанесення покриття; доведення утвореної

поверхні з покриттям до необхідних розмірів і якості методами механічної обробки (МО), найчастіше чорновим або чистовим шліфуванням та методами поверхнево-пластичної обробки (ППД), а саме обкаткою кульками і роликами, електроконтактною обробкою та інше.

Для побудови системи оптимізації потрібно визначити перелік використовуваних змінних та залежностей.

З точки зору матеріалознавства, методом повнофакторного планування та проведення експерименту, визначено параметри, які з достатньою точністю дають керування результатами обробки [3]. Також, для визначення міцності зчеплення часто доступні дані.

В результаті, для першої операції струменево-абразивної обробки маємо основні параметри: t_1 – час обробки; p_1 – тиск повітря в системі обробки; P_1 – енергоспоживання устаткування для струменево-абразивної обробки; r_1 – час амортизації устаткування; m_1 – вартість устаткування; m_{p1} – вартість енергетичних ресурсів та матеріалів, які використовуються за одиницю часу в обраному режимі роботи; σ – твердість матеріалу, який обробляється. Однак, не всі вказані величини впливають на міцність зчеплення покриття: $Y_1 = H (<t_1, p_1, \sigma, \{\text{хімічний склад основи}\}, \{\text{вид покриття}\}, \{\text{технологія нанесення покриття}\} >)$, де:

– $t_1 = T_1 (<p_1, \sigma >)$ – тут час обробки залежить від тиску повітря в системі, тобто від сили взаємодії абразиву з матеріалом та від твердості оброблювального матеріалу. Абразив в цьому процесі вважається незмінним і входить до вартості устаткування.

– $M_1 = M_1 (<t_1, r_1, P_1, m_1, m_{p1}, p_1 >)$ – матеріальні витрати в основному залежать від часу роботи устаткування та його зносостійкості. Ці параметри можна виразити з режиму навантаження та часу роботи. Також залежить від режиму роботи і потужність енергоспоживання. Ці величини можна визначити з робочого тиску повітря в системі та часу роботи системи, який потрібний до досягнення бажаного результату.

У випадках нехтування вартістю процесу на користь зменшення часу виробництва, функцією вартості знехтувати

повністю не можна, бо устаткування при перенавантаженні може вийти з ладу, що зупинить виробничий процес. Тому розрахунок розпадається на оптимізацію по мінімізації часу з обмеженням на гарантованість залишення устаткування в стані можливості обробити задану кількість деталей.

Наведено назви величин, які враховуються в процесі оптимізації технологічної операції струменево-абразивної обробки поверхні для підвищення адгезії до заданого значення при мінімальних витратах ресурсів. Деякі величини мають взаємну залежність, що свідчить про те, що система утворює систему, можливо нелінійних, рівнянь з кількома невідомими. В загальному випадку таку систему розв'язувати аналітично є не доцільним з причини відсутності способів аналітичного розв'язання або значної складності цих методів розв'язання.

Натомість, для вираження групи шуканих параметрів через відомі параметри з виконанням накладених на них обмежень та досягнення мінімального/максимального значення вагової функції, яка виражає обсяг витрат, використовують чисельні методи та аналітичні регресійні поліноми по експериментальним даним, які або дозволяють отримати аналітичний розв'язок або прямо виражають параметри процесу через задані результати та обмеження.

Наступні етапи обробки проводять на однаковому устаткуванні, лише процеси відмінні в матеріалах, які утворюють шар та підшар, а також відрізняються товщина шару та прошарку.

Прошарок використовується в технології електродугового напилення, коли матеріал поверхневого шару має хімічну несумісність з основним матеріалом, або основний шар не може утворити достатню адгезійну міцність із основним матеріалом. Тому матеріал для утворення прошарку має бути хімічно нейтральним до матеріалу деталі та основного шару і мати достатню адгезію до матеріалів основи та покриття. В особливо важких випадках є виправданим використання прошарку з молібдену або ніхрому, який має високу адгезію з більшістю матеріалів. Важливим є те, що для адгезійного прошарку достатньо нанесення матеріалу шаром в декілька десятків

мікрон, тому використання молібдену або ніхрому не призводить до значного зростання вартості процесу.

Нажаль, моделювання фізико-хімічних процесів при електродуговому нанесенні покриттів є складним, в результаті чого відокремити незалежні параметри майже неможливо. Тому для побудови математичних залежностей для електродугового напилення було використано метод регресійного аналізу на отриманих експериментальних даних. Відповідно до обраного методу реалізації математичної моделі процесу, користувач інформаційної системи повинен мати можливість використовувати аналітичні моделі, табличне задання залежності між величинами, або аналітичні або алгоритмічні методи числових засобів моделювання процесу, який оптимізується.

Висновки. Зазначено необхідність підтримки в інформаційній системі визначення залежностей між величинами аналітичними методами, таблично, алгоритмічно та за допомогою імітаційних моделей. Розглянуті інформаційні одиниці є функціонально різними, деякі величини мають здатність змінювати функціональну здатність переходом від шуканих величин до обмежень на технологічну операцію, що накладає на систему керування змінними додаткові функціональні можливості та універсальність до трансформації моделювання технологічного процесу.

Література

1. Лимаренко В. В. Інформаційна система підтримки рішень для автоматизації створення технологічних процесів механообробки деталей високоточного обладнання: дисертація канд. техн. наук, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут». Харків, 2019.
2. Харламов Ю.О., Романченко О.В., Міцик А.В. Міцність зчеплення детонаційно-газових покриттів на основі карбідів вольфраму та хрому. *Вісник Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля*. 2019, № 1 (249). С. 99-107.
3. Ворона Т.В. Підвищення зносостійкості сталевих газотермічних покриттів електроконтактною обробкою з

використанням вуглецевовмісних наповнювачів: дисертація канд. техн. наук, Національна академія наук України, Інститут надтвердих матеріалів ім. В.М. Бакуля. Київ, 2016.

ОПТИМАЛЬНОЕ ЧЕРГУВАННЯ ЛОГІЧНИХ ОПЕРАЦІЙ ПРИ МІНІМІЗАЦІЇ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ

Соломко М. Т., Замрій Б.А.

*Національний університет водного господарства та
природокористування*

OPTIMAL SEQUENCE OF FIGURATIVE TRANSFORMATIONS AT MINIMIZING BOOLEAN FUNCTIONS

Abstract. The optimal alternation of image transformations for the process of minimization of Boolean functions is considered in the work. The efficiency of the chosen sequence of rin-force transformations is demonstrated by examples of minimization of Boolean functions borrowed from the works of other authors in order to compare

1. Вступ

Алгебра логіки, як і будь-який апарат обчислення, є сукупність аксіом, тотожностей, законів, правил, які дозволяють здійснювати перетворення логічних виразів. Але нема тут приписів про те, як необхідно використовувати цей апарат для синтезу оптимальних логічних схем. І тільки вибудовування у певній послідовності цих перетворень (це – алгоритми) може забезпечити оптимальне рішення. Відомі методи такого вибудовування: Рота, Квайна – МакКласки, Петрика, Закревского Д.А., Рыцаря Б.Е. та ін. [1-5]. У свою чергу визначення алгоритмів спрощення є передумовою для створення автоматизованих методів мінімізації булевих функцій.

2. Особливості застосування комбінаторних структур 2- (n, b) -design та 2- $(n, x/b)$ -design для мінімізації булевих функцій

Алгебричні перетворення, що необхідні для процесу мінімізації булевих функцій замінюються рівносильними перетвореннями за допомогою підматриць (комбінаторними образами) таблиці істинності, яка є власне комбінаторною системою. Оскільки комбінаторні образи дають більше інформації стосовно ортогональності, суміжності, однозначності блоків комбінаторної системи, порівняно з алгебричними перетвореннями, що є вербальною процедурою, застосування їх під час пошуку об'єктів для рівносильного перетворення, у процесі мінімізації логічної функції, є ефективним[6–9].

Для вибору оптимального чергування протоколів мінімізації образними перетвореннями необхідно визначити початкову операцію алгебричного перетворення булевих функцій. У зв'язку з цим потрібно встановити особливості процесу мінімізації логічних функцій при використанні комбінаторних структур 2- (n, b) -design та 2- $(n, x/b)$ -design.

Приклад 1. Мінімізувати функцію $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ образними перетвореннями, що задана наступною таблицею істинності:

$$F = \Sigma(6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14)$$

Примітка: значення в Σ є мінтермами для рядків, коли функція $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ повертає «1» на виході.

Для мінімізації заданої функції $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ використаємо комбінаторну структуру неповної бінарної системи з повторенням 2- $(n, x/b)$ -design (рис. 1).

6	0	1	1	0
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0
13	1	1	0	1
14	1	1	1	0

Рис. 1. Комбінаторна система (таблиця істинності) функції $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ зі структурою неповної бінарної системи з повторенням 2-(3, 7/8)-design (виділена червоним кольором)

Проведемо мінімізацію функції $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ образними перетвореннями, використовуючи 2-(3, 7/8)-design.

$$F = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 10 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 11 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 12 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 13 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 14 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & & \\ 1 & & 0 & \\ 1 & & & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & & 0 & \\ 1 & & & 0 \\ 1 & & & 0 \end{vmatrix}$$

Мінімізована функція:

$$F = x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 \quad (1)$$

Протокол мінімізації для 2-(3, 7/8)-design:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{або} \quad \left| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} & 0 & \\ 0 & 1 & \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} & 0 & \\ 0 & & \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} & 0 & \\ 0 & & \\ & & 0 \end{array} \right|$$

Приклад 2. Мінімізуємо логічну функцію $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ з прикладу 1 образними перетвореннями, використовуючи комбінаторну структуру повної бінарної системи з повторенням 2-(n, b)-design (рис. 2).

6	0	1	1	0
8	1	0	0	0
9	1	0	0	1
10	1	0	1	0
11	1	0	1	1
12	1	1	0	0
13	1	1	0	1
14	1	1	1	0

Рис. 2. Комбінаторна система (таблиця істинності) функції $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ зі структурою повної бінарної системи з повторенням 2-(2, 4)-design (виділена червоним кольором)

Проведемо мінімізацію функції $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ образними перетвореннями, використовуючи 2-(2, 4)-design.

$$F = \left| \begin{array}{ccccc} 6 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 10 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 11 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 12 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 13 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 14 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & & \\ 1 & 1 & 0 & \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & & \\ 1 & & 0 & \end{array} \right|$$

Мінімізована функція:

$$F = x_2 \overline{x_3 x_4} + x_1 \overline{x_2} + x_1 \overline{x_3} \quad (2)$$

Операція супер-склеювання змінних у першій матриці проведена для блоків 8–11, які виділені червоним кольором. Просте склеювання змінних проведено для блоків 12–13, які виділені синім кольором та 6, 14 які виділені чорним кольором. Споглядаючи мінімальні функції (1) і (2) бачимо, що мінімальна функція (4) простіша на один терм.

Порівнюючи особливості процесу мінімізації логічних функцій з використанням комбінаторних структур повної бінарної системи з повторенням 2-(n, b)-design та неповної бінарної системи з повторенням 2-(n, x/b)-design, можна зробити висновок, що комбінаторна система 2-(n, b)-design і послідовне чергування алгебричних операцій супер-склеювання змінних (якщо така операція можлива) та простого склеювання змінних, у першій матриці (таблиці істинності), забезпечує оптимальну ефективність процесу та достовірність результату мінімізації булевих функцій.

3. Результати вибору чергування образних перетворень при мінімізації булевих функцій

Застосування протоколу оптимального чергування образних перетворень при мінімізації булевих функцій дає наступні результати:

- розширює можливості застосування векторних інтервалів булевого простору B^n при мінімізації логічних функцій;
- визначає частковий алгоритм розпізнавання комбінаторних систем 2-(n, b)-design та пошуку її меж;
- забезпечує автоматизований пошук комбінаторних систем 2-(n, b)-design у структурі таблиці істинності заданої логічної функції.

4. Порівняльний аналіз мінімізації булевих функцій за допомогою протоколу оптимального чергування образних перетворень з іншими методами мінімізації

Ефективність застосування протоколу оптимального чергування образних перетворень при мінімізації булевих

функцій демонструється прикладами мінімізації логічних функцій, запозичених з робіт інших авторів з метою порівняння.

4. 1. Порівняння з картами Махоні

Приклад 3. Знайти мінімальні ДНФ і КНФ логічної функції, використовуючи карту Махоні зі заданої таблиці істинності на рис. 3 [10].

F	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1
D	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
C	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
B	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
A	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Рис. 3. Таблиця істинності логічної функції для прикладу 3

	\bar{A}	A	A	\bar{A}	
\bar{B}	1	0	1	1	\bar{D}
B	1	0	1	1	\bar{D}
B	1	0	1	0	D
\bar{B}	1	0	1	0	D
	\bar{C}	C			

Рис. 4. 4-bit карта Махоні для прикладу 3

Рис. 4 являє собою підсумкову карту Махоні із таблиці істинності логічної функції на рис. 3. Збір одиниць позначається суцільними еліпсами, а збір нулів – пунктирними еліпсами.

Карти Махоні у багатьох відношеннях є набагато ефективнішими, порівняно з картами Карно, оскільки вони легко розширюються до необхідної кількості вхідних даних, що суттєво розширює загальний контент застосування карт Махоні [10].

Використовуючи збір одиниць на рис. 4, мінімальна ДНФ заданої логічної функції (рис. 3) буде мати вигляд:

$$OUT = C \cdot A + \overline{D} \cdot C + \overline{C} \cdot \overline{A} \quad (3)$$

Мінімізація функції $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (рис. 3) методом образних перетворень зводиться до наступної процедури:

$$F = \begin{array}{c|cccc} \text{№} & x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 13 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 15 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} = \begin{array}{ccc|ccc} & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & & & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & & 1 & 1 \end{array}$$

Блоки 4 – 7 (виділені червоним кольором) та блоки 0, 2, 8, 10 (виділені синім кольором) мінімізовані за протоколом супер-склеювання змінних. Інші блоки мінімізовані за протоколами простого склеювання та напівсклеювання змінних [6, 7].

Мінімізована ДНФ функції:

$$F = \overline{x_1} \overline{x_3} + \overline{x_3} \overline{x_4} + x_1 x_3. \quad (4)$$

Результат мінімізації (4) збігається з результатом мінімізації (3), проведеної за допомогою карти Махоні [10], однак отримання мінімальної ДНФ логічної функції методом образних перетворень є простішою процедурою.

Використовуючи збір нулів на рис. 4, мінімальна КНФ заданої логічної функції (рис. 3) буде мати вигляд:

$$\overline{OUT} = \overline{C} \cdot A + D \cdot C \cdot \overline{A}$$

Застосовуючи закон де Моргана, отримаємо:

$$\overline{\overline{OUT}} = \overline{(\overline{C} \cdot A) + (D \cdot C \cdot \overline{A})},$$

$$OUT = (\overline{\overline{C} \cdot A})(\overline{D \cdot C \cdot \overline{A}}),$$

і, нарешті, мінімальна КНФ

$$OUT = (C + \overline{A})(\overline{D} + \overline{C} + A). \quad (5)$$

Мінімізація КНФ функції $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ (рис. 3) методом образних перетворень зводиться до такої процедури [9]:

$$F = \begin{array}{c|cccc} \mathcal{N} & x_4 & x_3 & x_2 & x_1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 11 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 12 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 14 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 1 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} = \begin{array}{ccc} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Блоки 1, 3, 9, 11 (виділені червоним кольором) мінімізовані за протоколом супер-склеювання змінних. Інші блоки мінімізовані за протоколами простого склеювання та напівсклеювання змінних [6, 7].

Мінімізована КНФ функції:

$$F = (\overline{x_1} + x_3)(x_1 + \overline{x_3} + \overline{x_4}). \quad (6)$$

Результат мінімізації (6) збігається з результатом мінімізації (5), проведеної за допомогою карти Махоні [10], однак отримання мінімальної КНФ логічної функції методом образних перетворень є простішою процедурою.

Література

1. Curtis H.A. A new approach to the design of switching circuits. – N.J.: Princeton, Toronto. – 1962. – 635 p.
2. Проектирование цифровых вычислительных машин. Под ред. С.А. Ма-йорова: Учеб. пособие для вузов. – М.: Высшая школа, 1972. – 344 с.

3. Поспелов Д.А. Логические методы анализа и синтеза схем. – М.: Энергия, 1974. – 368 с.
4. Закревский А.Д. Логический синтез каскадных схем. – М.: Наука, 1981. – 416 с.
5. Рыцар Б.Е. Метод минимизации булевых функций / Б.Е. Рыцар // Проблемы управления и информатики. – 1997. – № 2. – С. 100-113.
6. Riznyk V., Solomko M. Minimization of boolean functions by combinatorial method // Technology audit and production reserves.- Vol 4/2 (36), 2017. – P. 49–64.
<http://journals.uran.ua/tarp/article/view/108532> .
7. Riznyk V., Solomko M. Application of super-sticking algebraic operation of variables for boolean functions minimization by combinatorial method // Technology audit and production reserves.- Vol 6/2 (38), 2017. P. 60 – 76.
<http://journals.uran.ua/tarp/article/view/118336/112951>
8. Riznyk V., Solomko M. Research of 5-bit boolean functions minimization protocols by combinatorial method. Technology audit and production reserves.– Vol 4/2 (42), 2018, 41 – 52.
<http://journals.uran.ua/tarp/article/view/140351/139051>
9. Riznyk V., Solomko M. Minimize of conjutable normal forms of boolean functions combinatorial method. Technology audit and production reserves.– Vol 5/2 (43), 2018, 42 – 55.
<http://journals.uran.ua/tarp/article/view/146312>
10. David Bonal. Karnaugh and Mahoney – Map Methods for Minimizing Boolean Expressions <http://davidbonal.com/karnaugh-and-mahoney-map-methods-for-minimizing-boolean-expressions/> October 19th, 2013.

ДВІ 7-ПАРАМЕТРИЧНІ КРИВІ ДЛЯ ПОБУДОВИ ПРОФІЛЮ СПИНКИ ЛОПАТКИ

¹Стецюк П.І., ²Ткаченко О.В., ¹Хом'як О.М.

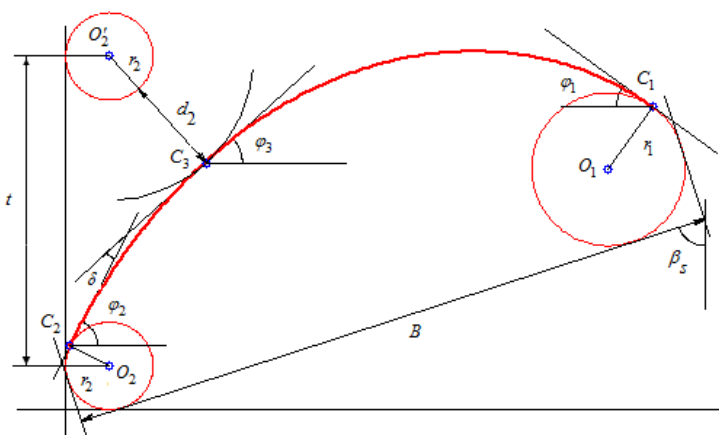
¹Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова
²ДП "Івченко-Прогрес"

TWO 7-PARAMETRIC CURVES FOR BLADE BACK PROFILE DESIGN

Abstract. Systems of nonlinear equations for two curves for profiling the blade back are constructed; the curves are defined by seven design parameters. For the first curve its curvature varies linearly in natural parameterization, and the second uses a cubic polynomial. A computational experiment for modeling the profile of the blade back is described.

Для моделювання профілю спинки лопатки в даній роботі сформульовані системи нелінійних рівнянь для двох видів кривих: крива в натуральній параметризації з лінійним законом розподілу кривини [1] та поліном третього степеня [2].

Математична модель. Відомими є 7 параметрів: r_1 та r_2 – радіуси заокруглень вхідної та вихідної кромки, t – крок решітки, B – довжина хорди, β_s – кут установки профілю, d_2 – величина горла міжлопаткового каналу, δ – кут відгину вихідної кромки. Параметри та базові точки профілю відображені на рисунку.



Тут O_1, O_2, O_2' – центри кіл вхідної та вихідних кромek, точки C_1 (I квадрант у колі O_1), C_2 (II – у колі O_2), C_3 (IV – у колі O_2'), $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ – кути нахилу дотичних до кривої в цих точках.

Потрібно знайти криву, яка проходить через точки C_1, C_2 та C_3 , дотичні в яких співпадають з дотичними до кіл O_1, O_2 та O_2' .

Перша крива. Будується в натуральній параметризації з графіком кривини $k(s) = as + b$, де S, s_1 – невідомі довжини кривих від точки C_1 до точки C_2 та від точки C_2 до точки C_3 , φ_1, φ_2 – невідомі кути в точках C_1 та C_2 . Кут φ_3 в точці C_3 виражається через кут φ_2 : $\varphi_3 = \varphi_2 - \delta$. Невідомі параметри $a, b, S, s_1, \varphi_1, \varphi_2$ є розв'язком системи шести нелінійних рівнянь:

$$B_x + r_1 \sin \varphi_1 = -r_2 \sin \varphi_2 + \int_0^S \cos \left(\varphi_2 + \frac{as^2}{2} + bs \right) ds, \quad (1)$$

$$B_y + r_1 \cos \varphi_1 = r_2 \cos \varphi_2 + \int_0^S \sin \left(\varphi_2 + \frac{as^2}{2} + bs \right) ds, \quad (2)$$

$$-\varphi_1 = \varphi_2 + \frac{aS^2}{2} + bS, \quad 0 \leq \varphi_1 \leq \frac{\pi}{2}, \quad \delta \leq \varphi_2 \leq \frac{\pi}{2}, \quad S > 0, \quad (3)$$

$$(r_2 + d_2) \sin(\varphi_2 - \delta) = -r_2 \sin \varphi_2 + \int_0^{s_1} \cos \left(\varphi_2 + \frac{as^2}{2} + bs \right) ds, \quad (4)$$

$$t - (r_2 + d_2) \cos(\varphi_2 - \delta) = r_2 \cos \varphi_2 + \int_0^{s_1} \sin \left(\varphi_2 + \frac{as^2}{2} + bs \right) ds, \quad (5)$$

$$-\delta = \frac{as_1^2}{2} + bs_1, \quad 0 < s_1 < S \quad \left(\equiv \varphi_3 = \varphi_2 - \delta = \varphi_2 + \frac{as_1^2}{2} + bs_1 \right), \quad (6)$$

де величини B_x та B_y обчислюються за формулами:

$$B_x = (B - r_1 - r_2) \sin \beta_s + (r_2 - r_1) \cos \beta_s,$$

$$B_y = (B - r_1 - r_2) \cos \beta_s + (r_1 - r_2) \sin \beta_s.$$

Інтегральні рівняння (1) і (2) використовуються для зв'язку координат точок C_1 та C_2 , а рівняння (3) – для зв'язку кутів φ_1 та φ_2 . Рівняння (4) та (5) зв'язують між собою координати точок C_2 та C_3 , а рівняння (6) виражає кут φ_3 через кут φ_2 .

Друга крива. Будується за допомогою полінома третьої степені $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ та кутів φ_1 , φ_2 , а кут φ_3 дорівнює $\varphi_2 - \delta$. Невідомі коефіцієнти a , b , c і d та невідомі кути φ_1 і φ_2 є розв'язком такої системи шести рівнянь:

$$y_2 = ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d, \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = 3ax_2^2 + 2bx_2 + c, \quad (7)$$

де $x_2 = r_2 - r_2 \sin \varphi_2$, $y_2 = r_2 + r_2 \cos \varphi_2$, $\delta < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}$,

$$y_3 = ax_3^3 + bx_3^2 + cx_3 + d, \quad \operatorname{tg}(\varphi_2 - \delta) = 3ax_3^2 + 2bx_3 + c, \quad (8)$$

де $x_3 = r_2 + (t_2 + d_2) \sin(\varphi_2 - \delta)$, $y_3 = r_2 + t - (r_2 + d_2) \cos(\varphi_2 - \delta)$,

$$y_1 = ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d, \quad \operatorname{tg}(-\varphi_1) = 3ax_1^2 + 2bx_1 + c, \quad (9)$$

де $x_1 = r_2 + B_x + r_1 \sin \varphi_1$, $y_1 = r_2 + B_y + r_1 \cos \varphi_1$, $0 < \varphi_1 < \frac{\pi}{2}$.

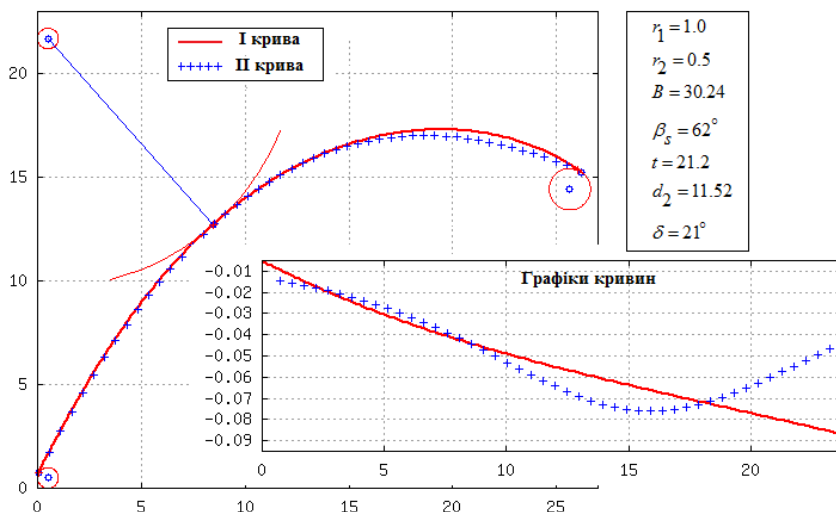
Тут нелінійні рівняння (7)–(9) визначають проходження кривої через точки $C_2(x_2, y_2)$, $C_3(x_3, y_3)$, $C_1(x_1, y_1)$, забезпечуючи в них відповідні значення похідних $\operatorname{tg} \varphi_2$, $\operatorname{tg} \varphi_3$, $\operatorname{tg}(-\varphi_1)$.

Обчислювальний експеримент. Графіки кривих, що побудовані для моделювання профілю спинки лопатки, наведені на рисунку нижче: крива в натуральній параметризації з лінійним законом розподілу кривини (суцільна лінія), поліном третього степеня (штрихова лінія). Тут же наведені їх графіки кривин та значення всіх семи параметрів, при яких вони отримані.

З графіків кривин видно, що у кривих відсутні точки перегину. Це виключає "хвилястість" профілів спинки лопатки.

Крива в натуральній параметризації має кращі газодинамічні властивості в силу лінійності розподілу кривини. Наявність точок перегину і стрибкоподібна зміна кривини не допустимі, оскільки це може привести до відриву потоку газу.

Подібні системи можна сформулювати для інших кривих в натуральній параметризації. Надалі планується побудова профілю спинки з використанням двох кривих з лінійним законом та однієї кривої з квадратичним законом розподілу кривини для врахування додаткових параметрів профілю. Використання двох кривих з квадратичним законом розподілу кривини описано в роботі [3].



Література

1. Борисенко В.Д., Устенко С. А., Устенко І. В., Кузьма К. Т. (2019) Розробка методу геометричного моделювання профілю лопатки осової турбомашини. Східно-Європейський журнал передових технологій. Vol 5, № 1 (101). doi: <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2019.180915>.

2. Souverein, L., Veggi, L., Sudhof, S. et. al. (2017). On the effect of axial turbine rotor blade design on efficiency: a parametric

study of the Baljé-diagram. 7th European conference for aeronautics and space sciences (EUCASS). doi: <http://doi.org/10.13009/EUCASS2017-241>.

3. Ткач М.Р., Агарков О.Ю. (2014) Моделювання плавних кривих стосовно профілів лопаток осевих турбін. Збірник наукових праць Національного університету кораблебудування. № 3. С. 58-62.

КОМБІНАТОРНІ КОНФІГУРАЦІЇ, ЯКІ ВИНИКАЮТЬ В ЗАДАЧАХ РІЗНИХ КЛАСІВ ІЗ ОБЧИСЛЮВАЛЬНОГО ІНТЕЛЕКТУ

Тимофієва Н. К.

*Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних
технологій та систем НАН та МОН України*

Abstract. Some artificial intelligence problems that are reduced to combinatorial optimization problems are considered. It is shown that combinatorial configurations can be both an argument of the objective function and the input data in artificial intelligence problems. The argument of the objective function in them, as a rule, are sampling of different types and partition of the n -element set into subsets. Natural signals are described by a combinatorial configuration – placing with repetition, due to which inaccuracy of the input data occurs in these problems.

Вступ. Аналізуються задачі із обчислювального інтелекту. Показано, що вони мають комбінаторну природу та моделюються в рамках теорії комбінаторної оптимізації. Аргументом цільової функції в них є комбінаторні конфігурації різних типів. Вхідні дані в деяких із них представлені різними типами вибірок.

Постановка задачі. Задача полягає у виявленні комбінаторних властивостей задач штучного інтелекту та їх моделювання як задач комбінаторної оптимізації.

Підхід, що пропонується. Розв'язання поставленої задачі проводиться шляхом аналізу задач обчислювального інтелекту, виявлення аргументу цільової функції, яким є комбінаторні конфігурації різних типів, та моделювання цільової функції, яка передає комбінаторну природу задач, що розглядаються.

Загальна постановка задачі комбінаторної оптимізації. Задачі обчислювального інтелекту складні за своєю природою та не завжди піддаються формалізації. Але багато прикладних задач цього класу зводяться до задач комбінаторної оптимізації. Це пов'язано з тим, що переважна їхня частина при знаходженні оптимального розв'язку потребує перебору варіантів. Перебірним же задачам властива комбінаторна природа. Цю властивість можна дослідити, змодельовавши оговорені задачі в рамках теорії комбінаторної оптимізації.

Для моделювання прикладних задач як задач комбінаторної оптимізації необхідно [1]: а) за способом обчислення цільової функції визначити вид задачі (статична або динамічна); б) визначити базові множини, якими задається певна задача; в) за вхідними даними визначити її тип; г) визначити аргумент цільової функції (комбінаторну конфігурацію); д) змодельувати цільову функцію.

Задачі комбінаторної оптимізації, як правило, задаються на одній або кількох множинах, наприклад $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ та $B = \{b_1, \dots, b_{\tilde{n}}\}$, елементи яких мають будь-яку природу [2]. Назвемо ці множини *базовими*. Наявні два типи задач. В *першому* типі кожен з цих множин подамо у вигляді графа, вершинами якого є її елементи, а кожному ребру поставлено у відповідність число $c_{it} \in R$, яке називають вагою ребра (R – множина дійсних чисел); $i \in \{1, \dots, n\}$, $t \in \{1, \dots, \tilde{n}\}$, n – кількість елементів множини A , \tilde{n} – кількість елементів множини B . Покладемо, що $n = \tilde{n}$. Між елементами цих множин існують зв'язки, числове значення яких назвемо вагами. Величини $c_{it} \in R$ назвемо *вхідними* даними та задамо їх матрицями. В *другому* типі задач між елементами заданої множини зв'язків не існує, а вагами є числа $v_j \in R$, $j \in \{1, \dots, n\}$, яким у відповідність

поставлено деякі властивості цих елементів, числові значення яких задаються скінченними послідовностями, що також є вхідними даними. Ці величини визначають значення цільової функції.

Для обох типів задач із елементів однієї або кількох базових множин, наприклад $a_l \in A$, $l \in \{1, \dots, n\}$, утворюється комбінаторна множина W – сукупність комбінаторних конфігурацій певного типу (перестановки, вибірки різних типів, розбиття тощо). На елементах w комбінаторної множини W вводиться цільова функція $F(w)$. Необхідно знайти елемент w^* множини W , для якого $F(w)$ набуває екстремального значення при виконанні заданих обмежень.

Під комбінаторною конфігурацією розуміємо будь-яку сукупність елементів, яка утворюється з усіх або з деяких елементів заданої базової множини $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ [2]. Позначимо її впорядкованою множиною $w^k = (w_1^k, \dots, w_\eta^k)$, де $\eta \in \{1, \dots, n\}$ – кількість елементів у w^k , $W = \{w^k\}_1^q$ – множина комбінаторних конфігурацій. Верхній індекс k ($k \in \{1, \dots, q\}$) у w^k позначає порядковий номер w^k у W , q – кількість w^k у W .

До обчислювального інтелекту відносяться задачі з розпізнавання, зокрема розпізнавання мовлення, задача клінічної діагностики, задачі із семантики (порівняння текстів на плагіат, автоматичний переклад текстів з однієї мови на іншу тощо). В таких задачах як розпізнавання мовленнєвих сигналів та задача клінічної діагностики цільова функція залежить від кількох змінних, якими є різні типи вибірок, та розбиття n -елементної множини на підмножини. За аргументом цільової функції як задача клінічної діагностики, так і розпізнавання мовлення розділяються на три підзадачі: структуризація бібліотеки еталонів, пошук у бібліотеці еталонної інформації; порівняння еталонної та вхідної інформації.

Комбінаторні конфігурації можуть бути і вхідними даними в задачах обчислювального інтелекту. В задачах з розпізнавання проводиться розпізнавання сигналів різної природи (мовленнєві

сигнали, електрокардіограми, електроенцефалограми), які є для них вхідними даними. Ці сигнали описуються комбінаторними конфігураціями, зокрема розміщенням з повтореннями. Для пояснення цього твердження розглянемо мовленнєвий простір як знаковий комбінаторний [3]. Він складається із згорнутого, який містить базову множину (активні та пасивні органи творення мови), правила, за якими творяться звуки (частково розгорнутий мовленнєвий простір), та правила, за якими із звуків (комбінацією точок частково розгорнутого мовленнєвого простору) твориться мовлення. Мовленнєвий розгорнутий простір, як і знаковий комбінаторний під дією певних чинників утворюється різноманітними комбінаціями активних та пасивних органів творення мови (елементами базової множини).

Отже, під згорнутим мовленнєвим простором розуміємо інформаційний знак $\mathfrak{R} = \langle A, T, P, \Xi \rangle$, де A – базова множина, елементам $a_j \in A$ якої відповідають органи мовленнєвого тракту, P – система правил, за допомогою яких комбінацією $a_j \in A$ розгортається природний мовленнєвий простір, T – сполучення з повтореннями, Ξ – правила згортання мовленнєвого простору завдяки слуховому апарату. Аналогічно утворюються інші природні сигнали: електрокардіограми, енцефалограми тощо. Точкою цих просторів є розміщення з повтореннями. Тому для одного і того ж слова (речення) сигнали передають суть одного і того ж слова, але відрізняються між собою. При їхньому розпізнаванні та порівнянні з еталоном вони подібні але не збігаються. В цьому полягає нечіткість вхідної інформації в цих задачах.

Отже, з викладеного випливає, що комбінаторними конфігураціями описуються природні сигнали, які в задачі розпізнавання є вхідними даними.

Висновок. Отже, в задачах обчислювального інтелекту комбінаторні конфігурації можуть бути як аргументом цільової функції так і вхідними даними. Аргументом цільової функції в них, як правило виступають вибірки різних типів та розбиття n -елементної множини на підмножини.

Представлення природних сигналів як знакових комбінаторних просторів дозволяє описати вхідну інформацію комбінаторною конфігурацією – розміщенням з повтореннями, завдяки якій в цих задачах має місце нечіткість вхідних даних.

Література

1. Тимофієва Н.К. Математичне моделювання в комбінаторній оптимізації. *Вісник ХНТУ (Херсонського національного технічного університету)*. Херсон, 2019. № 2[69]. Частина 3. С. 179–184.
2. Тимофієва Н.К. Теоретико-числові методи розв'язання задач комбінаторної оптимізації: автореф. дис... докт. техн. наук: 01.05.02. Київ, 2007. 32 с.
3. Тимофієва Н.К. Знакові комбінаторні простори та штучний інтелект. *Штучний інтелект*, 2015, 67-68, (1-2). 180–189.

ПРО МНОЖИНИ РОЗРІЗАЮЧИХ РЕБЕР ТА РОЗРІЗАЮЧІ ВЕРШИНИ ГРАФІВ

Турчина В.А., Доманська Т.М.

*Дніпровський національний університет імені Олеся
Гончара*

Abstract. Regardless of mathematical preferences, everyone probably met graphs. A flexible system of special terms and symbols allows you to easily describe complex things in detail. This mathematical object can be applied in any scientific and practical field.

The subject of this work is a cutting ribs (bridges) and cutting vertices. The relevance of this research work lies in the applied value. To be more precise, the proposed methods can solve some problems of network medicine, problems of cities connected by roads, cellular networks or electricity, problems of air travel and much more. We considered well-known theorems and search algorithms for cutting edges and vertices. There are no known search algorithms for the set of cutting edges, therefore, new theorems, definitions and search algorithms are also proposed.

Оптимізаційні задачі на графах крім того, що представляють теоретичний інтерес, зазвичай знаходять широке практичне застосування, або навпаки – із прикладних задач ми отримуємо оптимізаційні задачі на графах. Однією із сучасних сфер застосування оптимізаційних задач на графах є мережева медицина.

Ніколас Крістакис та Джеймс Фаулер дослідили дані багаторічних медичних спостережень різних соціальних груп в одному з районів штату Массачусетс (США). Було виявлено, що соціальні зв'язки спричиняють виникнення надлишкової ваги більше навіть, ніж генетичні чинники. Якщо одна людина добре знайома з людиною з надмірною вагою, то ймовірність того, що вона набере зайву вагу на 20% вище, ніж в соціальних мережах з випадковими зв'язками між людьми. Тобто ожиріння, подібно інфекціям, поширюється по соціальних мережах. Тоді, щоб перервати цей ланцюг, необхідно розірвати деякі зв'язки [1].

Тоді виникає питання: а як можна розірвати такі зв'язки оптимальним чином, щоб звести до мінімуму передачу такої соціальної інфекції.

Подібні проблеми виникають при аналізі інфраструктур населених пунктів та зв'язки між ними (дорогами, мережами сотового зв'язку або лініями електропередач).

Наведені вище задачі можна сформулювати як оптимізаційні задачі на графах, пов'язані, в залежності від постановки, або з пошуком множини розрізаючих ребер, або розрізаючих вершин в графі.

Наведемо деякі відомі означення [2, с. 561].

Нехай задано зв'язний граф $G(V,E)$.

Означення 1. Множина ребер S зв'язного графа $G(V,E)$ називається розрізаючою множиною, якщо видалення всіх ребер з множини S порушує зв'язність графа, а видалення власної підмножини множини S залишає граф зв'язним.

Іншими словами, розрізаюча множина – це множина, що містить мінімальну кількість ребер, після видалення яких граф втрачає зв'язність.

Якщо множина S складається з одного ребра, то це ребро називається розрізаючим ребром.

Розрізаюче ребро ще називають мостом графа. Для пошуку мостів графа відомі алгоритми, зокрема алгоритм Тар'яна та пошук мостів за допомогою розкладання на ланцюги [3].

Якщо в графі відсутні розрізаючі ребра, то необхідно шукати множину розрізаючих ребер. В даній роботі пропонується алгоритм знаходження такої множини.

Алгоритм пошуку множини розрізаючих ребер засновується на алгоритмі пошуку часткових дерев в неорієнтованому графі.

Етап 1. Знаходимо перелік часткових дерев в графі.

Етап 2. Знаходимо два часткових дерева, в яких буде від одного то трьох спільних ребер.

Етап 3. Перевіряємо, чи зберігається зв'язність графа, при видаленні всіх спільних ребер, які ми знайшли для пари часткових дерев. Якщо зв'язність порушується, то знайдені спільні ребра складають собою множину розрізаючих ребер.

Етап 4. Повторюємо етапи 2 і 3 для всіх можливих пар часткових дерев.

Розглянемо приклад роботи алгоритму для графу, зображеному на рисунку 1.

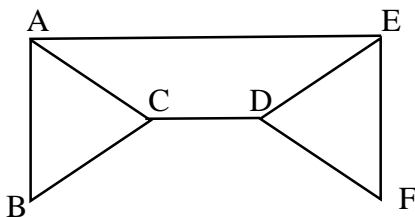


Рис.1. Приклад графу

Одними з двох часткових дерев графа, буде пара графів, зображених на рисунку 2, де спільними ребрами є CD та AE.

Тож однією з множин розрізаючих ребер для графа з рисунку 1 є $\{\{A,E\};\{C,D\}\}$.

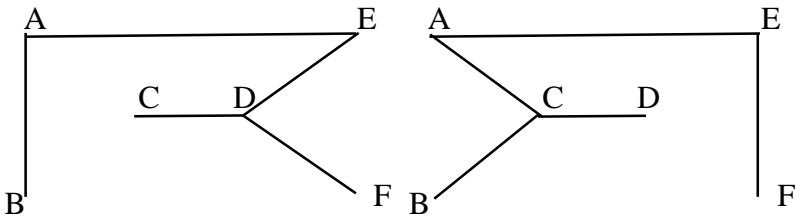


Рисунок 2. Два часткові дерева графа з

Не менш важливим питанням є питання пошуку розрізаючих вершин графів. [2, с. 561-562]

Означення 2. Вершина $v \in V$ зв'язного графа $G(V, E)$ називається розрізаючою вершиною, якщо видалення цієї вершини та інцидентних до неї ребер призводить до порушення зв'язності графа.

Розрізаючі вершини також називають шарнірами або точками зчленування.

Для пошуку розрізаючих вершин графів можна було б використовувати відомі необхідні і достатні умови їх існування.

Проте цікаво було б отримати умови, з конструктивного доведення яких, впливав би алгоритм знаходження таких вершин.

Література

1. Евин И.А. Медицина и теория сложных сетей (сетевая медицина) [Электронный ресурс] / Розин А.В., Сон Н.П. – 2015. – Режим доступу: <http://spkurdyumov.ru/networks/medicina-i-teoriya-slozhnykh-setej-setevaya-medicina/>.

2. Андерсон Джеймс А. Дискретная математика и комбинаторика. : Пер. с англ. – М. : Издательский дом «Вильямс». – 2004. – 960 с.

Tarjan Robert Endre. A Note on Finding the Bridges of a Graph. Information Processing Letters 2, no. 6 (April 1974): 160 – 61.

МИКОЛА ГУЛАК – З ПЛЕЯДИ ТВОРЦІВ БАГАТОВИМІРНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Шендеровский В.А., Лісковець С.М.

*Інститут фізики Національної академії наук України
Луцький національний технічний університет*

Abstract. The brief description is given in these theses about the life and scientific path of a little-known scientist, public and political figure - a man of encyclopedic knowledge, philosopher, lawyer, mathematician, one of the ideologues of the first Ukrainian political party of Mykola Hulak (1821 – 1899). The consideration is focused on the scientist's mathematical works which are devoted to multidimensional geometry.

Микола Гулак (1821–1899) за оцінкою видатного вченого, філософа Павла Флоренського «здається мені один із найблискупіше обдарованих людей другої половини ХІХ століття, і для історії культури було б непросто не знати його або обмежувати своє знання лише повідомленнями про його участь в Кирило- Мефодіївському братстві» [1].

Народився Микола Гулак в червні 1821 року в шляхетній родині на Полтавщині. Рід Гулаків започатковується від Генерального обозного Війська Запорозького, часів урядування гетьмана Петра Дорошенка.

Гулак закінчив юридичний факультет Дерптського університету, де паралельно відвідував лекції з природничих наук та математики. Захистив дисертацію «Спроба опису чужого права за французьким, австрійським і російським законодавством», за яку йому було присуджено ступінь кандидата права.

Педагогічну діяльність М.Гулак розпочав в Рішельєвському ліцеї на кафедрі чистої математики (згодом ліцей був перейменований у Новоросійський університет в 1865 році). За час праці в ліцеї Гулак написав дев'ять навчальних програм з вищої алгебри, з аналітичної геометрії, диференціального та інтегрального числення, теорії ймовірності та арифметики. Він широко використовував посібники Ейлера, Буняковського, Коші, Штурма, Остроградського та багатьох інших знаних математиків. Гулак активно пропагував введення до програми

математичних дисциплін такі курси, як вища теорія кривих ліній та поверхонь, теорія інтегрування, варіаційне числення [2].

На початку 1859 року Микола Гулак видає в Одесі монографію «Етюди з трансцендентних рівнянь» (французькою мовою), яка отримала схвальний відгук Паризької академії наук. В роботі вводяться аналогі тригонометричних функцій синуса, косинуса та відповідних гіперболічних функцій, автор створив своєрідну псевдо тригонометрію. Аналіз властивостей трансцендентних функцій, відповідні твердження, достатньо велику кількість формул вчений об'єднав в одну книгу, багато матеріалів якої було використано для всебічного дослідження істинності неевклідової геометрії.

Найвизначнішими науковцями М.Гулак вважав тих, хто виходить за межі загальновизнаного, відомого, установленого законом. Вчений свої математичні зусилля спрямовував на пропаганду ще не визнаних ідей неевклідової геометрії, сам розробляв питання чотиривимірного простору. Так, в 1877 році Гулак видав монографію «Нарис геометрії в чотирьох вимірах» (робота мала підзаголовок «Геометрія синтетична»), згодом підготував рукопис «Аналітична геометрія з чотирма вимірами й зі сферичною тетраедричною геометрією», пізніше з'явилася об'ємна стаття з геодезії «Про сучасний стан європейського градусного вимірювання» [3].

Варто зазначити, що книга Гулака «Нарис геометрії в чотирьох вимірах», вступна частина якої називається «Розмова про простір», має присвяту «Пам'яті Лобачевського» і була першою в Росії книгою з багатовимірної геометрії. Автор висловлює припущення, що «істинна геометрична форма нашого простору є не плоскоплощинною, а рімановим простором».

Чотиривимірний простір вчений розглядає як узагальнення тривимірного евклідового простору, як простір, в якому існує чотири попарно перпендикулярні прямі. При цьому акцентується увага, що «жоден рисунок, жодна модель не можуть дати ясного уявлення про обрис фігури з чотирма вимірами», при цьому залишається лише мислення та уява, за

допомогою яких можна засвоїти закони, що діють у чотиривимірному просторі.

Гулак висловив думку, що геометричні відкриття Лобачевського і Рімана «здатні зробити в наших поняттях такий же радикальний переворот», як це сталося в розумінні Всесвіту після відкриття Коперника. Вчений висловлював думку, що якби «не з'явився спершу Лобачевський і не довів фактично можливість побудувати нову геометрію, незалежно від аксіоми Евкліда, чи зміг би Ріман додуматись до своєї прекрасної теорії простору?» [4].

Варто зауважити, що М.Гулак висловлював думку про те, що при математичній побудові механіки важливу роль матимуть закони збереження, висновки вченого про чотиривимірну кривизну простору на багато років випередили подібні розробки у світовій науці, а цей факт дає підстави стверджувати, що Гулак передбачав відкриття загальної теорії відносності приблизно за тридцять років до А. Ейнштейна.

Дослідники геометрії вважають, що робота М.Гулака «Нарис геометрії в чотирьох вимірах» була корисним надбанням вітчизняної математичної літератури, це також одна з перших у світовій літературі книга, що пропонувала досить системний аналіз геометрії чотирьох вимірів.

Все що зробив вчений в галузі математики (окрім його доробку в інших сферах науки та політичної діяльності), як педагог, популяризатор та дослідник, дає йому право на вдячну згадку в літописі розвитку математичної науки.

Література

- 1.Кратко М. Уроки Миколи Гулака // Наука і культура – №19. – С.94-109.
2. Марченко В. Творчість і життя Миколи Гулака // Сфера. –2001 . – С.351-366.
3. Шендеровський В. Нехай не гасне світ науки. Книга друга. – Київ. Видавництво «РАДА». – 2006. – С.61-66.
4. Гайдук Ю.М., Лейбін О.С. Математична діяльність М.Гулака // зб. З історії вітчизняного природознавства. . – К.:Наукова думка. – 1964. – С.61.

РАДИО РАЗМЕТКА ГРАФОВ

Шерман З. А.

Донецкий национальный медицинский университет

RADIO LABELLING OF GRAPHS

Abstract. The study of these aspects is continued in order to determine the necessary and sufficient conditions for the existence of the bound for the radio number of a binary tree. The radio number for G is the smallest integer k so that there exists a function f , where f is injection from $V(G)$ into $\{0, 1, 2, 3, \dots, k\}$, meeting the condition that $|f(u) - f(v)| \geq \text{diam}(G) - d(u, v) + 1$ for any vertices u and v of G .

Радио разметка – это особый тип разметки графа, который развился как способ использования теории графов к решению проблем в радиосетях. Первоначально была введена вершинная раскраска [1], где вершины плоского графа на расстоянии 1 раскрашены так, чтобы цвета отличались не менее чем на p , а на расстоянии 2 – не менее чем на q . Этот способ разметки мотивировал В. Хейла в 1980 году [2] рассмотреть проблему распределения радиочастот для телевизионных и радио станций как задачу нахождения разметки графа. Если представить станции как вершины некоторого графа, а процесс назначения каналов как функцию, которая ставит этим вершинам неотрицательные целые числа по определенному правилу, то можно назначить радиочастоты так, что близлежащие станции как минимум на расстоянии 2 будут принимать разные каналы без помех. При этом решение задачи сводится к построению радио разметки, где диапазон используемых чисел (частотных каналов) является минимальным.

Термин «радио разметка» впервые введен Г. Чартрандом, Д. Эрвином, П. Чжаном и Ф. Харари в 2001 году. В данной работе рассматриваются нижние оценки радио разметки для m -арных деревьев.

Под графом будем понимать конечный неориентированный граф без кратных ребер и петель. Пусть $G=(V, E)$ – граф с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $E(G)$. Расстоянием между двумя вершинами x и y связного графа G

называют длину кратчайшей цепи, соединяющий эти вершины и обозначают $d(x, y)$.

Определение 1 [3]. Радио числом $rn(G)$ графа G называется наименьшее целое число k такое, что существует функция f , где f – инъекция из $V(G)$ в множество $\{0, 1, 2, 3, \dots, k\}$, с условием, что $|f(u) - f(v)| \geq diam(G) - d(u, v) + 1$ для любых двух вершин u и v графа G . При этом функция f называется радио разметкой G .

Для любой вершины ω дерева T , вес дерева T от корня ω определяют как $\omega_T(\omega) = \sum_{u \in V(T)} L_\omega(u)$. Тогда весом дерева T называют наименьшее количество всех возможных весов от корней: $\omega(T) = \min\{\omega_T(\omega) : \omega \in V(T)\}$.

Вершину ω^* дерева T называют центром тяжести дерева T , если $\omega_T(\omega^*) = \omega(T)$.

Дафна Дер-Фен Лю в 2008 году рассмотрел необходимые и достаточные условия существования нижней оценки радио числа m -вершинного дерева.

Теорема 1 [3]. Пусть дерево T является m -вершинным деревом диаметра d . Тогда

$$rn(T) \geq (m - 1)(d + 1) + 1 - 2\omega(T)$$

выполняется тогда и только тогда, если для любого центра тяжести ω^* существует радио разметка f с условием

$f(u_0) = 0 \leq f(u_1) \leq \dots \leq f(u_{m-1})$, где $0 \leq i \leq m - 2$, где:

1) вершины u_i и u_{i+1} принадлежат разным веткам (даже если одна из них содержит вершину ω^*);

2) $\{u_0, u_{m-1}\} = \{\omega^*, v\}$, где v – вершина с $L_{\omega^*}(v) = 1$;

3) $f(u_{i+1}) = f(u_i) + d + 1 - L_{\omega^*}(u_i) - L_{\omega^*}(u_{i+1})$.

Для доказательства теоремы 1 было введено определение функции уровня дерева T и доказано несколько ее свойств, представленные в теореме 2.

Определение 2 [3]. Для любой вершины ω дерева T функция уровня φ определённая на множестве вершин $V(T)$ называется

$\varphi_\omega(u, v) = \max\{L_\omega(t), \text{ где } t \text{ общий предок вершин } u \text{ и } v\}$,

где $L_\omega(u) = d(\omega, u)$ для любых двух вершин u и v дерева T .

Теорема 2 [3]. Пусть дерево T имеет корень в вершине ω , тогда для любых двух вершин u и v :

- 1) $\varphi_{\omega}(u, v) = 0$ тогда и только тогда, когда вершины u и v принадлежат разным веткам дерева T ;
- 2) $d(w, u) = L_{\omega}(u) + L_{\omega}(v) - 2\varphi_{\omega}(u, v)$.

Продолжено изучение данного направления с целью определения необходимых и достаточных условий существования нижней оценки радио числа для бинарных деревьев.

Литература

1. Chartrand G., Nebesk'y L., Zhang P. Radio k -colorings of paths. / *Discussiones Mathematicae Graph Theory*. 2004. Vol. 24. P. 5-21.
2. Hale W., Frequency assignment: theory and applications. // *Proc. IEEE*. 1980. Vol. 68. P. 1497–1514.
3. Liu D., Radio number for trees. / *Discrete Math*. 2008. Vol. 308. P. 1153-1164.

МЕТОДИ НОРМАЛІЗАЦІЇ ДАНИХ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ МАШИННОГО НАВЧАННЯ

Шингалов Д.В., Мелешко Є.В., Босько В.В.

*Центральноукраїнський національний технічний
університет*

Abstract. In this work, the research of data normalization methods for machine learning models was conducted. Considered why normalization is required for most machine learning algorithms.

Нормалізація є методом, часто застосовуваним у рамках підготовки даних для машинного навчання. Мета нормалізації полягає в тому, щоб змінити значення числових стовпчиків у наборі даних на загальну шкалу, не створюючи відмінності в діапазонах значень. Для машинного навчання кожен набір даних не вимагає нормалізації. Це потрібно тільки тоді, коли об'єкти мають різні діапазони.

Щоб виконати нормалізацію даних, потрібно точно знати межі зміни значень відповідних змінних (мінімальне і максимальне теоретично можливі значення). Тоді їм і будуть відповідати межі інтервалу нормалізації. Коли точно встановити межі зміни змінних неможливо, вони задаються з урахуванням мінімальних і максимальних значень в наявній вибірці даних.

Є декілька підходів для нормалізації даних у вибірці:

- **Стандартизація** (Z-score Normalization) – це стратегія нормалізації даних, яка дозволяє уникнути проблеми відкинутих значень. Формула для нормалізації Z-балів наведена нижче:

$$x_i = \frac{value - \mu}{\sigma}.$$

де μ - середнє значення ознаки, а σ - стандартне відхилення ознаки. Якщо значення точно дорівнює середньому значенню всіх значень об'єкта, то воно буде нормалізовано до 0. Якщо він нижче середнього, то це буде від'ємне число, а якщо вище середнього, то це буде позитивне число. Розмір цих негативних і позитивних чисел визначається стандартним відхиленням вихідної ознаки. Якщо ненормалізовані дані мали велике стандартне відхилення, то нормалізовані значення будуть ближче до 0.

- **Нормалізація на відрізок** (Min-Max Normalization) є одним з найбільш поширених способів нормалізації даних. Для кожного об'єкта мінімальне значення цього об'єкта перетворюється в 0, максимальне значення перетворюється в 1, а кожне інше значення перетворюється в десяткову дріб між 0 і 1.

$$x_i = \frac{value - min}{max - min}.$$

Нормалізація Min-Max має один досить значний недолік: вона не дуже добре обробляє відкинуті значення. Наприклад, якщо у вас є 99 значення між 0 та 40, а одне значення дорівнює 100, то всі 99 значень будуть перетворені у значення між 0 та 0,4.

- **Нелінійна нормалізація** (Nonlinear Normalization) - один із методів нелінійної нормалізації з використанням сігмоїдної логістичної функції або гіперболічного тангенса. Перехід від

традиційних одиниць виміру до нормалізовани[і назад в даному випадку здійснюється наступним чином:

$$\tilde{x}_{ik} = \frac{1}{e^{-a(x_{ik}-x_{ci})} + 1};$$

$$y_{jk} = y_{cj} - \frac{1}{a} \ln \left(\frac{1}{\tilde{y}_{jk}} - 1 \right),$$

де x_{ik} , y_{jk} - і-е вхідне та j-е вихідне значення k-го прикладу вихідної вибірки в традиційних одиницях виміру, прийнятих в розв'язуваній задачі, \tilde{x}_{ik} , \tilde{y}_{jk} - відповідні їм нормалізовані вхідне і вихідне значення; та x_{ci} , y_{cj} - центри інтервалів, що нормалізуються для вхідної та вихідної величин відповідно:

$$x_{ci} = \frac{x_{\min i} + x_{\max i}}{2};$$

$$y_{cj} = \frac{y_{\min j} + y_{\max j}}{2}.$$

Для нелінійної нормалізації з використанням функції гіперболічного тангенса параметра $a = 1,0$. Слід зазначити, що збіг нормалізованого значення в обох випадках має місце лише в точці, що відповідає центру інтервалу нормалізації.

- Demical Scaling Normalization – нормалізація відбувається шляхом переміщення десяткової крапки значень даних. Для нормалізації даних за цією методикою ділимо кожне значення даних на максимальне абсолютне значення даних. Значення даних, v_i , нормалізується на відрізок v'_i , використовуючи формулу нижче:

$$v'_i = \frac{v_i}{10^j}.$$

де j - найменше ціле число, таке що $\max(|v_i|) < 1$.

В багатьох випадках пряме застосування стандартних методів машинного навчання призводить до досить поганих результатів. Однак ситуація може бути легко виправлена за допомогою спеціальних методів нормалізації вхідних змінних. Вибір коректування методу залежить від кожного конкретного випадку.

Література

1. Cai C.-L., Zhou W., Yang L., Bu L., Qyang Y., Zhang X., Li X., Rosenfeld M. G, Chen J. and Evans S. (2005). T-box genes coordinate regional rates of proliferation and regional specification during cardiogenesis. *Development*, pp.2475–2487.
2. Ciresan D., Meier U., Gambardella L., Schmidhuber J. Deep Big Simple Neural Nets Excel on Handwritten Digit Recognition. // *Neural Computation*, Vol. 22(12). 2010. pp. 3207–3220.
3. Kuhnert P.M., Venables W.N. An Introduction to R: Software for Statistical Modelling & Computing. CSIRO Mathematical, Information Sciences, Australia, 2005. p.364 .
4. M. Rosvall and C.T. Bergstrom, “Maps of Random Walks on Complex Networks Reveal Community Structure,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 105, no. 4, 2008, pp. 1118–1123.

ОБРОБКА СИГНАЛІВ ПРИ ПІДПОВЕРХНЕВІЙ РАДІОЛОКАЦІЇ ШТУЧНИМИ НЕЙРОННИМИ МЕРЕЖАМИ

Широкоград Д.В, Думін О.М., Плахтій В.А., Корніч Г.В.
*Національний Університет «Запорізька політехніка»
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна*

SIGNAL PROCESSING IN SUBSURFACE RADIOLOCATION BY ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS

Abstract. The signal processing problem for identification of underground objects is considered. The source of signals is the ultra short impulse electromagnetic waves reflected from air-ground interface and underground objects and received by subsurface radar antenna system. The numerical simulation of the electromagnetic problem to find the electrical field strength in receiving points above the ground at some fixed height is carried out by Finite Difference Time Domain method. The received signals are processed by artificial neural networks for the object identification and classification of its position. The electrically small metal cylinder is used as an example of an object for the classification and recognition. The influence of the structure of an artificial neural

network and its training peculiarities on the precision of the classification is investigated.

Проблема виявлення мін за допомогою пристроїв віддаленого пошуку є актуальною та затребуваною. Протипіхотні міни нових поколінь містять все менше металевих деталей, більше того, є передумови для повної відмови від використання металу. Ось чому застосування традиційних способів їх ідентифікації на основі зміни магнітного поля поблизу міни стає ускладненим. Для вирішення проблеми використовуються спеціальні радары, які випромінюють електромагнітні хвилі в землю. Для отримання інформації про підземні об'єкти та середовища шляхом аналізу відбитого електромагнітного поля використовується опромінення хвиль зі ступінчастою несучою частотою або без несучої частоти. Сучасні тенденції розвитку систем розмінування спрямовані на автоматизацію процесу, виключаючи людей для їх безпеки, використовуючи штучний інтелект, зокрема, штучні нейронні мережі (ШНМ) [1], для покращення характеристик систем.

Постановка задачі. Модель ґрунту, що містить ідеально провідний металевий циліндр кінцевої висоти, опромінюється з верхнього напівпростору, що складається з повітря, плоскою електромагнітною хвилею з гауссовою залежністю від часу. Тривалість імпульсу поля - 0,6 нс. Модель ґрунту для чисельних моделювання являє собою однорідну речовину з проникністю $\epsilon = 9$ та провідністю $\sigma = 0,005$ с/м. Відбита хвиля приймається чотирма антенами з поляризаційною орієнтацією та відповідними координатами. Часові залежності отримані чисельним моделюванням за допомогою методу скінченних різниць у часовій області (FDTD) [2], що дозволяє безпосередньо розв'язувати задачу розсіювання у часовій області.

Розв'язок електромагнітної задачі в попередньо дискретизованих чотирьох точках утворює набір вхідних даних для ШНМ. Метою тренувань ШНМ є подання сигналу одиничного рівня на виході, що відповідає номеру дискретизованої відстані до об'єкта. Виходи з числами від 1 до 41 показують, що циліндр розташовано на відстані від 0 до 40 см

до центру приймаючої антени. ШНМ були випробувані за допомогою набору вхідних даних, розрахованих для випадків переміщення об'єкта на 4 мм вздовж поздовжньої осі та окремо в поперечній площині для постійної глибини. Також 42-й вихід ШНМ вказує на наявність об'єкта перед антенною системою на відстані від 0 до 40 см. Одиничний рівень відображає присутність циліндра в цьому районі, тоді як нульовий рівень демонструє його відсутність.

Ми побудували мережі, які виконують класифікацію положення циліндра за формами часу вхідного сигналу. Функція Softmax в останніх шарах використовується для збільшення контрастності вихідних сигналів за допомогою спеціальної нормалізуючої функції збудження. Для запобігання феномену перенавчання було застосовано метод dropout. Функції активації лінійні.

Перші приклади ШНМ були натреновані на даних для тих випадків, коли циліндр розташовано всередині вузької області довжиною лише 0-40 см. Результати перевірки для ШНМ з одним прихованим шаром (2000-100-42) представлені на рис. 1 для випадку поздовжнього та поперечного зсуву об'єкта на 4 мм. Можна побачити реальне положення циліндра на осі абсцис, тоді як рівні вихідних сигналів зображені на осі ординат. Позиції об'єкта правильно класифіковані з однією невеликою помилкою в найближчій області (0-40 см). Але більш віддалене положення об'єкта, яке перевищує 40 см, помилково визнається найближчим і найвіддаленішим одночасно або не класифікується взагалі (53 см і більше).

Очікується, що використання більш багат шарової нейронної мережі дозволить покращити результати розпізнавання. Очікування частково підтвердились, як видно на рис. 2 для ШНМ 2000-1000-200-100-42 з трьома прихованими шарами.

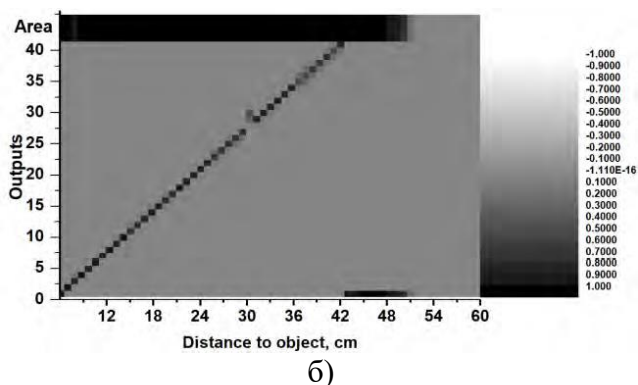
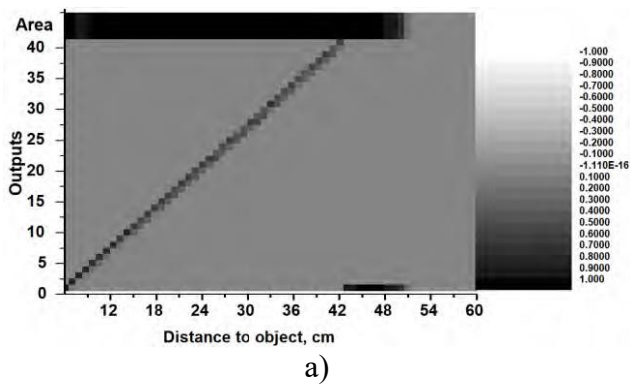
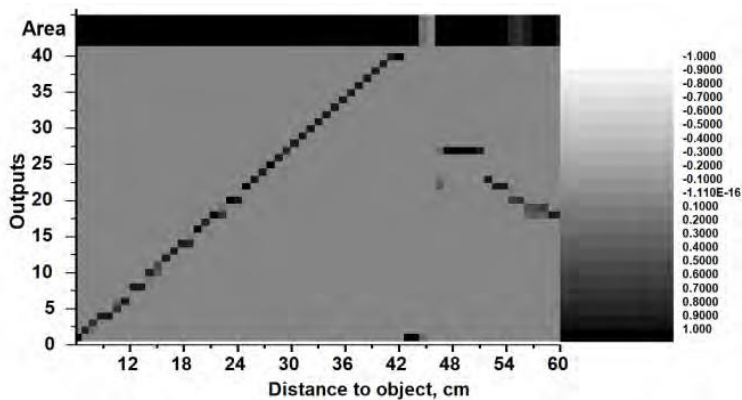


Рис. 1. Вихідні сигнали ШНМ 2000-100-42 для різних відстаней до циліндра для а) поздовжнього та б) поперечного зсуву в 4 мм.



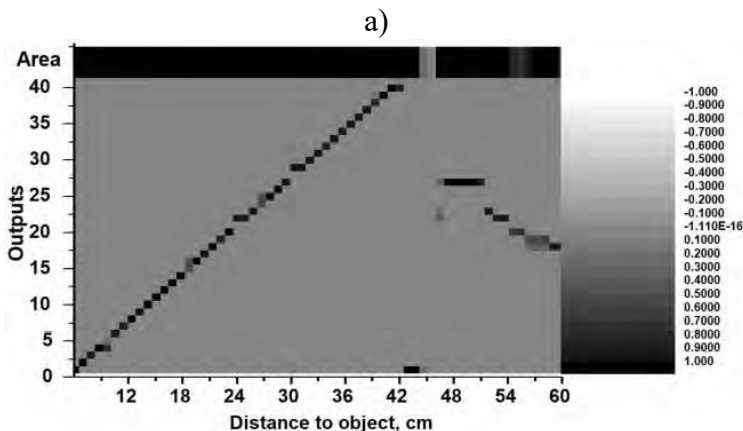


Рис. 2. Вихідні сигнали ШНМ 2000-1000-200-100-42 для різних відстаней до циліндра для а) поздовжних і б) поперечних зсувів у 4 мм.

Література

1. S. Haykin, Neural Networks, 2nd ed., New Jersey: Prentice-Hall, 1999.
2. A. Taflove, S. Hagness, "Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method," 3rd ed. Boston, London: Artech House, 2005.

ЗАСТОСУВАННЯ НЕЙРОННИХ МЕРЕЖ В ЗАДАЧАХ АВІАЦІЙНОГО СПРЯМУВАННЯ

Якуніна І. Л.

Льотна академія Національного авіаційного університету

APPLICATION OF NEURAL NETWORKS IN PROBLEMS OF THE AVIATION SEGMENT

Abstract. The article discusses the basic properties of neural networks and provides the main types of neural networks that can be used to solve aviation problems.

Однією з основних властивостей нейронних мереж є їх здатність до навчання, тобто нейронні мережі здатні змінювати свою внутрішню модель в залежності від стану навколишнього середовища. Зміна внутрішньої моделі може відбуватися як за участі людини, так і самостійно для забезпечення правильної реакції для досягнення поставленої мети. Дана властивість дозволяє будувати моделі динамічної повітряної обстановки, не маючи повного опису факторів, лише базуючись на основі емпіричних і розрахункових даних з наступним уточненням цих моделей за результатами отримання нової інформації від повітряного судна.

Наступною важливою властивістю нейронних мереж є їх шумозахисність. Навчена мережа може бути стійкою до деяких відхилень вхідних даних, що дозволяє їй розпізнавати корисний сигнал, що містить різні шуми і спотворення. Це властивість дозволяє подолати вимогу суворої точності, яка властива алгоритмічним системам, і дозволяє планувати дії в умовах неповноти і невизначеності інформації про динамічну повітряну обстановку.

Також нейромережі здатні в короткі терміни вирішувати задачі багатокритеріальної оптимізації практично не залежно від розмірності параметрів. Це дозволяє практично в режимі реального часу розподіляти ресурси і засоби по завданням і об'єктам, з огляду на багатокритеріальність і обмеження незалежно від розмірності матриці розподілу. Дана властивість нейронних мереж дозволить здійснювати динамічне планування

практично в реальному режимі часу без втрати обґрунтованості, а іноді і з її підвищенням.

Застосування штучних неймереж дозволяє реалізувати раціональне багатокрокове планування з великим числом змінних і тимчасових кроків. Якщо розглядати застосування даного математичного апарату для авіаційних задач, то можна зробити висновок про можливість здійснювати планування дій операторів аеронавігаційної системи в особливих випадках польоту не тільки на основі поточної динамічної повітряної обстановки, але і з урахуванням прогнозованого її розвитку і впливу на неї зовнішніх факторів.

Отже нейронні мережі доцільно застосовувати для задач розпізнавання, прогнозування та управління. Однак існує проблема вибору раціональної структури нейронної мережі та її параметрів. На сьогоднішній день існує велика кількість різноманітних конфігурацій нейронних мереж з різноманітними принципами функціонування. Розглянемо докладніше ті з них, які найчастіше застосовуються до розв'язання задач авіаційного спрямування.

Нейронні мережі прямого поширення (feed forward neural networks, FF або FFNN) та перцептрони (perceptrons, P). Передають інформацію із входу на вихід. Найпростіша нейронна мережа має два входи і один вихід і використовується в якості моделі логічних вентилів. Навчання нейронної мережі відбувається за методом зворотньої помилки, тобто мережа отримує множини вхідних і вихідних даних. Зміст зворотньої помилки полягає у різниці між входом і виходом. Якщо мережа має достатню кількість прихованих нейронів, теоретично вона здатна змоделювати взаємодію між вхідними і вихідними даними. На практиці такі мережі в «чистому вигляді» не застосовують, вони слугують для комбінації з іншими типами нейронних мереж для отримання нових.

Нейронна мережа Хопфілда (Hopfield network, HN) – це повнозв'язна нейронна мережа з симетричною матрицею зв'язків. Під час отримання вхідних даних кожен вузол є входом, який в процесі навчання нейронної мережі стає прихованим, а потім стає виходом. Для навчання мережі значення нейронів

встановлюються з бажаним шаблоном, потім обчислюються вагові коефіцієнти, які в подальшому не зазнають змін. Після навчання на одному чи кількох шаблонах, нейронна мережа завжди буде зводитись до одного з них, але не завжди до оптимального. Мережі такого типу іноді називають мережами з асоціативною пам'яттю, оскільки, отримавши таблицю, наполовину зашумлену, нейронна мережа здатна відтворити її до повної. Дана властивість мережі такого типу дозволяє робити прогнози в умовах неповноти і невизначеності інформації, особливо при виникненні особливих випадків польоту.

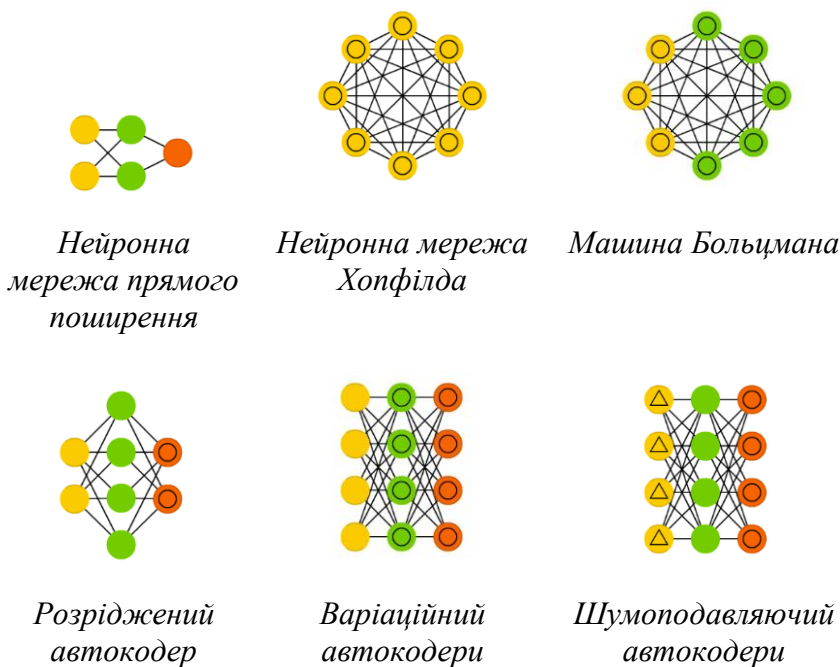


Рис.1. Структура деяких типів нейронних мереж

Машина Больцмана (Boltzmann machine, BM) дуже схожа на мережу Хопфілда, але в ній деякі нейрони є вхідними, а деякі – приховані. Після навчання вхідні нейрони стають вихідними. Машина Больцмана є стохастичною мережею. Навчання

відбувається методом зворотнього розповсюдження помилки або за алгоритмом порівняльної розбіжності.

Розріджений автокодер (sparse autoencoder, SAE). Мережі даного типу застосовуються у випадках великої кількості дрібних властивостей набору даних. При навчанні даної мережі окрім масиву вхідних даних подають і спеціальний фільтр розрідженності, який пропускає тільки певні помилки.

Варіаційні автокодери (variational autoencoder, VAE) навчають наближенню ймовірнісного розподілу вхідних зразків. Мережа даного типу бере до уваги вплив нейронів, тобто, якщо дві події відбуваються в двох різних місцях, то ці події не обов'язково пов'язані між собою і це варто враховувати.

Шумоподавляючі автокодери (denoising autoencoder, DAE) – це такі нейронні мережі – автокодери, яким на вхід подаються дані в зашумленому вигляді. Вихідні дані порівнюються з зашумленими, тому мережа навчається звертати увагу на більш широкі властивості.

Отже штучні нейронні мережі є потужним засобом паралельної обробки даних і мають властивості, які дозволяють вирішувати завдання, які алгоритмічними системами вирішити важко або взагалі неможливо. Враховуючи велику різноманітність польотних ситуацій і дефіцит часу на прийняття рішень, застосування нейронних мереж дозволяє формувати алгоритми найкращого виходу з ситуації, які в той же час володіють високою швидкістю.

Література

1. Van Veen, F. & Leijnen, S. (2019). The Neural Network Zoo [Electronic resource] Mode of access: World Wide Web: <https://www.asimovinstitute.org/neural-network-zoo/> (viewed on april 13, 2020). – Title from the screen.
2. Тимочко А.И. Метод определения необходимого наряда средств воздействия для уничтожения заданного числа объектов на основе нечеткой нейронной сети. *Системы обробки інформації*. Харків, 2013. № 9 [116]. С.105-109.
3. Хайкин Саймон Нейронные сети: полный курс : Пер. с англ. – М. : Издательский дом «Вильямс», 2006. – 1104 с.

APPLICATION OF FLOW GRAPHS METHOD FOR ANALYSING LINEAR SYSTEMS OF EQUATIONS

Khaled Khattab

Syria, Aleppo University

Abstract. Our object is to develop an efficient algorithm based on basic theory of flow graphs. This algorithm depends on flow graphs given by Coates. Advantages of the proposed algorithm. SFG-Alg based on flow graph method are discussed.

The studied algorithm shows how the Cramer's rule is applied to directed flow graph for analysis of linear systems.

The proposed algorithm SFG-Alg includes the following steps:

Step 1: Finding All paths.

Step 2: Finding All Loops.

Step 3: Application of the Cramer's rule to compute the solution of the linear system $B.x=b$.

- Theorem (1)

Determinant of a graph

$$\det G = (-1)^n \sum_h (-1)^{L_h} f(h), \quad (1)$$

h : 1-factor, L_h : number of directed cycles.

- Theorem (2)

$$x_k = \frac{\sum_{H(n+1)k} (-1)^{L_h} f(H(n+1)k)}{\sum_h (-1)^{L_h} f(h)}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

$H_{(n+1)k}$: is 1-factor from the node $n+1$ to k in G_{A_u}

A_u : the extended matrix

$$f(h) = \begin{cases} \prod_{(i,j) \in h} f(i,j) & h \neq \emptyset \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

$f(i,j)$: weight of (i,j)

Algorithm SFG-Alg

1) Find $det(A)$

(i) Calculate all of the cycles graph in G_A as follows:

(a) Calculate the Incoming degree of node i ; $i=1,2,...,n$

(b) Calculate all of the cycles graph that contain cycle i

(ii) Delete duplicate directed cycles as follows:

1. Assuming that $numxloop$ is the number of cycles graph in G_A

2. Let $F=\{1,2,...,numxloop\}$

3. We calculate the length of all the cycles graph in F

4. For $i \in F$

 For $k=i+1$ to $numxloop$

 If length $i = \text{length } k$

 If i replacement k then we delete the cycle k

(iii) find the $1_factors$

1. Let $numloop$ is the number of directed cycles after the repeated cycles are deleted.

2. We define $F^{\wedge}=\{1,2,...,numloop\}$

3. For $i \in F^{\wedge}$

 If i is 1_factor then

 We calculate the value i

 Else

 (a) $S=\{i\}$

 (b) For $k=1$ to $numloop$

 If $S \cap \{k\} = \emptyset$ then

 (i) $S=S \cup \{k\}$

 (ii) if S is 1_factor then

 (a) We calculate the value S

 (b) $S=S-\{k\}$

In the (2) calculate the coefficient of the element $(n+1, k)$ from thematrix A_u

$$\Delta_{ij} = (-1)^{n-1} \sum_{H_{ij}} (-1)^{L_h} f(H_{ij}), \quad i \neq j$$

Then we apply Kramer's rule to calculate (1) according to the formula (2) as follows:

- (i) We calculate the paths from the node $n+1$ to k
- (ii) let \tilde{F} is the sum of paths from the node $n+1$ to k
- (iii) We define $F = \tilde{F} \cup F^{\wedge}$
- (iv) $Numlength = |F|$
- (v) For $i \in F$ do

If i is 1_factor from the node $n+1$ to k then

- (i) We calculate the value i
- (ii) We calculate the value of x_k from (2)

Else

- 1. $S = \{i\}$
- 2. For $k = 1$ to $numlength$
 - If $S \cap \{k\} = \emptyset$ then
 - (i) $S = S \cup \{k\}$
 - (ii) If S is 1_factor then
 - (a) We calculate the value S
 - (b) We calculate the value of x_k from (2)
 - (c) $S = S - \{k\}$.

References

1. C. Lanczos: Solution of Systems of Linear Equations by Minimized Iterations. J.Res. Natl.Bur. Stand.
2. G. B. Dantzig. Maximization of a linear function of variables subject to linear inequalities.
3. A. Tustin, Direct Current Machines for Control Systems, Macmillan Company
4. D. Jungnickel, Graphs, Networks and Algorithms, Springer–Verlag 2004.
5. D. B. West, Introduction to Graph Theory. Prentice–Hall, 1996
6. J. Bang-Jensen, and G. Gutin, Digraphs: Theory, Algorithms and Applications, Springer – Verlag, 2002.

РЕЗОЛЮЦІЯ
XXII Міжнародного науково-практичного семінару
«Комбінаторні конфігурації та їхні застосування»
15 травня 2020 р.

Учасники XXII Міжнародного науково-практичного семінару «Комбінаторні конфігурації та їхні застосування», організованого за підтримки Міністерства освіти і науки України, Національним університетом «Запорізька політехніка» (кафедрою системного аналізу та обчислювальної математики) та Льотною академією Національного авіаційного університету (м.Кропивницький).

В семінарі брали участь представники вищих навчальних закладів та організацій:

- Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України
- Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»
- Київський національний університет імені Тараса Шевченка
- Харківський національний університет радіоелектроніки
- Національний авіаційний університет
- Запорізький національний університет
- Центральноукраїнський національний технічний університет
- Харківський національний університет Повітряних Сил імені І.Кожедуба
- Харківський національний університет міського господарства імені О.Бекетова
- ДП "Івченко-Прогрес"
- Військовий інститут телекомунікацій та інформатизації імені Героїв Крут
- Міжнародний науково-навчальний центр інформаційних технологій та систем НАН та МОН України
- Національний університет «Львівська політехніка»
- ДВНЗ «Донбаський державний педагогічний університет»

- Запорізький обласний інститут післядипломної педагогічної освіти
- Ужгородський національний університет
- Донецький національний медичний університет
- Інститут фізики НАН України
- Луцький національний технічний університет
- Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
- Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
- Національний аерокосмічний університет імені М. Є. Жуковського "ХАІ"
- Національний університет водного господарства та природокористування
- Громадська організація «Системні дослідження»
- Полтавський університет економіки і торгівлі
- Центральноукраїнський державний педагогічний університет імені В.Винниченка
- Інститут проблем машинобудування імені А.М. Підгорного НАН України
- Warwick Business School, Great Britain
- Білоруський державний університет
- Вірменський державний педагогічний університет імені Х. Абовяна
- Єреванський державний університет
- Национальный исследовательский университет «МИЭТ»
- ВИНТИ РАН
- Aleppo University, Syria
- KTH Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden

Учасники семінару розглянули найбільш актуальні питання, пов'язані із комбінаторними конфігураціями та їхніми застосуваннями до вирішення сучасних проблем моделювання та прийняття рішень в управлінні складними системами різної природи за такими напрямками:

1. Комбінаторні розміщення, графи і задачі оптимізації на них, автомати, скінченні алгебри, математична логіка і теорія

множин, теорія ігор і теорія прийняття рішень та їхні застосування в різних галузях;

2. Реалізація математичних моделей на дискретних та неперервних множинах (автоматизовані системи керування, системи автоматизованого проектування, системи підтримки прийняття рішень);

3. Програмне забезпечення синтезу та аналізу комбінаторних конфігурацій;

4. Розпізнавання образів, нейромережі та методи машинного навчання;

5. Фрагментарні структури, алгоритми та метаевристики;

6. Топологія та історія розвитку української науки;

7. Кодування, інформаційна безпека та захист інформації.

Проблематика конференції привернула до себе увагу фахівців із різних галузей знань. У науковому заході взяли участь 101 учасник, серед яких:

29 докторів наук (фізико-математичних – 14, технічних – 11, педагогічних – 3, економічних – 1);

47 кандидатів наук (фізико-математичних – 26, технічних – 16, педагогічних – 1; економічних – 1; історичних – 1; медичних – 1; юридичних – 1);

8 викладачів та науковців без наукового ступеня;

14 аспірантів; 3 студенти та магістранти.

Серед учасників конференції були присутні висококваліфіковані науковці, молоді вчені, аспіранти та магістранти з вищих навчальних закладів міст України: Запоріжжя, Кропивницький, Дніпро, Київ, Львів, Харків, Полтава, Ужгород, Рівне, Слов'янськ. Також приймали участь іноземні науковці з країн: Швеція, Великобританія, Росія, Білорусь, Сирія, Вірменія.

Учасники конференції обговорили такі проблемні питання:

- вирішення задач оптимального розміщення виробництва;

- аналіз методів розмітки графів;

- методи оцінки ефективності алгоритмів машинного навчання;

- вирішення задач різних класів обчислювального інтелекту;

- вирішення задач пошуку ідентичних структур, зокрема хімічних сполук;

- задачі перерахування графів певного виду;

- застосування нейромереж до обробки сигналів різного роду;

- формалізація процесів прийняття рішень в умовах невизначеності;

- методика викладання комбінаторного аналізу у вищих навчальних закладах;

- історія розвитку української науки та української наукової мови.

Усвідомлюючи роль і значення розвитку фундаментальних і прикладних досліджень в галузях науки, де широко використовуються комбінаторні конфігурації, учасники конференції вважають за необхідне:

1. Продовжити наукові дослідження за обраними напрямками. Відзначивши високу ефективність дистанційної форми проведення XXII Міжнародного науково-практичного семінару «Комбінаторні конфігурації та їхні застосування», рекомендувати в майбутньому поєднувати дистанційну форму роботи семінару разом з традиційною очною присутністю (за можливістю).

2. Поширювати наукові зв'язки з вітчизняними та закордонними провідними вищими навчальними закладами для організації і реалізації спільних наукових та освітніх проєктів. Рекомендувати для проведення наступних семінарів підготовку матеріалів на англійській мові.

3. Рекомендувати формування секцій за окремими напрямками з огляду на різноплановість цього річних доповідей, необхідність більш глибокого їх обговорення та з метою залучення нових учасників.

4. Розширити географію проведення семінару в наступні роки, змінюючи місце його проведення (Кропивницький, Запоріжжя, інші пропозиції за рішенням оргкомітету).

5. Розмістити інформацію про проведений семінар на

сайті Міністерства освіти і науки України та опублікувати резолюцію конференції і збірник матеріалів на сайтах Національного університету «Запорізька політехніка», Льотної академії Національного авіаційного університету (м.Кропивницький), Центральноукраїнського національного технічного університету.

КОМБІНАТОРНІ КОНФІГУРАЦІЇ ТА ЇХНІ ЗАСТОСУВАННЯ

Матеріали XXII Міжнародного науково-практичного семінару імені А.Я. Петренюка

15-16 травня 2020 року

Редакційна колегія не несе відповідальності за матеріали,
опубліковані в збірнику. Усі вони подані в авторській редакції та
виражають персональну позицію учасників семінару

Підписано до друку 12.06.2020 р.
Формат 60х84/16. Папір офсетний.
Гарнітура Times New Roman. Друк ризограф.
Ум. друк. арк. 13,0
Наклад 300 прим. Зам. №0501

Приватне підприємство «Ексклюзив-Систем»
Свідоцтво держ. реєстру ДК №4470 від 17.01.2013р.
25006, м. Кропивницький, вул. Шевченка, 25
тел. 050-92-20913