

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання контрольних робіт
з дисципліни "Опір матеріалів"
для студентів механічних спеціальностей
заочної форми навчання

2002

Методичні вказівки до виконання контрольних робіт з дисципліни "Опір матеріалів" для студентів механічних спеціальностей заочної форми навчання. /Укладачі: І.Г. Борисенко, В.Г. Шевченко, О.В. Мазіна. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2002. - 30 с.

Укладачі: І.Г. Борисенко, доцент, к.т.н.
В.Г. Шевченко, доцент, к.т.н.
О.В. Мазіна, ст. лаборант

Рецензент: Трескунов Б.О., доцент, к.т.н.

Експерт: Мартовицький Л.М.

Відповідальний
за випуск: Шевченко В.Г.

Затверджено
на засіданні кафедри
"Опір матеріалів"
Протокол № 5 від 5 січня 2002 р

З М І С Т

1 ПЕРЕДМОВА	4
2 Вказівки про порядок виконання контрольних робіт	4
2.1 Побудова епюр повздовжніх сил і переміщень при розтяганні ступінчатого стержня зовнішньою силою та власною вагою (Задача №1)	5
2.2 Розрахунки на міцність та жорсткість при крученні круглого суцільного прямого вала (Задача №5)	9
2.3 Визначення геометричних характеристик складного поперечного перерізу (Задача №7)	15
2.4 Розрахунки на міцність двоопорної балки (Задача №8б)	23
Список літератури	30

1 ПЕРЕДМОВА

ОПР МАТЕРІАЛІВ – загальнотехнічна дисципліна, яка займається розрахунками на міцність, жорсткість та стійкість окремих елементів конструкцій (споруд та машин).

Інженерові будь-якої спеціальності часто припадає виконувати розрахунки на міцність. При виконанні цих розрахунків необхідно прагнути до сполучення надійності роботи конструкції та її раціональності, добиватись найбільшої міцності при найменших затратах матеріалів.

2 ВКАЗІВКИ ПРО ПОРЯДОК ВИКОНАННЯ КОНТРОЛЬНИХ РОБІТ

Кожний студент–заочник виконує ту кількість контрольних робіт, яка передбачена навчальним планом кафедри.

1. Студент зобов'язаний із таблиці, яка додається до умов задачі взяти дані відповідно зі своїм особистим номером (шифром) та першими шістьма літерами російського алфавіту, які потрібно розташувати під шифром, наприклад:

Шифр – 283052.

Букви - а, б, в, г, д, е.

В випадку особистого номера, який складається із семи цифр, друга цифра шифра не враховується.

Із кожного вертикального стовпця таблиці, означеного знизу окремою буквою, необхідно взяти тільки те число, яке відповідає номеру літери.

2. Кожну контрольну роботу потрібно виконувати в окремому зошиті, або на аркушах зведених до зошита нормального формату.

3. Оскільки в різних методичних вказівках існують різні системи одиниць, нижче наведено їх перехід.

Таблиця 2.1 - Деякі одиниці системи МКГСС, СГС
та внесені до них переклади в одиницях СІ

№п/ п	Назва	Скорочене позначен- ня	Розмір одиниць
1	Площа, F	См ²	1 см ² = 10 ⁻⁴ м ²
2	Статичний мо- мент, момент опору S _x , W _x	См ³	1 см ³ = 10 ⁻⁶ м ³
3	Момент інерції J _x	См ⁴	1 см ⁴ = 10 ⁻⁸ м ⁴
4	Об'єм, V	См ³	1 см ³ = 10 ⁻⁶ м ³
5	Сила, P	Кгс, кг	1 кг = 9,81 Н = 10 Н = 0,01 кН 10 кг = 100 Н = 0,1 кН 100 кг = 1000 Н = 1 кН 10 т = 100 кН = 0,1 МН 100 т = 1 · 10 ⁶ Н = 1000 кН = 1 МН
6	Момент сили	кг·м	1 кгм = 9,81 Нм = 10 Нм 1 кгм = 0,01 кНм
7	Напруження	Кг/см ² ; МПа	1 кг/см ² = 9,81 · 10 ⁴ Н/м ² 10 кг/см ² = 1 МН/м ² (МПа) 1600 кг/см ² = 160 МН/м ² (МПа)
8	Потужність	Кгм/сек Кс (кінська сила)	1 кгм/сек = 9,81 = 10 Вт 1 кс = 75 кгм/сек = 735,5 Вт
9	Питома вага сталь	Кг/м ³ γ	1 кг/м ³ = 9,81 = 10 Н/м ³ 78 кН/м ³

2.1 Побудова епіюр повздовжніх сил і переміщень при розтяганні ступінчатого стержня зовнішньою силою та власною вагою (Задача №1)

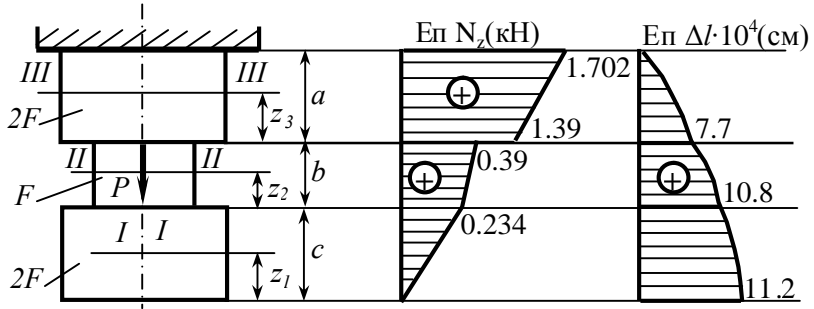
Завдання: Сталевий стержень ($E = 2 \cdot 10^5$ МПа) знаходиться під дією повздовжньої сили P і власної ваги ($\gamma = 78$ кН/м³).

Потрібно: 1. Використовуючи метод перерізів, побудувати епіюру повздовжніх сил по висоті стержня.

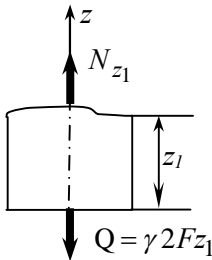
2. Побудувати епіюру переміщення ($\sum \Delta l_i = \sum (\omega_{Ni} / EF_i)$)

Приклад розрахунку

Вихідні данні $P = 1\text{кН}$; $F = 10 \cdot 10^{-4}\text{м}^2$; $a = b = 2\text{м}$; $c = 1,5\text{м}$;



1. Побудова епюр повздовжніх сил.



Ділянка I-I $0 \leq Z_1 \leq C$

$$\sum Pz = 0$$

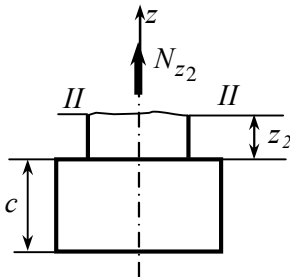
$$N_{z_1} - \gamma 2F z_1 = 0$$

$N_{z_1} = \gamma 2F z_1$ - це пряма нахилена лінія

$$Z_1 = 0; N_{z_1} = 0$$

Q - власна вага;

$$Z_1 = C = 1,5\text{м} \quad N_{z_1} = 78 \cdot 2 \cdot 10^{-4} \cdot 1,5 = 0,234\text{кН.}$$



Ділянка II-II; $0 \leq Z_2 \leq b$

$$N_{z_2} = N_{z_1} + \gamma F z_2 \quad N_{z_2} = N_{z_1} = 0,234\text{кН.}$$

$$Z_2 = 0; Z_2 = b = 2\text{м} \quad N_{z_2} = 0,234 + 78 \cdot 10^{-4} \cdot 2 = 0,234 + 0,156 = 0,39\text{кН.}$$

Ділянка III-III; $0 \leq z_3 \leq a$

$$N_{z_3} = N_{z_2} + P + \gamma 2Fz_3$$

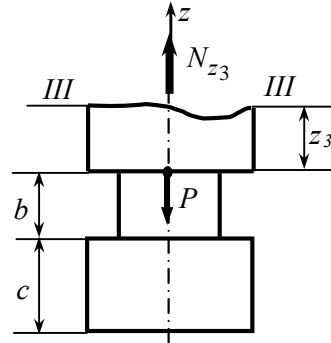
$$z_3 = 0 \quad N_{z_3} = 0,39 + 1 = 1,39 \text{ кН.}$$

$$z_3 = a = 2 \text{ м} \quad N_{z_3} = 1,39 + 78 \cdot 2 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot 2 = 1,39 + 0,312 = 1,702 \text{ кН.}$$

2. Побудова епюри переміщень перерізів по довжині стержня.

В загальному випадку

$$\Delta l = \sum \int_0^l \frac{N_z}{EF} dz.$$



В розглянутому прикладі інтеграли мають вигляд:

$$\Delta l = \frac{1}{E2F} \int_0^a N_{z_3} dz + \frac{1}{EF} \int_0^b N_{z_2} dz + \frac{1}{E2F} \int_0^c N_{z_1} dz.$$

Побудова епюри починається від нульового переміщення, тобто від защемлення стержня.

Оскільки $N_z dz$ – це площа, епюри повздовжніх сил, в межах ділянки, то інтегрування можна замінити добутком відношень площин епюр повздовжніх сил на жорсткість ділянок стержня, тобто:

$$\Delta l = \sum \frac{\omega N_i}{EF_i}.$$

Отже:

$$\Delta l_a = \Delta l_0 + \frac{\omega N_a}{E2F} = 0 + \frac{\left(\frac{1.702 + 1.39}{2}\right) \cdot 10^{-3} \cdot 2}{2 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot 2} = 7.7 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 7.7 \cdot 10^{-4} \text{ см,}$$

$$\Delta l_b = \Delta l_a + \frac{\omega N_b}{EF} = 7.7 \cdot 10^{-6} + \frac{\left(\frac{0.39 + 2.34}{2}\right) \cdot 10^{-3} \cdot 2}{2 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = (7.7 + 3.1) \cdot 10^{-6} = 10.8 \cdot 10^{-6} = 10.8 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 10.8 \cdot 10^{-4} \text{ см,}$$

$$\Delta l_c = \Delta l_b + \frac{\omega N_c}{E2F} = 10.8 \cdot 10^{-6} + \frac{\left(\frac{0.234}{2}\right) \cdot 10^{-3} \cdot 1.5}{2 \cdot 10^5 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot 2} = (10.8 + 0.4) \cdot 10^{-6} = (10.8 + 0.4) \cdot 10^{-6} = 11.2 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 11.2 \cdot 10^{-4} \text{ см.}$$

Примітки.

1. Співмножник у чисельнику 10^{-3} – це перехід від кілоньютонів до меганьютонів, в наведених розрахунках.
2. Так як при визначенні перемішень, в загальній формі, складаються інтеграли, наприклад

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N_z}{EF} dz = \frac{1}{EF} \int_0^l \gamma F Z dz = \frac{\gamma F}{EF} \int_0^l Z dz = \frac{\gamma F Z^2}{EF 2} \Big|_0^l.$$

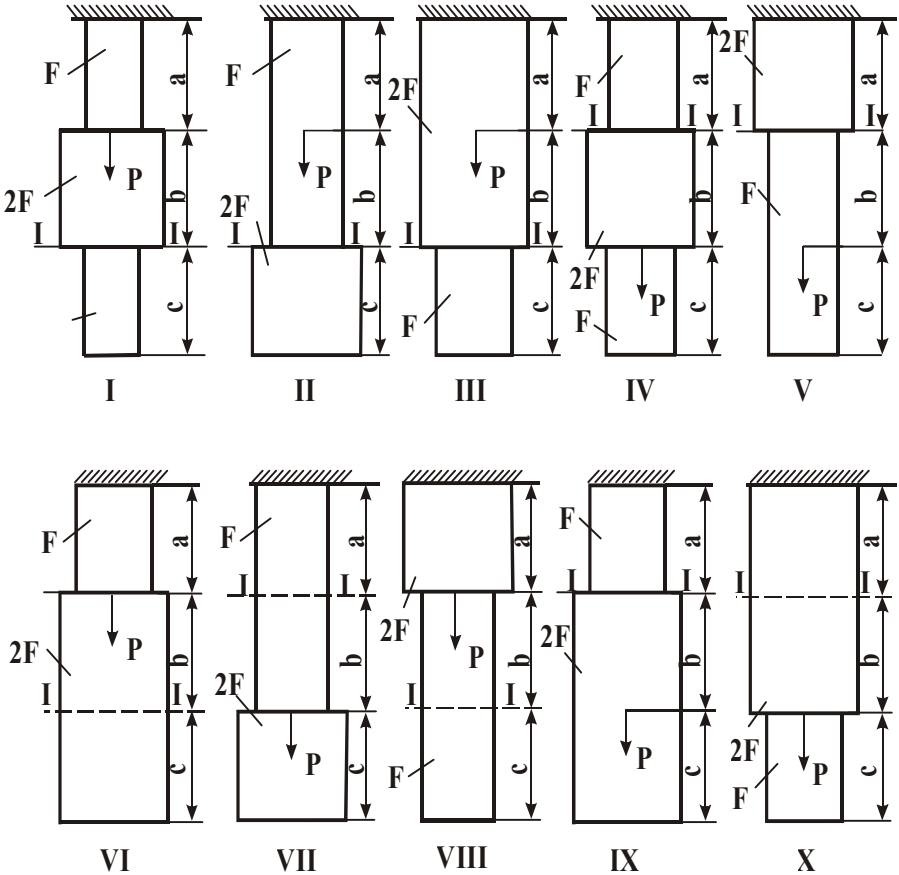


Рисунок 2.1 – Розрахункові схеми до задачі №1

то змінна Z_0 після розкриття інтегралів, має квадратну ступінь. В наслідок цього епюра переміщень матиме вигляд кривої другого порядку (параболи).

Вихідні данні для розрахунку задачі:

- а) таблиця даних (табл. 2.2);
- б) схеми стержнів (рис. 2.1).

Таблиця 2.2– Вихідні дані до задачі №1

№ ряд-ка	Схема	F·10 ⁴ м ²	a	b	c	P, кН
			м			
1	I	11	2.1	2.1	1.1	1.1
2	II	12	2.2	2.2	1.2	1.2
3	III	13	2.3	2.3	1.3	1.3
4	IV	14	2.4	2.4	1.4	1.4
5	V	15	2.5	2.5	1.5	1.5
6	VI	16	2.6	2.6	1.6	1.6
7	VII	17	2.7	2.7	1.7	1.7
8	VIII	18	2.8	2.8	1.8	1.8
9	IX	19	2.9	2.9	1.9	1.9
0	X	20	3.0	3.0	2.0	2.0
	е	в	г	д	е	г

2.2 Розрахунки на міцність та жорсткість при крученні круглого суцільного прямого вала (Задача №5)

Завдання: До сталевго валу прикладені три відомих моменти кручення M_1, M_2, M_3 .

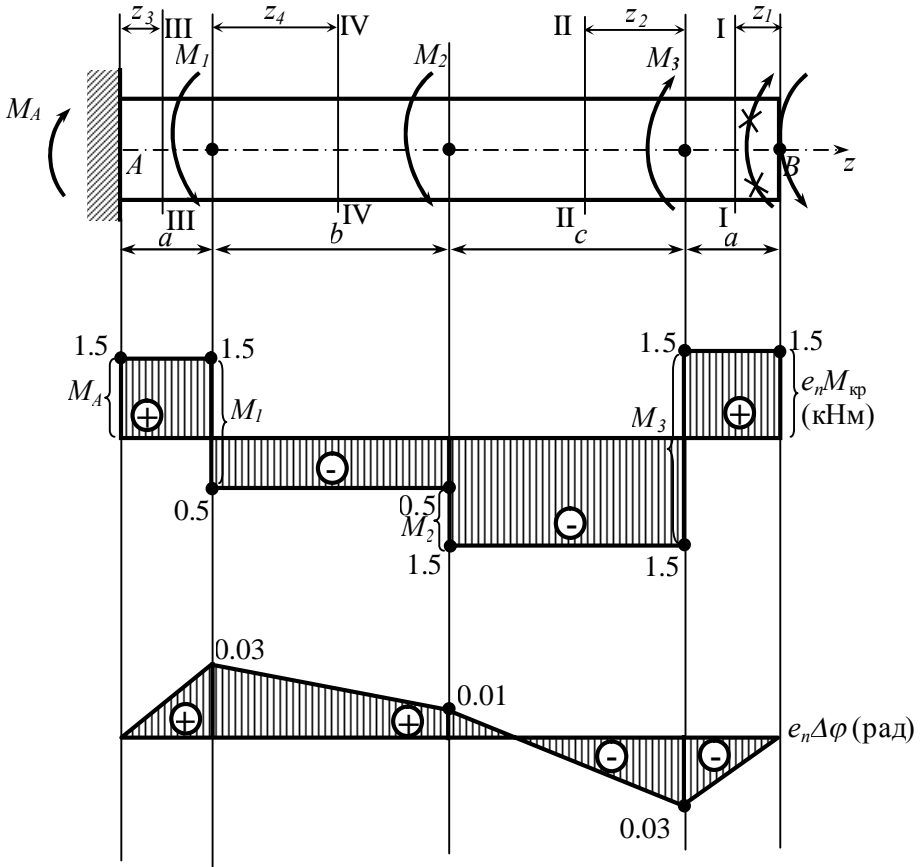
Потрібно:

1. Встановити при яких значеннях моменту X , кут повороту правого кінцевого перерізу валу дорівнює нулю.

2. Враховуючи знайдене значення моменту X і побудувати епюру крутних моментів.

3. Для заданого значення $[\tau]$ знайти діаметр валу, із розрахунку на міцність і округлити його значення до найближчого нормального діаметра: 30, 35, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 125, 140, 160, 180, 200.

4. Побудувати епюру кутів закручування.



5. Знайти найбільший відносний кут закручування.

Приклад розрахунку

Вихідні данні: $a=1$ м; $b=1.6$ м; $c=1.5$ м.

$M_1=2$ кНм; $G=8 \cdot 10^4$ МПа

$M_2=1$ кНм; $[\tau]=50$ МПа

$M_3=3$ кНм.

1. Із умов завдання складається умова рівноваги і визначається невідомий момент X (по величині і знаку).

Умова $\varphi_B=0$

$$\varphi_B = \frac{-X(2a+b+c) - M_3(a+b+c) + M_2(a+b) + M_1a}{G \cdot I_p} = 0$$

$$X = \frac{-M_3(a+b+c) + M_2(a+b) + M_1a}{2a+b+c} =$$

$$= \frac{-3(1+1.6+1.5) + 1(1+1.6) + 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 + 1.6 + 1.5} = -1.55 \text{ кНм.}$$

Знак “-“ вказує на те, що напрямок моменту X , який показаний в завданні, не підтверджується. Момент X повинен мати зворотний напрямок і порівнюватись 1.5 кНм.

$$X = 1.5 \text{ кНм.}$$

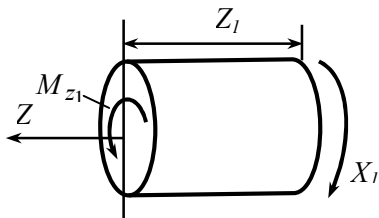
Визначається опорний момент M_A . Попередньо напрямок моменту M_A взято довільно.

$$\sum M_A = 0; \quad X - M_3 + M_2 + M_1 - M_A = 0;$$

$$M_A = X - M_3 + M_2 + M_1 = 1.5 - 3 + 1 + 2 = 1.5 \text{ кНм.}$$

Додатний знак “+” підтверджує попередній напрямок моменту M_A . $M_A = 1.5$ кНм.

2. Побудова епюри крутних моментів. Для спрощення підрахунків, краще взяти два перерізи від вільного кінця, а два від защемлення.



Ділянка I-I $0 \leq Z_1 \leq a$

$$\sum M_Z = 0$$

$$M_{Z2} + X - M_3 = 0 \quad M_{Z2} = X - M_3$$

$$M_{Z2} = 1.5 - 3 = -1.5 \text{ кНм.}$$

Ділянка II-II $0 \leq Z_2 \leq c$

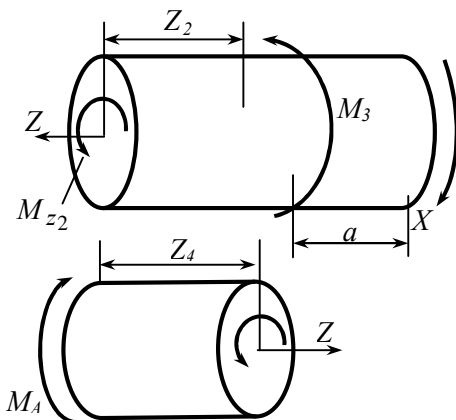
$$\sum M_Z = 0; \quad M_{Z4} - M_A = 0; \quad M_{Z4} = M_A;$$

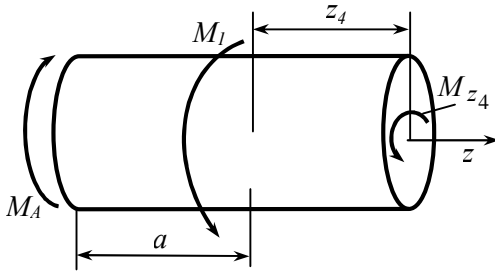
$$M_{Z4} = 1.5 \text{ кНм}$$

Ділянка I-I $0 \leq Z_1 \leq a$

$$\sum M_Z = 0; \quad M_{Z1} - X = 0 \quad M_{Z1} = X,$$

$$M_{Z1} = 1.5 \text{ кНм} = \text{const.}$$





$$\begin{aligned} \text{Ділянка IV-IV } 0 \leq z_3 \leq b \\ \Sigma M_z = 0 \quad M_{z_4} + M_I - M_A = 0 \\ M_{z_4} = M_A - M_I = 1.5 - 2 = \\ = 0.5 \text{ кНм} \end{aligned}$$

По підрахованим значенням крутних моментів у вибраному довільному масштабі будується епюра $M_{кр}$.

Перевірка епюри. В перерізах валу, де прикладені зосереджені моменти на епюрі $M_{кр}$ повинні бути стрибки, що дорівнюють прикладеним моментам.

3. Із умов міцності по дотичним напруженням визначається діаметр валу.

$$\text{Умова міцності } \tau = \frac{M_{кр}^{max}}{W_\rho} \leq [\tau], \text{ враховуючи, що}$$

$$W_\rho = \frac{\pi d^3}{16} \cong 0,2 d^3, \text{ визначається } d.$$

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_{кр}^{max}}{0,2 \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{1,5 \cdot 10^{-3}}{0,2 \cdot 50}} = 0,053 \text{ м,}$$

де $1,5 \cdot 10^{-3}$ – це перехід від кНм до Нм. Отже одержаний діаметр 53 мм округляється до найближчого значення нормальних діаметрів, тобто $d = 50$ мм.

4. Побудова епюри кутів закручення.

Епюра $\Delta\varphi$ (рад) будується від защемлення у загальному вигляді

$$\Delta\varphi = \sum \int_0^l \frac{M_z}{GJ_\rho} dz.$$

Оскільки $M_z dz$ – це площа епюри крутних моментів, то підрахунки спрощуються

$$\Delta\varphi = \sum \frac{\omega_{M_i}}{GJ_\rho}$$

При побудові епюру кутів закручування слід мати на увазі, що чергова зміна кута, в межах чергової ділянки, залежить від знака крутного моменту в межах цієї ділянки

$$\varphi_a = \varphi_0 + \frac{\omega_{M_i}}{GJ_\rho} = 0 + \frac{1,5 \cdot 10^{-3} \cdot 1}{8 \cdot 10^4 \cdot 0,1 \cdot (0,05)^4} = 0,03 \text{ рад.}$$

Примітка: $J_\rho = \frac{\pi d^4}{32} \cong 0,1 d^4$ оскільки по всій довжині вал має один діаметр, то слід попередньо підрахувати жорсткість, яка буде постійною для всіх ділянок.

$$\text{Отже } J_\rho \cdot G = 8 \cdot 10^4 \cdot 0,1 (0,05)^4 = 0,0496 = 0,05,$$

$$\varphi_B = \varphi_a - \frac{\omega_{M_B}}{GJ_\rho} = 0,03 - \frac{0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 1,6}{0,05} = 0,03 - 0,016 = 0,014 \text{ рад,}$$

$$\varphi_c = \varphi_B - \frac{\omega_{M_c}}{GJ_\rho} = 0,014 - \frac{0,5 \cdot 10^{-3} \cdot 1,5}{0,05} = 0,014 - 0,045 = -0,031 \text{ рад,}$$

$$\varphi_a = \varphi_c - \frac{\omega_{M_a}}{GJ_\rho} = -0,031 + \frac{1,5 \cdot 10^{-3} \cdot 1}{0,05} = -0,031 + 0,03 \cong 0.$$

Останній підсумок повинен дорівнюватись нулю, так як невідомий момент X визначався із умов що $\varphi_B = 0$. В розглянутому прикладі похибка $\delta = 3,3\%$, що вважається задовільним, оскільки починаючи з визначення діаметру валу брались відповідні припуски.

5. Найбільший відносний кут закручування

$$\theta = \frac{M_{кр}^{max}}{G \cdot J \cdot \varphi} = \frac{1,5 \cdot 10^{-3}}{0,05} = 0,03 \frac{\text{рад}}{\text{м}} = 1,72 \frac{0}{\text{м}}.$$

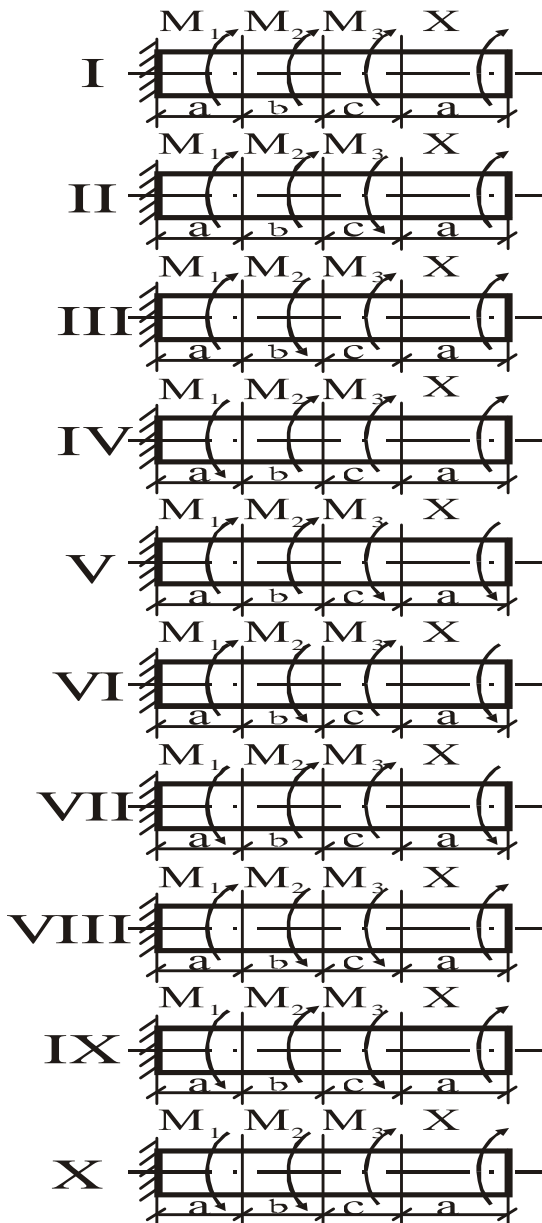


Рисунок 2.2– Схеми навантаження валів до задачі №5

Таблиця 2.3 - Вихідні дані для розрахунку задачі №5

№ строки	Схема	Відстань, м			Момент, кН·м			[τ] МПа
		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>M₁</i>	<i>M₂</i>	<i>M₃</i>	
1	I	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	1,1	35
2	II	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	1,2	40
3	III	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3	45
4	IV	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	1,4	50
5	V	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	55
6	VI	1,6	1,6	1,6	1,6	0,6	1,6	60
7	VII	1,7	1,7	1,7	1,7	0,7	1,7	65
8	VIII	1,8	1,8	1,8	1,8	0,8	1,8	70
9	IX	1,9	1,9	1,9	1,9	0,9	1,9	75
0	X	2,0	2,0	2,0	2,0	1,0	2,0	80
	<i>в</i>	<i>г</i>	<i>д</i>	<i>е</i>	<i>з</i>	<i>п</i>	<i>е</i>	<i>в</i>

2.3 Визначення геометричних характеристик складного поперечного перерізу (Задача №7)

Завдання: Для заданого поперечного перерізу, потрібно:

1. Накреслити в масштабі (довільному, але точному) заданий переріз так, як він наведений в завданні.
2. Вписати розрахункові дані для складових фігур перерізу із таблиць сортаментів.
3. Провести допоміжні осі координат і відносно цих осей знайти положення центру ваги .
4. Знайти осьові (екваторіальні) і відцентрові моменти інерції відносно центральних осей (X_c, Y_c)
5. Визначити напрям головних центральних осей ($X(u); Y(v)$) і провести головні осі.
6. Знайти моменти інерції відносно головних центральних осей.
7. Визначити моменти опору заданого порізу.
8. Показати, як повинно прикладати площу зовнішніх навантажень, щоб переріз спричиняв максимальний опір.

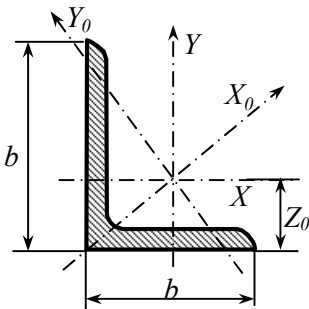
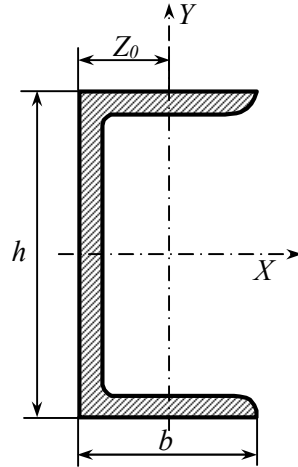
Приклад розрахунку

Переріз складається із швелера №20 та рівнобічного кутника №10 (100 · 100 · 10), як показано на рисунку.

Виписуються розрахункові данні в положенні фігур в таблицях сортаменту.

Швелер №20

$$\begin{aligned} h &= 200 \text{ мм}; \\ b &= 76 \text{ мм}; \\ F &= 23.4 \text{ см}^2; \\ J_x &= 1520 \text{ см}^4 \\ J_y &= 113 \text{ см}^4 \\ Z_0 &= 2.07 \text{ см} \end{aligned}$$



Кутник №10 (100x100x10)

$$\begin{aligned} b &= 100 \text{ мм}; \\ F &= 19.2 \text{ см}^2; \\ J_x &= J_y = 179 \text{ см}^4 \\ J_{x_0} &= 284 \text{ см}^4 \\ J_{y_0} &= 74.1 \text{ см}^4 \\ Z_0 &= 2.83 \text{ см} \end{aligned}$$

3. Проводяться допоміжні осі координат. Краще всього ці осі провести по нижньому і лівому обрисі перерізу. В цьому випадку переріз буде знаходитись в першому квадрантові і усі координати матимуть додатний знак. Означаються фігури швелер-1, кутник-2.

Визначити координати центра ваги перерізу

$$x_c = \frac{\sum F_i x_{ci}}{\sum F_i} = \frac{F_1 x_{c1} + F_2 x_{c2}}{F_1 + F_2} = \frac{23.4 \cdot 10 + 19.2 \cdot 17.17}{23.4 + 19.2} = 13.2 \text{ см},$$

де $X_{c1} = \frac{h_{ш}}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ см};$

$$X_c = h_{ш} - z_0 = 20 - 2.83 = 17.17 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{\sum F_i y_{ci}}{\sum F_i} = \frac{F_1 y_{c1} + F_2 y_{c2}}{F_1 + F_2} = \frac{23.4 \cdot 5.53 + 19.2 \cdot 10.42}{23.4 + 19.2} = 7.74 \text{ см},$$

де $Y_{c1} = B_{ш} - Z_{0ш} = 76 - 2.07 = 5.53 \text{ см};$

$$Y_{c2} = B_{ш} + Z_{0л} = 7.6 + 2.83 = 10.43 \text{ см};$$

4. Визначаються моменти інерції, враховуючи паралельний переніс осей.

а) Осьові

$$I_{x_c} = I_{x_c}^I + I_{x_c}^{II} = 226.25 + 318.96 = 545.21 \text{ см}^3,$$

де $I_{x_c}^I = I_{x1} + a_1^2 F_1 = 113 + (2.2)^2 \cdot 23.4 = 226.25 \text{ см}^4,$

$$I_{x_c}^{II} = I_{x1} + a_2^2 F_2 = 179 + (2.7)^2 \cdot 19.2 = 318.96 \text{ см}^4.$$

Примітка: Оскільки швелер відносно положення в таблиці сортamentів повернутий на 90° , то повинні змінитись і моменти інерції, отже $I_{x1} = 113 \text{ см}^4$, де

$$a_1 = y_c + y_{c1} = 7.74 - 5.53 = 2.2 \text{ см},$$

$$a_2 = y_{c2} + y_c = 10.43 - 7.74 = 2.7 \text{ см},$$

$$I_{y_c} = I_{y_c}^I + I_{y_c}^{II} = 1759.6 + 481.6 = 2241.2 \text{ см}^4,$$

де $I_{y_c}^I = I_{y1} + b_1^2 F_1 = 1520 + 3.2^2 \cdot 23.4 = 1759.6 \text{ см}^4.$

$$-I_{y_c}^{II} = I_{y2} + b_2^2 F_2 = 179 + 3.9^2 \cdot 19.2 = 481.6 \text{ см}^4,$$

де $b_1 = X_c - X_{c1} = 13.2 - 10 = 3.2 \text{ см},$

$$b_2 = X_{c2} - X_c = 17.17 - 13.2 = 3.97 \text{ см}.$$

б) Відцентровий.

$$I_{y_c x_c} = I^I_{y_c x_c} + I^{II}_{y_c x_c} = 164.7 + 310.8 = 475.5 \text{ см}^4,$$

$$\text{де } I_{x_c y_c}^I = I_{x_1 y_1} + a_1 \cdot b_1 \cdot F_1 = 0 + (-2.2) \cdot (-3.2) \cdot 23.4 = 164.7 \text{ см}^4$$

$$I_{x_c y_c}^{II} = I_{x_2 y_2} + a_2 \cdot b_2 \cdot F_2 = 105 + 2.7 \cdot 3.97 + 19.2 = 310.8 \text{ см}^4.$$

Примітка:

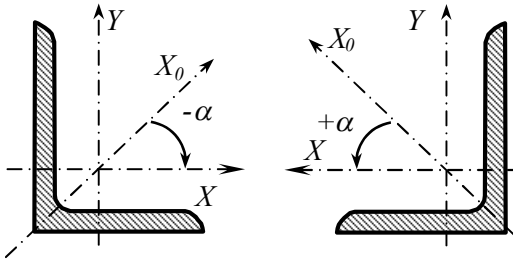
1. Фігури, які мають осі симетрії, мають нульові моменти інерції відносно своїх центральних осей, отже $I_{x_1 y_1} = 0$.

2. Центральні осі кутника не симетричні, тому відцентровий момент інерції для кутника визначається:

$$I_{x_2 y_2} = \frac{I_{x_0} - I_{y_0}}{2} \sin 2\alpha = \frac{284 + 74.1}{2} (+1) = 104.95 \approx 105 \text{ см}.$$

Для рівнобічного кутника головні осі X_0, Y_0 відносно центральних осей повернуті на кут 45° , отже $\sin 2\alpha = \sin 90^\circ = 1$, але ця одиниця може бути як додатною, так і від'ємною. Це визначається за таким правилом.

Якщо до суміщення головної осі з центральною, головну вісь потрібно повернути за годинниковою стрілкою, то $\sin 2\alpha = -1$, а якщо проти годинникової стрілки, то $\sin 2\alpha = +1$.



3. Відстані між вісями a_1, a_2, b_1, b_2 , мають знаки “+” або “-” відповідно до правил декартової системи координат, отже $-a_1; +a_2; -b_1; +b_2$.

5. Визначається напрямок головних осей

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{x_c y_c}}{I_{y_c} - I_{x_c}} = \frac{2 \cdot 475.5}{2241.2 - 545.21} = 0.561$$

$$\operatorname{arctg} 0.561 = 29.29^\circ, \text{ отже } 2\alpha_0 = 29.29^\circ; \alpha_0 = 74.64^\circ.$$

Знак кута додатний, тому центральні вісі потрібно повернути проти годинникової стрілки на кут $\alpha_0=14.64$ і позначити $\bar{X}(u)$ та $\bar{Y}(v)$.

Перевірка визначеного кута нахилу.

$$I_{xy}^- = \frac{I_{x_c} - I_{y_c}}{2} \sin 2\alpha_0 + I_{x_c y_c} \cos 2\alpha_0 = 0$$

$$I_{xy}^- = \frac{545.21 - 2241.2}{2} (0.489) + 475.5(0.872) = -414.67 + 414.63 \approx 0$$

перевірка задовольняється.

6. Визначення головних (екстремальних) моментів інерції

$$I_{min}^{max} = \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_c} - I_{y_c})^2 + 4I_{x_c y_c}^2} =$$

$$= \frac{5.45.21 + 2241.2}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(545.2 - 21 - 2241.2)^2 + 4 \cdot 475.5^2} =$$

$$= 1393.2 \pm 972.2;$$

$$I_{max} = 1393.2 + 972.2 = 2365.4 \text{ см}^4 = I_{\bar{y}(v)};$$

$$I_{min} = 1393.2 - 972.2 = 214 \text{ см}^4 = I_{\bar{x}(u)}.$$

Перевірка: $I_{x_c} + I_{y_c} = I_{max} + I_{min}$

$$2241.2 + 545.21 = 2365.4 + 421; \quad 2786.4 = 2786.4.$$

Для визначення яким осям належать I_{max} та I_{min} потрібно звернутись до інтегралів $I_x = \int y^2 dF$ та $I_y = \int x^2 dF$. Момент інерції буде той більшим у якому координата X чи Y більша.

В нашому прикладі X (найбільше віддалення контуру фігури від головної осі Y) значно більше ніж y відносно \bar{X} , отже

$$I_{max} = I_{\bar{y}(v)}^-; \quad I_{min} = I_{\bar{x}(u)}^-.$$

7. Визначення моментів опору.

$$W_x = \frac{I_{\bar{x}(u)}}{y_{max}} = \frac{421}{9.25} = 45.5 \text{ см}^3; \quad W_y = \frac{I_{\bar{y}(v)}}{x_{max}} = \frac{2365.4}{14.71} = 160.8 \text{ см}^3.$$

Де Y_{max} та X_{max} – це відстані від головних осей до найбільш віддалених точок поперечного перерізу. Ці відстані визначаються безпосередньо замірами на рисунку, який виконано в масштабі.

В нашому прикладі $X_{max}=14.7$ см, $Y_{max}=9.25$ см.

8. Визначення напрямку зовнішніх навантажень.

Оскільки момент опору W_y в 3.5 разів більше ніж W_x , то максимальною спроможність чинити опір зовнішньому навантаженню буде тоді, коли площа зовнішніх навантажень спрямована в напрямку головної осі $\bar{X}(u)$ відносно осі $\bar{Y}(v)$ поперечного перерізу.

Таблиця 2.4 - Вихідні данні для розрахунку задачі № 7

№ строки	Тип переріза	Швелер	Рівнобічний кутник	Двотавр
1	I	14	80x80x8	12
2	II	16	80x80x6	14
3	III	18	90x90x8	16
4	IV	20	90x90x7	18
5	V	22	90x90x6	20a
6	VI	24	100x100x8	20
7	VII	27	100x100x10	22a
8	VIII	30	100x100x12	22
9	IX	33	125x125x10	24a
0	X	36	125x125x12	24
	e	z	d	e

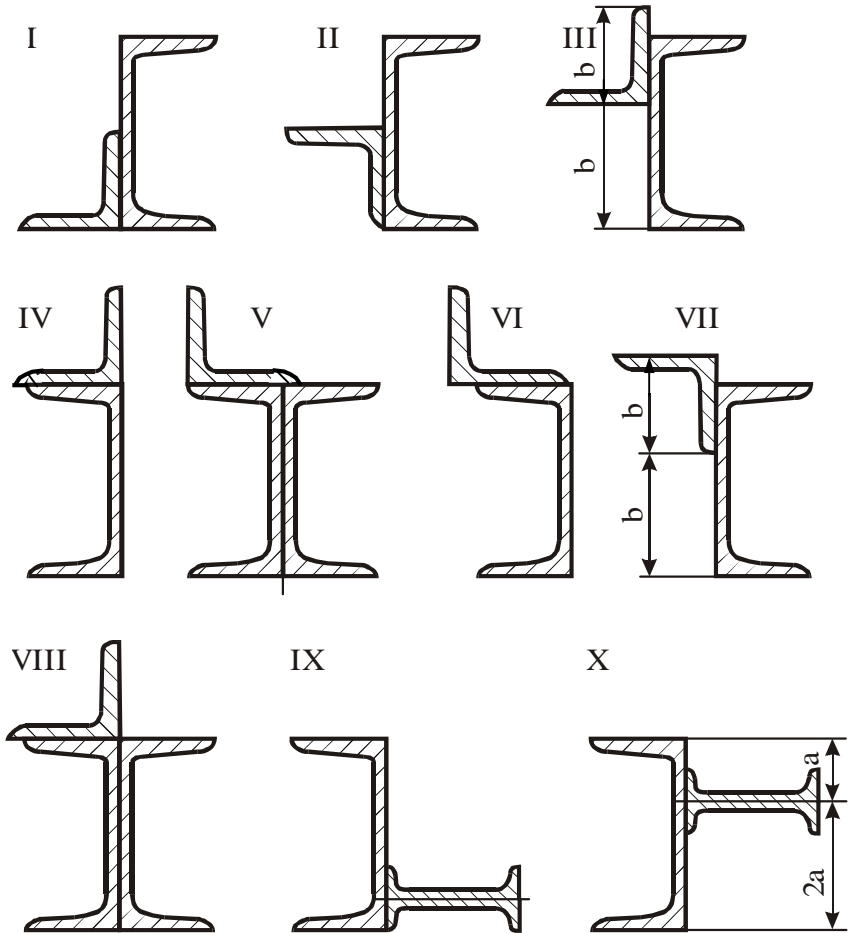


Рисунок 2.3 – Розрахункові схеми до задачі №7

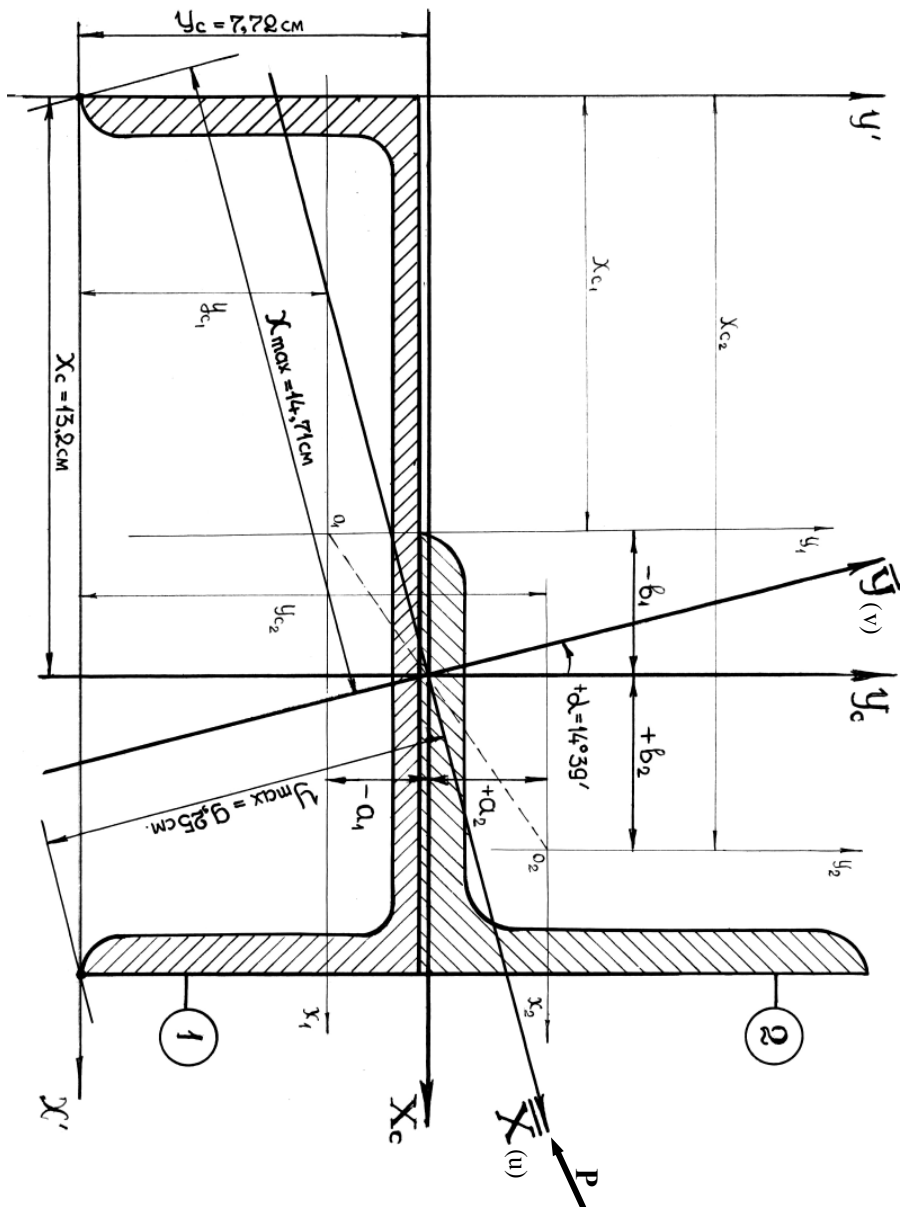


Рисунок 2.5 – Розрахункова схема до задачі №7

2.4 Розрахунки на міцність двоопорної балки (Задача №86)

Завдання. Із умов міцності по нормальним напруженням потрібно визначити сталеву балку двотаврового перерізу при $[\sigma]=160$ МПа.

Рішення.

1. Із таблиць, згідно заданій схемі, виписати вихідні дані по довжинах прольотів, враховуючи відношення $\frac{a_i}{a}$.

2. Накреслити схему балки, враховуючи визначені довжини a_i (відповідно), бо розташування навантажень може бути іншим, як показано в схемі.

3. Визначити реакції опору, враховуючи рівняння рівноваги і обов'язково зробити перевірку ($\sum P_y = 0$).

4. Розглядаючи послідовно усі ділянки записати закони зміни Q_y та M_x і побудувати їх епюри.

5. Проаналізувати епюри, визначити небезпечний переріз. Це буде переріз, у якому виникає максимальний згинальний момент (M_{max}).

6. Із умов міцності по нормальним напруженням ($\sigma = \frac{M_{x,max}}{W_x} \leq [\sigma]$) визначити чисельне значення моменту опору.

7. Користуючись таблицею сортаментів для двотаврових балок підібрати номер профілю.

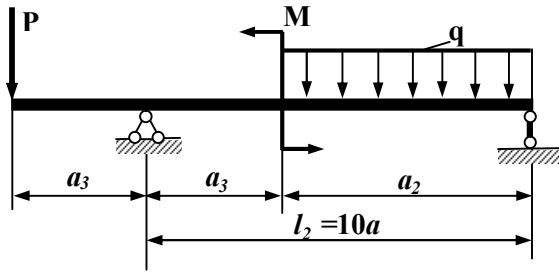
Оскільки, як правило, підрахований момент опору відрізняється від табличних, то потрібно зробити перевірку вибраного профілю, розглянувши два суміжні профілі.

Приклад розрахунку

1. Схема, відповідно номеру залікової книжки, вихідні дані (таблиця):

$$l_2 = 10 \text{ м}; \quad \frac{a_2}{a} = 3; \quad \frac{a_3}{a} = 4; \quad P = 5 \text{ кН}; \quad M = 2 \text{ кНм}; \quad q = 1 \frac{\text{кН}}{\text{м}};$$

$$[\sigma] = 160 \text{ МПа.}$$

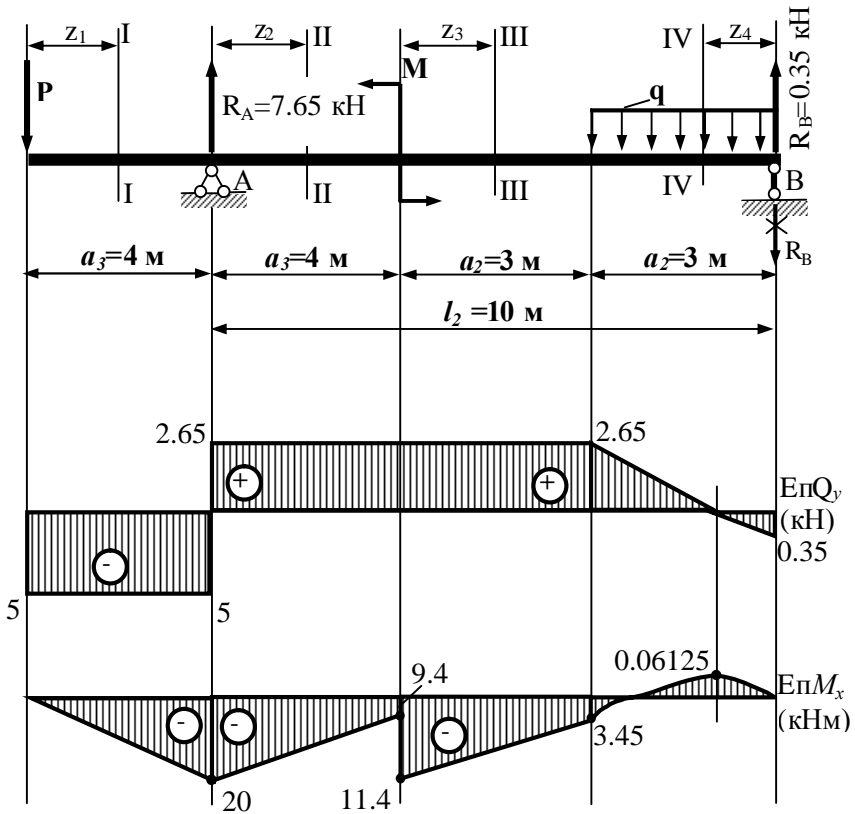


Визначення кількості та довжини ділянок

$l_2 = 10a = 10\text{ м}$, звідки $a = 1\text{ м}$, тоді $a_2 = 3\text{ м}$, $a_3 = 4\text{ м}$.

2. Враховуючи знайдені довжини ділянок, дійсна схема буде такою:

Отже дійсна схема має чотири ділянки.



3. Визначення реакцій опору, попередньо спрямував їх довільно.

$$\sum M_A = 0; 4P + M - 3q\left(\frac{3}{2} + 3 + 4\right) - R_B \cdot 10 = 0, \text{ звідки}$$

$$R_B = \frac{5 \cdot 4 + 2 - 25.5}{10} = -0.35 \text{ кН.}$$

Знак “-” вказує на те, що дійсний напрямок реакції R_B - протилежний попередньому.

$$\sum M_B = 0 \quad P \cdot 14 - R_A \cdot 10 + M + q \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = 0,$$

$$R_A = \frac{14 \cdot 5 + 2 + 4.5}{10} = \frac{76.5}{10} = 7.65 \text{ кН.}$$

Перевірка:

$$\sum P_y = 0, \quad -P + R_A - 3q + R_B = 0, \quad -5 + 7.65 - 3 + 0.35 = 0.$$

4. Побудова епюр Q_y і M_x із за-

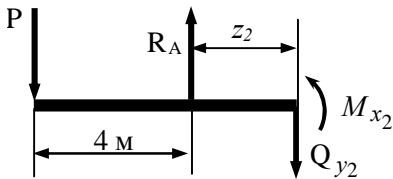
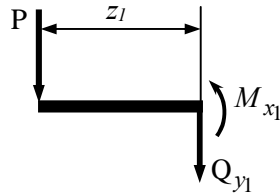
стосуванням методу перерізів.

Ділянка I-I $0 \leq z_1 \leq 4 \text{ м}$,

$$Q_{y1} = -P, \quad Q_{y1} = -5 \text{ кН} = \text{const.}$$

$$M_{x1} = -P \cdot z_1, \quad z_1 = 0, \quad M_{x1} = 0$$

$$z_1 = 4 \text{ м}, \quad M_{x1} = -5 \cdot 4 = -20 \text{ кНм.}$$



Ділянка II-II $0 \leq z_2 \leq 4 \text{ м}$,

$$Q_{y2} = -P + R_A,$$

$$Q_{y2} = -5 + 7.65 = 2.65 \text{ кН.}$$

$$M_{x2} = -P(4 + z_2) + R_A \cdot z_2,$$

$$z_2 = 0, \quad M_{x2} = -5 \cdot 4 = -20 \text{ кНм,}$$

$$z_2 = 4 \text{ м}, \quad M_{x2} = -5 \cdot 8 + 7.65 \cdot 4 = -9.4 \text{ кНм.}$$

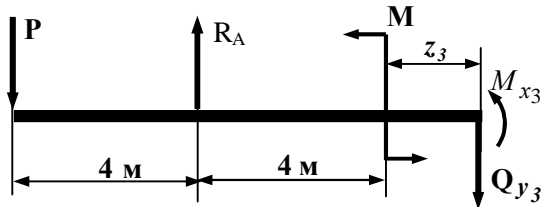
Ділянка III-III

$$0 \leq z_3 \leq 3 \text{ м},$$

$$Q_{y3} = -P + R_A$$

$$Q_{y3} = -5 + 7.65 =$$

$$= 2.65 = \text{const}$$

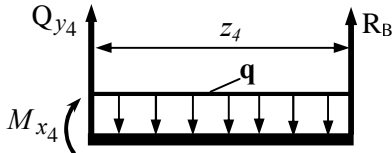


$$M_{x_3} = -P(8 + z_3) + R_A(4 + z_3) - M \quad z_3 = 0$$

$$M_{x_3} = -5 \cdot 8 + 7.65 \cdot 4 - 2 = -40 + 30.6 - 2 = -11.4 \text{ кНм.}$$

$$z_3 = 3 \text{ м,}$$

$$M_{x_3} = -5 \cdot 11 + 7.65 \cdot 7 - 2 = -55 + 53.55 - 2 = -3.45 \text{ кНм.}$$



Ділянка IV-IV $0 \leq z_4 \leq 3 \text{ м,}$

$$Q_{y4} = -R_B + q \cdot z_4, \quad z_4 = 0,$$

$$Q_{y4} = -R_B = -0.35 \text{ кН, } z_4 = 3 \text{ м,}$$

$$Q_{y4} = -0.35 + 3 \cdot 1 = 2.65 \text{ кН,}$$

$$M_{x4} = R_B \cdot z_4 - q \frac{z_4^2}{2} \text{ - це парабола,}$$

бо z_4^2 .

Визначимо M_{x4} на початку і в кінці ділянки:

$$z_4 = 0, \quad M_{x4} = 0, \quad z_4 = 3 \text{ м, } M_{x4} = 0.35 \cdot 3 - \frac{1 \cdot 3^2}{2} = -3.45 \text{ кНм.}$$

Оскільки в межах цієї ділянки поперечна сила має перехід через базу зі зміною знаків, то на епюрі згинальних моментів має бути екстремум.

Визначення екстремуму: Визначимо довжину z_0 , при якій $Q_{y4} = 0$, порівнянням нулю аналітичного виразу поперечної сили

$$Q_{y4} = -R_B + q \cdot z_0 = 0, \text{ звідки } z_0 = \frac{R_B}{q} = \frac{0.35^2}{1} = 0.35 \text{ м.}$$

Підставити в рівняння для M_{x4} $z_4 = 0.35 \text{ м}$

$$M_{x4(z=0.35 \text{ м})} = 0.35 \cdot 3.35 - 1 \frac{3.35^2}{2} = 0.1225 - 0.06125 = 0.06125 \text{ кНм.}$$

5. Аналіз епюри M_x показує, що небезпечний переріз балки знаходиться на опорі А, де $M_x = M_{x_{max}}$ кНм, отже $M_{x_{max}} = 20 \text{ кНм.}$

6. Із умов міцності по нормальним напруженням визначається момент опору небезпечного перерізу

$$\sigma = \frac{M_{x_{max}}}{W_x} \leq [\sigma], \text{ звідки } W_x = \frac{M_{x_{max}}}{[\sigma]} = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{160} = 0.000125 \text{ м}^3 = 125 \text{ см}^3.$$

7. Користуючись таблицею сортamentів підбирається номер профілю двотаврової балки.

Двотавр №18, $W_x = 143 \text{ см}^3$.

Перевірка раціональності

$$\sigma = \frac{M_{x_{max}}}{W_x} = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{143 \cdot 10^{-6}} = 139.86 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа, недовантаження}$$

$$\delta = \frac{160 - 140}{160} \cdot 100\% = 12.5\%.$$

Двотавр №16, $W_x = 109 \text{ см}^3$.

Перевірка

$$\sigma = \frac{M_{x_{max}}}{W_x} = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{109 \cdot 10^{-6}} = 183.48 \text{ МПа} > [\sigma] = 160 \text{ МПа.}$$

$$\text{Перевантаження } \delta = \frac{160 - 183.48}{160} \cdot 100\% = 14.67\%.$$

Зроблені розрахунки показують, що для забезпечення умов міцності **необхідно брати двотавр №18**.

Таблиця 2.6 – Вихідні дані для розрахунку задачі №8^Б

№ стр оки	Схе- ма	l_2	Відстань у долях прольоту			М кНм	Р кН	q кН/м	Пр імі тка
			a_1/a	a_2/a	a_3/a				
1	I	6	1	9	1	1.0	1.0	1.0	
2	II	7	2	8	2	2.0	2.0	2.0	
3	III	3	3	7	3	0.3	0.3	0.3	
4	IV	4	4	6	4	0.4	0.4	0.4	
5	V	5	5	5	5	0.5	0.5	0.5	
6	VI	6	6	6	1	0.6	0.6	0.6	
7	VII	7	7	7	2	0.7	0.7	0.7	
8	VIII	8	8	8	3	0.8	0.8	0.8	
9	IX	9	9	9	4	0.9	0.9	0.9	
0	X	10	10	10	5	1.0	1.0	1.0	
	<i>e</i>	<i>e</i>	<i>z</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>z</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	

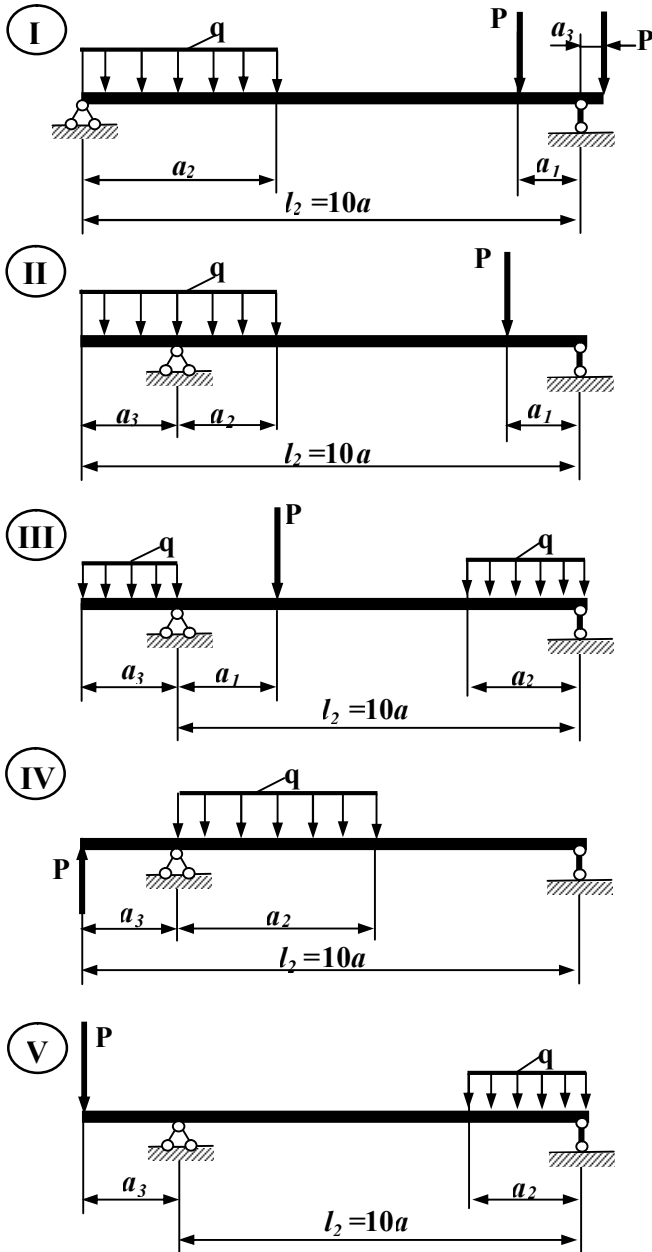


Рисунок 2.6 - Розрахункові схеми до задачі №86

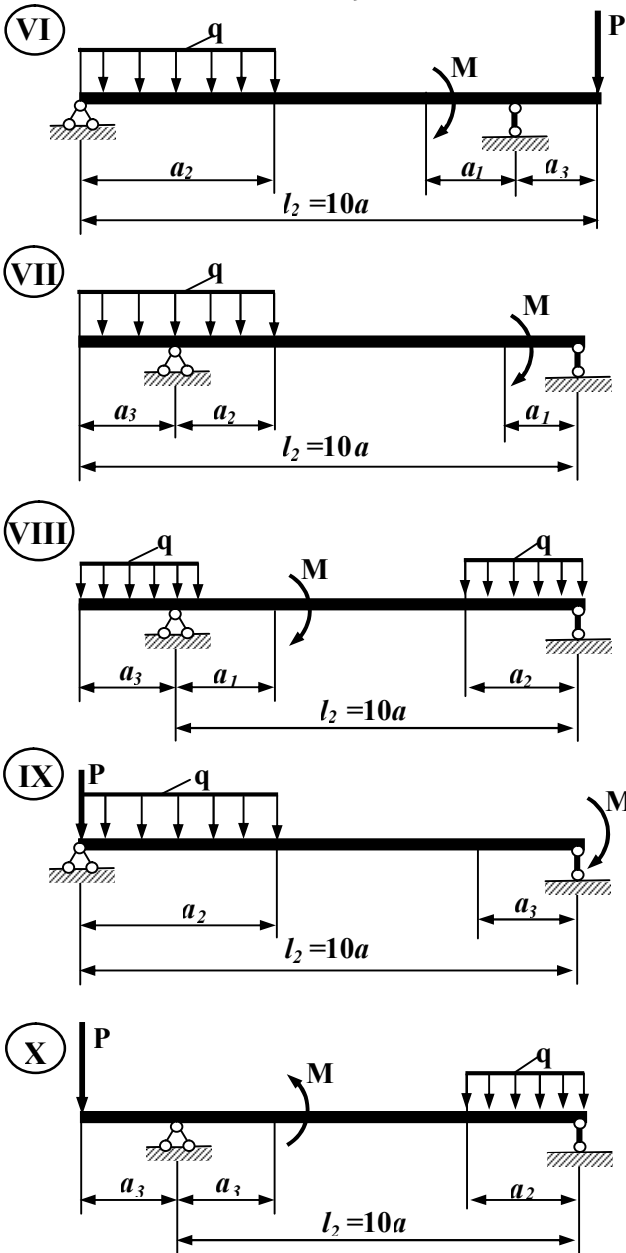


Рисунок 2.7 - Розрахункові схеми до задачі №86 (продовження)

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Опір матеріалів: Підручник / Г.С. Писаренко, О.А. Квітка, Е.С. Уманський; за ред. Г.С. Писаренка / -К.: Вища шк., 1993. - 655 с.
2. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. М.: Высшая школа, 1969, 734 с.
3. Контрольні завдання з курсу "Опір матеріалів" /- ЗДТУ, 1999 - 50 с.
4. Сопротивление материалов. Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников всех специальностей высших учебных заведений. М.: "Высшая школа", 1974, 1976, 1985 г.г.