

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Запорізький національний технічний університет

(Частина II).

Опір матеріалів

для студентів спеціальності

8.092206 “Електричні машини і апарати”,

8.090403 “Ливарне виробництво чорних і кольорових металів”,

8.090603 “Електротехнічні системи електроспоживання”,

8.092203 “Електромеханічні системи автоматизації та електропривод”

Тексти (конспект) лекцій з дисципліни Прикладна механіка (Частина II). Опір матеріалів для студентів спеціальності 8.092206 “Електричні машини і апарати”, 8.090403 “Ливарне виробництво чорних і кольорових металів”, 8.090603 “Електротехнічні системи елек-троспоживання”, 8.092203 “Електромеханічні системи автоматизації та електропривод” /Укл.: Б.О. Трескунов, В.Г. Шевченко. – Запоріжжя: ЗНТУ. 2002. – 82 с.

Укладачі: Б.О. Трескунов, доцент, к.т.н
В.Г. Шевченко, доцент, к.т.н

Рецензент: С.М. Борисова, ст. викладач

Експерти: В.Г. Савельєв, доцент, к.т.н.
В.М. Снігірьов, доцент, к.т.н.
Б.С. Сперанський, професор, д.т.н.
В.В. Попов, доцент, к.т.н.
І.Д. Труфанов, доцент, к.т.н.

Відповідальний
за випуск: В.Г. Шевченко зав. каф.

Затверджено
на засіданні кафедри “Опір матеріалів”

Протокол № 4 від “04” квітня 2001 р.

Рекомендовано до видання НМО спеціальності як текст (конспект) лекцій з дисципліни “Прикладна механіка” (Частина II). Теорія машин та механізмів” для студентів спеціальностей 8.092206 “Електричні машини і апарати”, 8.090403 “Ливарне виробництво чорних і кольорових металів”, 8.090603 “Електротехнічні системи елек-троспоживання”, 8.092203 “Електромеханічні системи автоматизації та електропривод”.

Протокол № 1 від “17” травня 2001 р.

ЗМІСТ

| | |
|---|----|
| Лекція 9. Основні положення опору матеріалів. | 5 |
| 6.1 Основні поняття опору матеріалів. | 5 |
| 6.2 Метод перерізів. Напруга. | 6 |
| Лекція 10. Розтяг та стиск. | 9 |
| 7.1 Центральний розтяг (стиск) прямого стержня. | 9 |
| 7.2 Визначення внутрішніх сил і побудова їх епюри. | 11 |
| 7.3 Визначення напруги і деформації. | 14 |
| 7.4 Умова міцності. | 15 |
| Лекція 11. Визначення механічних властивостей матеріалів. | 17 |
| 8.1 Діаграма розтягу матеріалів. | 17 |
| 8.2 Визначення властивостей пластичності і міцності. | 19 |
| 8.3 Твердість матеріалів. | 20 |
| Лекція 12 Основи теорії напруженого стану. Теорії міцності. | 21 |
| 9.1 Напружений стан у точці. | 21 |
| 9.2 Лінійний, плоский і об'ємний напружений стан. | 23 |
| 9.3 Теорії міцності та їх застосування. | 30 |
| 9.4 Контактні напруги. Зминання. | 34 |
| Лекція 13. Зсув. Геометричні характеристики плоских перерізів | 36 |
| 10.1 Напружений стан при зсуві. | 36 |
| 10.2 Напруга і деформація при зсуві. | 37 |
| 10.3 Статичні моменти площі, моменти інерції плоских перерізів. | 38 |
| 10.4 Визначення моментів інерції та моментів опору простої форми перерізів. | 39 |
| 10.5 Визначення моментів інерції і моментів опору складної форми перерізів. | 41 |
| 10.6 Моменти інерції відносно паралельних осей. | 42 |
| Лекція 14. Кручення. | 44 |
| 11.1 Визначення круглих моментів. | 44 |
| 11.2 Напруга і деформація при крученні. | 48 |

| | |
|--|----|
| Лекції 15 і 16. Згин | 50 |
| 12.1 Внутрішні силові чинники при згині балок. | 50 |
| 12.2 Визначення внутрішніх силових чинників при згині балок і побудова їх епюр. | 53 |
| 12.3 Диференціальні залежності при згині. | 57 |
| 12.4 Нормальні і дотичні напруги при згині. | 58 |
| 12.5 Розрахунок на міцність при згині. | 60 |
| 12.6 Деформації при згині. | 60 |
| Лекція 17. Складний опір та стійкість стиснених стержнів. | 66 |
| 13.1 Косий згин. | 66 |
| 13.2 Згин з розтягом (стиском). | 72 |
| 13.3 Згин з крученням. | 76 |
| 13.4 Стійкість стиснених стержнів. | 81 |

Опором матеріалів називають науку про інженерні методи розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість елементів машин та споруд.

У процесі експлуатації машин та споруд їхні елементи (ланки, стержні, балки, болти, заклепки тощо) так чи інакше беруть участь у роботі конструкції й зазнають дії різних сил – навантажень. Для забезпечення нормальної роботи конструкція повинна задовольняти необхідні умови міцності, жорсткості та стійкості.

Під міцністю розуміють здатність конструкції, її частин та деталей витримувати певне навантаження не руйнуючись.

Жорсткість – це здатність конструкції протистояти деформуванню (змінюванню форми і розмірів) під дією зовнішніх навантажень.

Стійкістю називають здатність конструкції або її елементів зберігати певну початкову форму пружної рівноваги.

Деформація – це зміна розмірів тіла під дією зовнішніх сил. Вона може бути пружною та пластичною. Деформація, яка повністю зникає після дії сил, має назву пружної, а та, яка не зникає – пластичною або залишковою.

Сили, які протидіють деформації (сили міжмолекулярної взаємодії) та виникають у тілі під дією зовнішніх сил, називають внутрішніми силами або силами пружності.

Мірою оцінки сил пружності є напруга – це інтенсивність внутрішніх сил.

Пружність – це властивість тіла відновлювати свої початкові розміри.

Пластичність – це здатність матеріалу тіла діставати остаточні зміни форми і розмірів без порушення його суцільності.

В опору матеріалів розглядається ідеалізоване тіло, яке має такі властивості: тіло є суцільним (без порожнин) та однорідним і це означає, що властивість матеріалу узятого у нескінченно малому об'ємі біля будь-якої точки не залежать від розташування цієї точки, тіло є абсолютно пружним, тобто приймається, що пружні властивості

матеріалу у всіх напрямках будуть однакові (пружна ізотропія), тіло є лінійно деформованим, тобто деформації пропорційні навантаженням.

У більшості випадків деформації елементів конструкцій невеликі. Завдяки цьому переміщення окремих точок відносно основних розмірів малі.

При розрахунках елементів конструкцій використовується принцип незалежності дії сил.

Усю різноманітність видів конструктивних елементів, що застосовують в спорудах і машинах, можна звести до порівняно невеликої кількості основних форм, які є об'єктами розрахунку на міцність, жорсткість і стійкість. До них належать стержні, оболонки, пластини й масивні тіла. Стержнем називається елемент, довжина якого значно більше його розмірів поперечного перерізу. Горизонтальний або похилий стержень, який працює на згин, має назву – балка.

Зовнішні сили, у залежності від способу прикладення, поділяються: на об'ємні, тобто власної ваги; поверхневі, які у свою чергу поділяються на розподілені сили, що діють на відповідній довжині або поверхні і зосереджені сили, які діють на маленькій площі.

Основними видами деформацій у опорі матеріалів є: розтяг, стиск, зсув (зріз), кручення та згин.

У процесі деформації стержня під навантаженням відбувається зміна взаємного положення елементарних часток тіла. Внаслідок цього у тілі змінюються внутрішні сили. Для того, щоб виявити ці сили, використовують метод перерізів. За цим методом у думці перерізають стержень на дві частини та розглядають рівновагу однієї із цих частин. З боку відкинутої частини (тому що стержень знаходився у рівновазі) на ту що розглядаємо діє система внутрішніх сил, які розташовані по усьому перерізі (рис. 6.1) і цю систему внутрішніх сил можна привести до однієї сили \bar{R} – головному вектору і до однієї пари \bar{M} – головному моменту.

Приймаємо осі координат x, y, z у центрі ваги перерізу так, щоб осі Ox та Oz знаходились у його площині. Головний вектор R розкладемо на три складові по осям координат, це N_x , Q_y і Q_z , а головний момент M – на три моменти M_x , M_y та M_z . Отримані таким чином величини є компонентами внутрішніх сил, які прийнято

називати внутрішніми силовими чинниками або просто внутрішніми силами. Кожна сила має свою назву. Силу N_x , яка прикладена перпендикулярно перерізу, тобто вздовж осі стержня, називають поздовжньою силою, тобто нормальною силою, а сили Q_y і Q_z , які прикладені перпендикулярно осі стержня називають поперечними силами. Моменти M_y та M_z називають згинаючими моментами, а момент M_k (інакше M_x) – крутним.

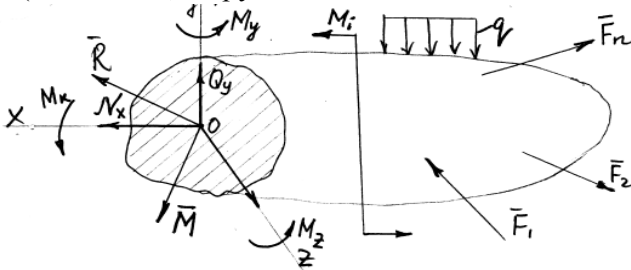


Рисунок 6.1 - Досліджуєма частина стержня

Враховуючи, що деформації тіла малі, тоді частину стержня (рис. 6.1) можна розглядати як затверділу і це дає можливість використовувати рівняння рівноваги для абсолютно твердих тіл. Щоб знайти силові чинники достатньо записати шість рівнянь рівноваги, використовуючи їх до однієї із переріжаних частин стержня.

$$\left. \begin{array}{lll} \sum F_{kx} = 0, & \sum F_{ky} = 0, & \sum F_{kz} = 0, \\ \sum M_x = 0, & \sum M_y = 0, & \sum M_z = 0. \end{array} \right\} \quad (6.1)$$

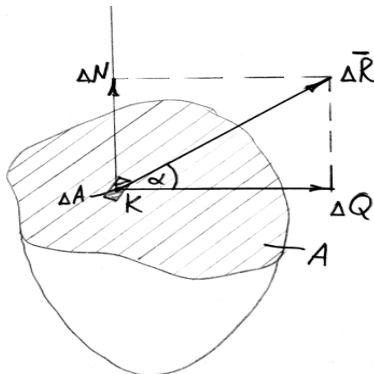


Рисунок 6.2 - Визначення напруги

З перших трьох рівнянь (6.1) визначаємо N_x , Q_y та Q_z , а з останніх M_k , M_y і M_z .

Метод перерізів дає можливість визначати тільки суму внутрішніх сил у перерізі. Але закон розподілу внутрішніх сил по перерізу не відомий. Для того щоб його визначити, треба знати у кожному випадку, як деформується тіло під дією зовнішніх сил. Виділивши у довільній точці K (рис. 6.2) малу площадку ΔA , а рівнодіючу внутрішніх сил на цій площадці позначимо ΔR , тоді можемо записати

$$\frac{\Delta R}{\Delta A} = P_c, \quad (6.2)$$

де P_c – є середня напруга на даній площадці. Але якщо ΔA зменшувати до нуля, то дістанемо напругу у точці K .

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{\Delta A} = P_K, \quad (6.3)$$

де P_K – повна напруга у точці K . Якщо силу $\Delta \bar{R}$ розкласти на дві складові: нормальну ΔN і дотичну ΔQ , то по цим складовим можна визначити нормальну σ та дотичну τ напругу у точці K .

$$\sigma_K = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A}, \quad \tau_K = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta A}. \quad (6.4)$$

Так як $\Delta N = \Delta R \sin \alpha$, $\Delta Q = \Delta R \cos \alpha$, то

$$\left. \begin{aligned} \sigma_K &= \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R \cdot \sin \alpha}{\Delta A} = P_K \cdot \sin \alpha, \\ \tau_K &= \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta R \cdot \cos \alpha}{\Delta A} = P_K \cdot \cos \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

І звідси дістаємо, що

$$P_K = \sqrt{\sigma_K^2 + \tau_K^2}. \quad (6.6)$$

Розтяг стержня виникає тоді, коли до його кінців прикладені сили, направлені вздовж його осі.

Висновки, які відносяться до деформації центрального розтягу, частіше всього застосовуються і до центрального стиску. Суттєва різниця цих деформацій спостерігається при вивченні руйнування металів, а також при дослідженні поведінки надзвичайно довгих і тонких стержнів, для яких стиск супроводжується, як правило, вигином.

Дослідимо спочатку випадок, коли прямолінійний стержень постійного поперечного перерізу площею A розтягується рівномірно розподіленими навантаженнями інтенсивності q прикладеними на його торцях паралельно геометричній осі (рис. 7.1, а).

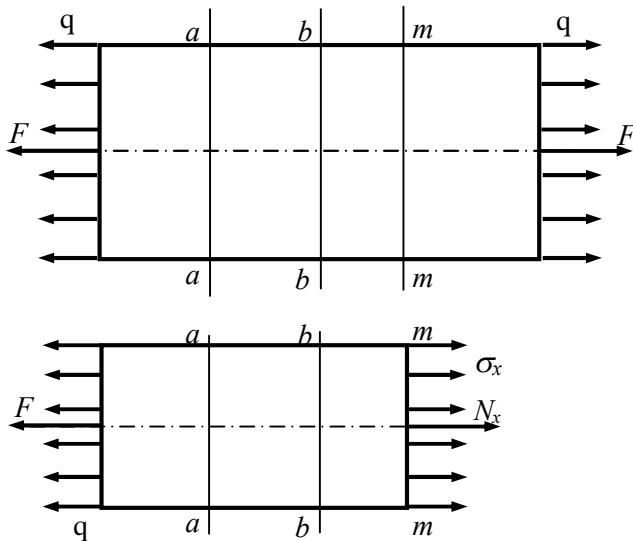


Рисунок 7.1 - Центральний розтяг прямого стержня

Рівнодіючі розподілених зусиль $F = q \cdot A$ направлені паралельно геометричній осі і прикладені у центрах ваги торцевих

перерізів. Для такої деформації стержнів практикою підтверджується гіпотеза Бернуллі, у відповідності з якою, перерізи які були плоскими до деформації, залишаються плоскими і після деформації. Поперечні перерізи $a - a$, $b - b$, ... $m - m$ після деформації лише змістяться поступально один відносно другого. У зв'язку з цим можна припустити, що внутрішні сили пружності будуть розподілені рівномірно по будь-якому плоскому перерізу ($\sigma_x = \text{const}$). Розглянемо рівновагу частини стержня, яка знаходиться зліва від перерізу $m - m$ (рис. 7.1.в). На виділену частину перерізу $m - m$ діють внутрішні сили пружності, рівнодіючою яких є нормальна (подовжня) сила N_x , а також рівномірно розподілене навантаження інтенсивності q на лівому торці, яке має рівнодіючу силу F . Із умови рівноваги виділеної частини стержня маємо, що $N_x = F$, а оскільки $\sigma_x = \text{const}$, то дістаємо

$$\sigma_x = \frac{N_x}{A}, \quad (7.1)$$

При центральному розтягу навантаженнями $q = \text{const}$ циліндричний стержень довжиною l отримує абсолютне подовження $\Delta l = l_1 - l$ (рис. 7.2). Відношення абсолютного подовження до початкової довжини стержня називається відносною подовжньою деформацією або відносним подовженням (скороченням)

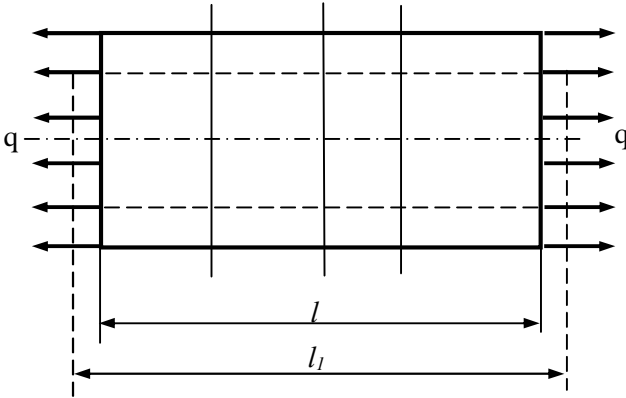


Рисунок 7.2 - Визначення деформацій стержня

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l}. \quad (7.2)$$

Розтяг стержня супроводжується зменшенням його поперечних розмірів. Відношення абсолютного звуження $\Delta d = d - d_1$ до початкового розміру поперечного перерізу d називається відносною поперечною деформацією

$$\varepsilon'_x = \frac{\Delta d}{d}. \quad (7.3)$$

Відношення відносної поперечної деформації до подовжньої, взяте за абсолютною величиною, є постійною для даного матеріалу і називається коефіцієнтом Пуассона, тобто

$$\mu = \frac{\varepsilon'_x}{\varepsilon} = \left| \frac{\varepsilon'_x}{\varepsilon} \right|. \quad (7.4)$$

Для сталі $\mu = 0,24 \dots 0,30$; для чавуну $\mu = 0,23 \dots 0,27$; для цинку $\mu = 0,27$; для свинцю $\mu = 0,42$.

В результаті дослідів над деформаціями пружних тіл встановлено, що діюча напруга пропорційна відносній деформації. Ця умова називається законом Гука:

$$\sigma_x = \varepsilon_x E, \quad (7.5)$$

де E – коефіцієнт пружності, який називається модулем пружності першого роду (модуль Юнга, модуль пружності при розтягу - стиску), він характеризує пружні властивості матеріалу. Для сталі $E = 200 \dots 210$ ГПа; для чавуна $E = 115 \dots 160$ ГПа.

Для визначення внутрішніх сил стержня використовуємо метод перерізів. Розглянемо стержень (рис.7.3 а), який має зовнішні навантаження і при цьому $q = \frac{2F}{a}$.

Спочатку, записавши рівняння рівноваги для усього стержня, визначаємо реакцію опори В.

$$\sum F_{kx} = 0 \quad -R - F + q \cdot 2a - F = 0, \text{ звідки}$$

$$R = 2qa - 2F = 2 \cdot 2F - 2F = 2F.$$

Далі необхідно стержень перерізати на двох ділянках BC і CD щоб визначити внутрішні сили, які діють по довжині стержня (див. рис. 7.3 а).

Розглядаємо кожний переріз окремо і при цьому до розглядаємої частини стержня прикладаємо поздовжню силу N_x за напрямком від розглядаємої частини стержня.

Ділянка BC , переріз $I-I$, $0 \leq x_1 \leq a$.

Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum F_{rx} = 0,$$

$$-R + Nx_1 = 0, \text{ звідси } Nx_1 = R = 2F$$

Це означає, що на ділянці BC діє постійна поздовжня сила за величиною $2F$.

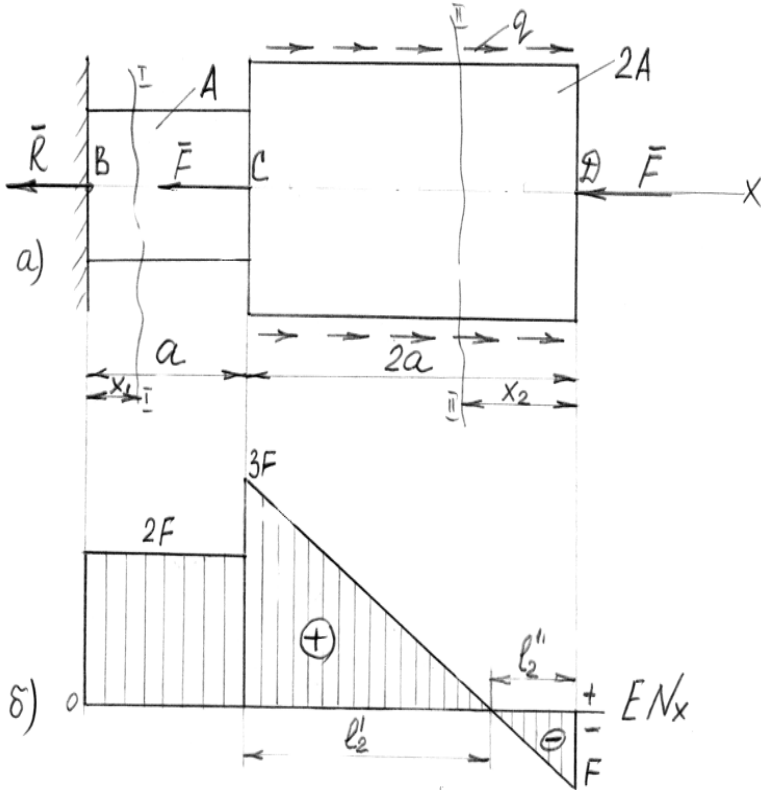
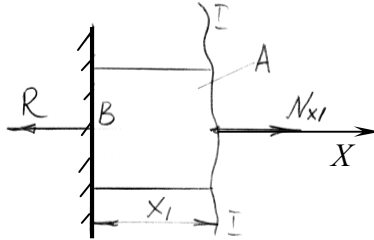
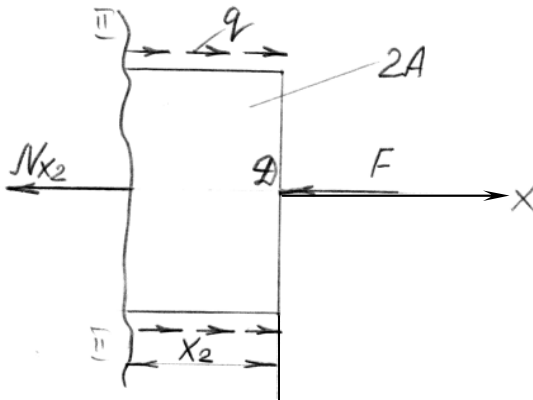


Рисунок 7.3 - Еюра внутрішніх сил



Ділянка CD , переріз $II-II$, $0 \leq x_2 \leq 2a$.



Складаємо рівняння рівноваги:

$$\sum F_{kx} = 0. \quad -Nx_2 + qx_2 - F = 0, \text{ звідси } Nx_2 = qx_2 - F,$$

це означає, що на ділянці CD діє змінна поздовжня сила. Для визначення її величини (вона змінюється за рівнянням прямої лінії) замість координати x_2 підставляємо значення $x_2 = 0$ (переріз D) і $x_2 = 2a$ (переріз C).

Так при $x_2 = 0$, $Nx_2 = -F$; при $x_2 = 2a$, $Nx_2 = q \cdot 2a - F = 2 \cdot 2F - F = 3F$.

Таким чином по отриманим значенням поздовжньої сили при розгляді ділянок BC і CD будемо епюру поздовжніх сил, тобто графічне розподілення поздовжньої сили по довжині стержня, дивись рис. 7.3, б. Із епюри поздовжніх сил випливає:

1. На епюрі поздовжніх сил у перерізі, де прикладена зосереджена сила, завжди буде стрибок на її величину (див. перерізи B, C та D);

2. На ділянках, де діє розподілене навантаження, на епюрі поздовжніх сил будуть похилі прямі лінії (ділянка CD), а на інших ділянках – горизонтальні прямі лінії (ділянка BC).

При розтягу (стиску) діють нормальні напруги, які визнаються за формулою:

$$\sigma_i = \frac{N_{X_i}}{A_i},$$

(7.6)

де N_{X_i} – поздовжня сила i -ої ділянки, яка має найбільше значення за модулем (у випадку її змінної величини); A_i – площа поперечного перерізу i -ої ділянки, коли стержень має постійну площу поперечного перерізу і навантажений так, що $N_x = F$, то нормальна напруга має вигляд

$$\sigma = \frac{F}{A}. \quad (7.7)$$

Згідно вище розглянутого приклада побудови епюри поздовжніх сил (див. рис. 7.3), нормальні напруги на кожній із розглянутих ділянок визначаються:

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \sigma_{BC} &= \frac{N_{X1}}{A_1} = \frac{2F}{A}, \\ \sigma_2 = \sigma_{CD} &= \frac{N_{X2}}{A_2} = \frac{3F}{2A} = 1,5 \frac{F}{A}. \end{aligned}$$

У даному випадку $\sigma_1 = \sigma_{max} = 2 \frac{F}{A}$ незважаючи на те, що $N_{X1} < N_{X2}$.

Деформація при розтягу (стиску) на кожній ділянці визначається за законом Гука. Оскільки $\sigma_i = \varepsilon_i \cdot E$ і враховуючі формули (7.2) і (7.6), маємо

$$\Delta l_i = \frac{N_{X_i} \cdot l_i}{EA_i} = \frac{\omega_i}{EA_i}, \quad (7.8)$$

де N_{X_i} , l_i , A_i , відповідно поздовжня сила, довжина і площа перерізу розглядаємої ділянки; ω_i – площа епюри поздовжніх сил тієї ділянки, де діє розподілене навантаження. Площу епюри можливо визначати за формулою

$$\omega_i = \int_0^{l_i} N_{x1} \cdot dx. \quad (7.9)$$

У випадку коли $N_{xi} = F$, $A_i = A$, то формула (7.8) приймає вигляд

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA}. \quad (7.10)$$

У формулі (7.8) добуток $E A_i$ називається жорсткістю при розтягу (стиску).

Деформація усього стержня визначається за формулою

$$\Delta l = \sum_{i=1}^n \Delta l_i, \quad (7.11)$$

де Δl_i - абсолютна деформація кожної ділянки.

Повертаючись до вище розглянутого приклада (згідно рис. 7.3) визначимо деформацію стержня.

$$\Delta l_1 = \frac{N_{X1} \cdot l_1}{E \cdot A_1} = \frac{2F \cdot a}{EA},$$

$$\Delta l_2 = \frac{\omega_2}{EA_2} = \frac{\omega'_2 + \omega''_2}{2EA}.$$

Спочатку визначимо ω'_2 і ω''_2

$$\omega'_2 = \frac{1}{2} 3F \cdot l'_2, \text{ і } \omega''_2 = \frac{1}{2} F \cdot l''_2.$$

Використовуючи умови подібності маємо

$$\frac{l'_2}{l''_2} = \frac{3F}{F} = 3 \text{ або } \frac{l'_2 + l''_2}{l''_2} = \frac{3+1}{1}, \text{ тобто } \frac{2a}{l''_2} = 4, \text{ звідси}$$

$$l''_2 = 0,5a, \text{ і } l'_2 = 2a - l''_2 = 2a - 0,5a = 1,5a.$$

$$\text{Тоді } \Delta l_2 = \frac{1,5F \cdot 1,5a - 0,5F \cdot 0,5a}{2EA} = \frac{Fa}{EA}$$

і остаточно деформація стержня дорівнює

$$\Delta l = 2 \frac{Fa}{EA} + \frac{Fa}{EA} = 3 \frac{Fa}{EA}.$$

При розрахунках на міцність деталі, яка працює на розтяг або стиск, виникає питання: яке значення σ можна рахувати безпечним? Очевидно, що ці напруження повинні бути менше деякого небезпечного $\sigma_{\text{неб.}} = \sigma_{\text{max}}$, при якому виникає можливість руйнування деталі або порушується умова нормальної її експлуатації. Тому умовою безпечної роботи будь-якого матеріалу є

$$\sigma_{\text{max}} < \sigma_{\text{граничне}} . \quad (7.12)$$

Припустимою напругою називається найбільша напруга при якій забезпечується надійність та довговічність проектуемого елемента конструкції і позначається $[\sigma]$

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{zp}}{[S]} , \quad (7.13)$$

де $[S]$ – припустимий коефіцієнт запасу міцності.

Для пластичних матеріалів (наприклад, сталь) за величину граничної напруги приймаємо границю текучості матеріалу σ_T (для вуглецевої сталі можна приймати $\sigma_T = 240$ МПа). Коефіцієнт запасу міцності у цьому випадку можна приймати у межах $[S] = 1,5 \dots 2,5$. Тоді для вуглецевої сталі

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{[S]} = \frac{240}{1,5} = 160 \text{ МПа} . \quad (7.14)$$

Для крихких матеріалів (наприклад, чавун) за величину граничної напруги приймають границю міцності матеріалу σ_m і припустимий коефіцієнт запасу міцності $[S] = 4 \dots 6$.

Таким чином умова міцності при розтягу (стиску) має вигляд

$$\sigma_{\text{max}} = \left(\frac{N_{xi}}{A_i} \right)_{\text{max}} \leq [\sigma] , \quad (7.15)$$

де $\left(\frac{N_{xi}}{A_i} \right)_{\text{max}}$ - найбільше відношення поздовжньої сили до

площі поперечного перерізу відповідної ділянки. Використовуючи умову міцності (7.15) можна визнати:

1. розміри поперечного перерізу (проектна задача);
2. припустиме навантаження;
3. робочі напруги кожної ділянки (перевірочний розрахунок).

Для вивчення поведінки різних матеріалів під навантаженням проводяться лабораторні випробування зразків на спеціальних машинах. Ці досліді проводяться для визначення чисельних характеристик, які дозволяють визначити міцність та пластичність матеріалів. Такі характеристики називають механічними. Для дослідження на розтяг установлені зразки (рис.8.1).

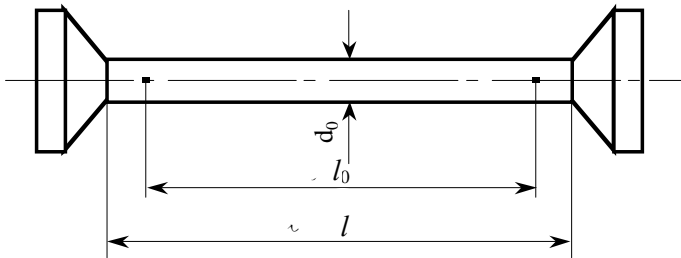


Рисунок 8.1 - Зразок для випробування

Розрахункова довжина нормальних зразків $l_0=10d_0$, коротких - $l_0=5d_0$ (тут d_0 – початковий діаметр зразка).

Графік залежності між силою розтягу F та поздовжньою абсолютною деформацією Δl називають діаграмою розтягу. Для вивчення властивостей матеріалу зручніше користуватися діаграмою розтягу, яка встановлює залежність між нормальною напругою σ і відносною поздовжньою деформацією ϵ (див. рис. 8.2).

На діаграмі необхідно визначити декілька характерних точок А, В, С, D та Е. Точка А відповідає границі пропорційності $\sigma_{ппр}$, це та напруга до якої діє закон Гука. Точка В дуже наближена до точки А та відповідає границі пружності $\sigma_{пр}$, це максимальна напруга, яку може витримати матеріал, не визначаючи ознак залишкової деформації після того, коли зняли навантаження. Точка С на діаграмі знаходиться на початку горизонтальної ділянки, та відповідає границі текучості $\sigma_{т}$. На цій ділянці деформації зростають без збільшення навантажень, матеріал як би “тече”. Границею текучості називають напругу, при якій деформації зростають без збільшення навантажень. Деякі матеріали не мають чітко визначеної

Таким чином модуль пружності є відношення напруги до відносної поздовжньої деформації. Якщо при зусиллі розтягу, що спричиняє напругу не вище за границю пружності (до т. N), припинити навантаження, а потім розвантажувати зразок, то процес розвантаження зобразиться на діаграмі лінією, яка практично збігається з лінією навантаження. Буде інакше, якщо до початку розвантаження напруга у зразку перевищує границю пружності (т. M). Помітимо, що процес розвантаження на діаграмі описується вже не кривою, яка збігається з кривою навантаження OABCM, а прямою MM₁, паралельною прямолінійній ділянці OA діаграми. Подовження ε зразка до початку розвантаження при розвантаженні зникає не повністю. Зникла частина подовження на діаграмі зображується відрізком $\varepsilon_{пр}$, а та частина, що залишилася, - відрізком $\varepsilon_{пл}$. Отже, повне подовження зразка за границею пружності складається із двох частин – пружної та пластичної:

$$\varepsilon = \varepsilon_{пр} + \varepsilon_{пл}.$$

(8.2)

Так буде до самого розриву зразка. Повне подовження, якого зазнав зразок перед руйнуванням, зменшиться після розриву, оскільки в частинах зразка зникнуть пружні деформації. Відносним подовженням після розриву δ , %, називають відношення приросту розрахункової довжини зразка після розриву до його початкової довжини:

$$\delta = \frac{\Delta l_0}{l_0} \cdot 100,$$

(8.3)

де Δl_0 - подовження, що залишилося після руйнування зразка. Відносне подовження δ характеризує пластичність матеріалу. Залежно від цього подовження, матеріали поділяють на пластичні ($\delta \geq 5\%$) і крихкі ($\delta < 5\%$). Відносне звуження зразка після розриву Ψ , %, визначається діленням абсолютного зменшення площі поперечного перерізу в шийці на початкову площу:

$$\Psi = \frac{A_0 - A}{A_0} \cdot 100 = \frac{\Delta A_0}{A_0} \cdot 100.$$

(8.4)

Чим більше відносне звуження після розриву, тим пластичніший матеріал.

До пластичних матеріалів належать маловуглецева сталь, мідь, свинець та ін., а до крихких – чавун, скло, камінь, бетон тощо.

Відносне подовження δ і відносне звуження Ψ є характеристиками пластичності матеріалу. Вони певною мірою умовні, оскільки приріст довжини у формулі (8.3) і зменшення площі поперечного перерізу зразка у виразі (8.4) належать до початкової довжини і початкової площі поперечного перерізу. Насправді пластична деформація відбувається на довжині зразка, що неперервно змінюється.

Характеристиками міцності матеріалів, тобто їх механічними властивостями, що використовуються у практичних розрахунках, є границя пружності $\sigma_{пр}$, границя текучості σ_T , тимчасовий опір (границя міцності) σ_m та твердість.

Окрім твердості всі інші механічні властивості легко знаходяться із діаграми розтягу.

Твердість – це властивість матеріалу чинити опір проникненню у його поверхню іншого більш твердого тіла. Існує багато різних методів визначення твердості матеріалу. Найбільш поширені це:

- 1) метод Брінелля HB;
- 2) метод Роквелла HRC або HRB;
- 3) метод Віккерса HV.

Суттєвість визначення твердості полягає в наступному. На площадку твердоміра (прибор для визначення твердості) кладуть досліджуєми матеріал і під визначеним навантаженням вдавлюють індентор і після цього матеріал отримує відбиток по якому визначається твердість. У вище названих методах визначення твердості інденторами є: стальна куля $\varnothing 2,5$; 5,0; 10 мм (метод Брінелля), алмазний конус із кутом при вершині 120° (шкала HRC червона), сталева куля $1/16'' = 1,5875$ мм (шкала HRB чорна), алмазна піраміда з двограним кутом при вершині 136° (метод Віккерса).

Твердість по Роквеллу вимірюється у безрозмірних одиницях, а по Брінеллю і Віккерсу – Па, МПа і т. ін.

Твердість по Брінеллю визначається (див. рис.8.3.) за формулою

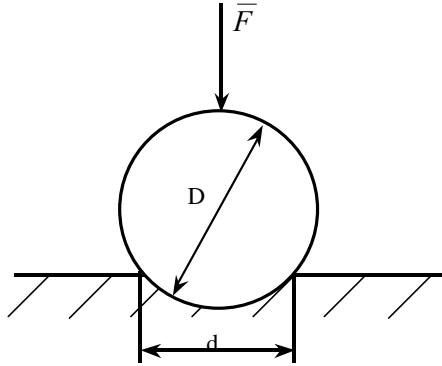


Рисунок 8.3 - Твердість по Брінеллю

$$HB = \frac{F}{A_{\text{відб}}} = \frac{F}{\frac{\pi D}{2} (D - \sqrt{D^2 - d^2})}, \text{ МПа} \quad (8.5)$$

де D – діаметр сталеві кулі, мм;

d – діаметр відбитку, тобто лунки, мм;

F – навантаження, Н.

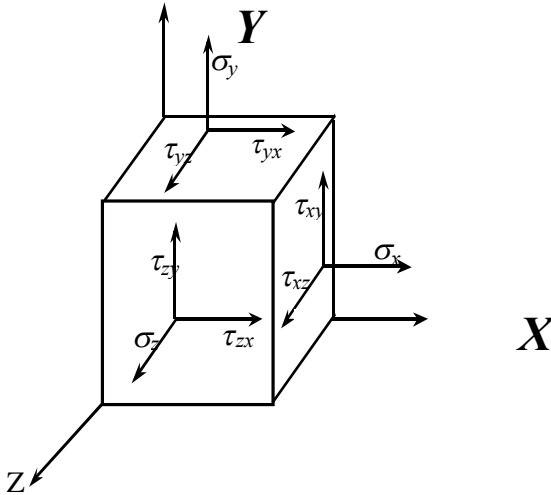
Між твердістю по Брінеллю і міцністю матеріалу є залежність

$$\sigma_m = kHB,$$

(8.6)

де k – коефіцієнт, який залежить від матеріалу, для сталі можна приймати $k=0.36$.

Напруга є результатом взаємодії частинок тіла при його навантаженні. Зовнішні сили прагнуть змінити взаємне розміщення частинок, а виникаючі при цьому напруги перешкоджають зсуванню частинок, обмежуючи його у більшості випадків деякою малою величиною.



У відповідності до гіпотези о суцільності матеріалу слід рахувати, що
Рисунок 9.1 - Напружений стан у точці

кожна частинка тіла у скільки завгодно малому о́кілу має нескінченну множину інших частинок, які оточують її з усіх напрямків. Розміщена у даній точці частинка по різному взаємодіє з кожною із цих сусідніх частинок. Тому в одній і тій же точці по різних напрямкам напруги будуть різними і тільки у дуже рідких випадках вони однакові у всіх напрямках.

Досліджуючи напружений стан тіла у даній точці А, у її о́колі звично вилучають елемент у вигляді нескінченно малого паралелепіпеда, який у збільшеному масштабі показаний на рис.9.1.

Грані паралелепіпеда перпендикулярні до напрямків декартових осей X, Y та Z. На цих гранях діють внутрішні сили, які змінюють вплив віддаленої частини тіла. Повні напруги на гранях елемента зображують нормальними та дотичними складовими – проекціями повних напруг на координатні осі. Нормальну напругу позначають літерою σ (сигма) із індексом, відповідним напрямку нормалі до площадці, на котрій вона діє.

Дотичну напругу позначають літерою τ (тау) із двома індексами: перший відповідає нормалі до площадки, а другий – напрямку самої напруги. Так, на площадці перпендикулярній до осі X (див. рис. 9.1), діють напруги σ_x , τ_{xy} і τ_{xz} .

Можна показати, що сукупність напруг на гранях такого елементарного паралелепіпеда повністю характеризує напружений стан у точці навантаженого тіла. Ця сукупність напруг називається тензором напруг, який визначається за формулою

$$T_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

(9.1)

Слід відзначати, що на невидних гранях елемента виникають відповідно такі ж напруги, але протилежного напрямку.

На гранях паралелепіпеда, виділеного в області досліджуваної точки навантаженого тіла, діють дев'ять проєкцій напруг (див. рис.9.1 і формулу 9.1). Ці проєкції називаються компонентами напруженого стану в точці і цілком його характеризують. Для компонент напруг існує таке правило знаків. Нормальні напруги вважаються додатними, якщо вони розтягують виділений паралелепіпед, і від'ємними, якщо стискають його. Якщо зовнішня нормаль до грані збігається з додатним напрямом осі, то дотичні напруги будуть додатними тоді, коли вони збігаються з додатними напрямками інших осей системи координат, відносно яких вони паралельні. Тому на рис. 9.1 всі показані нормальні напруги σ_x , σ_y , σ_z додатні, а також всі дотичні напруги τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yx} , τ_{yz} , τ_{zx} і τ_{zy} додатні.

З умови рівноваги виділеного паралелепіпеда випливає, що на взаємно перпендикулярних гранях дотичні напруги, які напрямлені до спільного ребра, рівні за абсолютною величиною (рис. 9.1), тобто:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tau_{zx} = \tau_{xz}.$$

(9.2)

Рівності (9.2) відображають закон парності дотичних напруг. Отже, із дев'яти компонент напруг незалежними є лише шість. Якщо змінюється орієнтація системи координат, а відповідно, і орієнтація паралелепіпеда, то

компоненти напруг на його гранях також змінюють значення і знак. Існує і таке положення паралелепіпеда, за якого на його гранях відразу всі дотичні напруги дорівнюють нулю.

Нормальні напруги на гранях такого паралелепіпеда називаються головними і позначаються σ_1 , σ_2 , σ_3 , а площадки, що відповідають цим граням – головними площадками. У теорії пружності доведено, що головні напруги є екстремальними і між ними існує співвідношення:

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3. \quad (9.3)$$

Так якщо одна з головних напруг дорівнює 110 МПа, а дві інші відповідно -150 МПа і 170 МПа, то їх обов'язково слід позначати так; $\sigma_1 = 170$ МПа; $\sigma_2 = 110$ МПа; $\sigma_3 = -150$ МПа. Неважко побачити, що напружений стан можна характеризувати головними напругами. В цьому разі можливі випадки, коли одна чи дві головні напруги дорівнюють нулю. У зв'язку з цим розрізняють три види напружених станів у точці:

- 1) Якщо тільки одна із головних напруг відмінна від нуля, то напружений стан у точці називається лінійним або одновісним (рис.9.2, а);
- 2) Якщо тільки одна із головних напруг дорівнює нулю, то напружений стан у такій точці називається плоским або двовісним (рис.9.2, б);
- 3) Якщо всі три головні напруги відмінні від нуля, то такий напружений стан називається об'ємним або тривісним (рис.9.2, в).

Розглянемо більш детально кожний із трьох видів напруженого стану в точці.

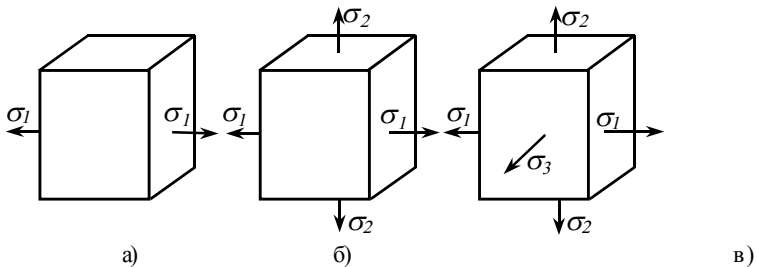
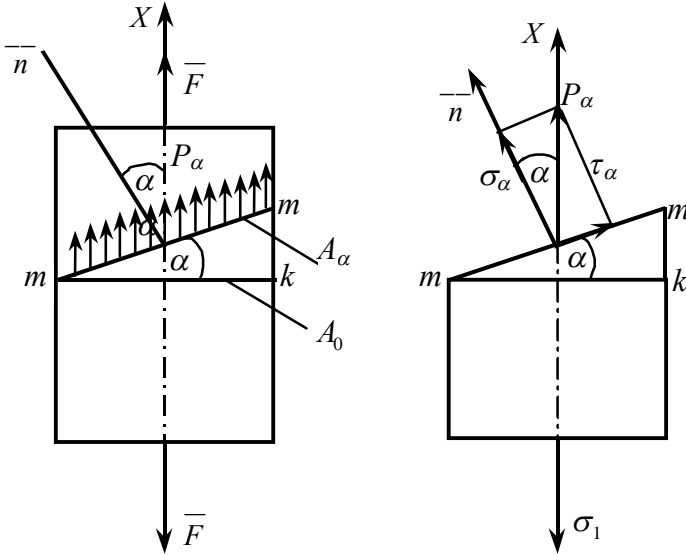


Рисунок 9.2 - Види напружених станів

Розглянемо стержень, який випробовує центральний розтяг під дією сил F (рис.9.3,а).



а)

б)

Рисунок 9.3 – Напруга при лінійному напруженому стані

По перерізу $m-k$ площею A_0 діє нормальна напруга $\sigma_1 = \sigma_x$, яка визначається:

$$\sigma_1 = \sigma_x = \frac{N_x}{A_0} = \frac{F}{A_0}, \quad (9.4)$$

де $N_x = F$ у випадку згідно рис.9.3, а.

Беремо площадку нахилену під кутом α до перерізу $m-k$, тобто площадку $m-t$. Площа цієї площадки рівна

$$A_\alpha = \frac{A_0}{\cos \alpha}, \quad (9.5)$$

де кут α будемо рахувати додатним, якщо для суміщення сили із нормаллю \bar{n} її необхідно повернути проти руху годинникової стрілки. Повна напруга, яка діє на похилену площадку визначається:

$$P_{\alpha} = \frac{F}{A_{\alpha}} = \frac{F}{\frac{A_0}{\cos \alpha}} = \frac{F \cos \alpha}{A_0} = \sigma_1 \cos \alpha$$

(9.6)

Розкладаємо повну напругу P_{α} на нормальну та дотичну складові (див.рис.9.3,б).

$$\sigma_{\alpha} = P_{\alpha} \cos \alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha,$$

(9.7)

$$\tau_{\alpha} = P_{\alpha} \sin \alpha = \sigma_1 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2} \sigma_1 \sin 2\alpha$$

(9.8)

Нормальну напругу будемо рахувати додатною, якщо вона напрямлена у бік зовнішній нормалі до площадки. Нормальні і дотичні напруги відповідно дорівнюють:

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } \alpha = 0, \quad \sigma_{\alpha} = \sigma_1 \text{ і } \tau_{\alpha} = 0; \\ \text{при } \alpha = 45^0, \quad \sigma_{\alpha} = \frac{1}{2} \sigma_1 \text{ і } \tau_{\alpha} = \frac{1}{2} \sigma_1; \\ \text{при } \alpha = 90^0, \quad \sigma_{\alpha} = 0 \text{ і } \tau_{\alpha} = 0. \end{array} \right\} \quad (9.9)$$

Таким чином при центральному розтягу стержня нормальні напруги у поперечних перерізах виявляються найбільшими, а в поздовжніх – вони відсутні. Такий напружений стан називається лінійним, тобто одновісним.

В процесі роботи механізмів і конструкцій часто зустрічаються види навантажень, за яких у точці реалізується плоский або об'ємний напружений стан. Розглянемо плоский напружений стан і для цього уколi досліджуваної точки умовно виділимо елемент і розмістимо так, як показано на рис.9.4, а. Нехай на бічних гранях виділеного елемента діють головні напруги σ_1 і σ_2 . Знайдемо нормальні і дотичні напруги на площадці, нормаль n до якої утворює кут α_1 з напрямом X (або σ_1) і кут α_2 з віссю Y (або σ_2). На цій площадці діють нормальні σ_{α} і дотичні τ_{α} напруги, які залежать від σ_1 і σ_2 . Згідно з принципом суперпозиції за формулою (9.7) маємо

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2,$$

(9.10)

де $\alpha_2 = \alpha_1 + 90^\circ$ і тому $\cos(\alpha_1 + 90^\circ) = -\sin \alpha_1$, і опускаючи індекс у позначенні кута, рівняння (9.10) переписуємо у вигляді

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha \quad (9.11)$$

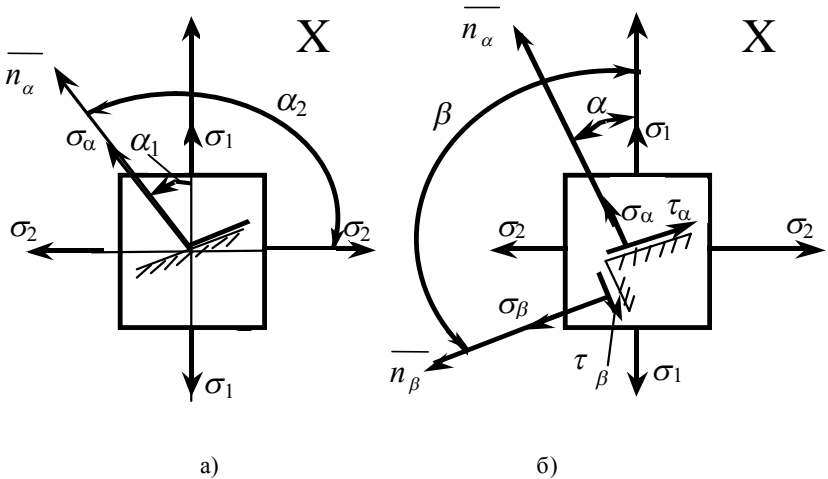


Рисунок 9.4 – Плоский напружений стан

Міркуючи подібним чином, і за допомогою формули (9.8) визначаємо дотичну напругу на α - площадці:

$$\begin{aligned} \tau_\alpha &= \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha_1 + \frac{\sigma_2}{2} \sin 2\alpha_2 = \frac{1}{2} \left[\sigma_1 \sin 2\alpha + \sigma_2 \sin(2\alpha + 180^\circ) \right] = \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\alpha . \end{aligned} \quad (9.12)$$

Слід пам'ятати, що у формулах (9.11) і (9.12) α - це кут який відрховується від осі, вздовж котрої діє максимальна напруга, тобто σ_1 . Користуючись формулами (9.11) і (9.12), знайдемо нормальні σ_β і дотичні τ_β напруги на площадці, перпендикулярній до α - площадки (тобто β - площадки) дивись рисунок 9.4, б. Нормаль до β

- площадки позначимо $\overline{n_\beta}$. Кут, що утворює нормаль з віссю X (або з напрямком дії напруги) буде кутом β . Тоді за формулою (9.11) дістанемо $\sigma_\beta = \sigma_1 \cos^2 \beta + \sigma_2 \sin^2 \beta$ і оскільки $\beta = \alpha + 90^\circ$, то після підстановки маємо

$$\sigma_\beta = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha$$

(9.13)

Аналогічно дістаємо розрахункову формулу для дотичних напруг:

$$\tau_\beta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\beta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(2\alpha + 180^\circ) = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (9.14)$$

Для встановлення властивостей напруженого стану на взаємно перпендикулярних площадках, які проходять через досліджувану точку, проаналізуємо формули (9.11)...(9.14). Складаючи формули (9.11) і (9.13) дістаємо, що

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2$$

(9.15)

Таким чином при повороті елемента навколо осі, перпендикулярної площадці і рисунку, сума нормальних напруг на взаємно перпендикулярних гранях залишається сталою величиною.

Порівнюючи формули (9.12) і (9.14), помічаємо, що $\tau_\alpha = -\tau_\beta$, тобто підтверджується закон парності дотичних напруг, а знак “мінус” відповідає правилу, яке вказано при розгляді лінійного напруженого стану.

Найбільш дотичні напруги, які виходять з аналізу формули (9.12) маємо на площадках при $\sin 2\alpha = 1$, тобто тоді, коли $2\alpha = 90^\circ$ або $\alpha = 45^\circ$. Таким чином, коли $\alpha = 45^\circ$, то

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

(9.16)

Необхідно зауважити, що згідно з прийнятим позначенням напруг, при плоскому напруженому стану головні напруги σ_1 або σ_2 зокрема можуть дорівнювати нулю. Тоді під час використання формул

для аналізу напруженого стану необхідно замість σ_1 підставляти σ_{max} , а замість σ_2 - σ_{min} .

Розглянемо тепер об'ємний напружений стан, який має місце, коли на гранях виділеного елемента всі три головні напруги відмінні від нуля (рисунок 9.5,а).

Проведемо довільний переріз елемента так, щоб площина перерізу перетнула всі три координатні осі (рисунок 9.5,б). Нормаль \bar{n} до цієї площини утворює з координатними осями X, Y, Z відповідно кути α_1 , α_2 і α_3 . Нормальна напруга σ_n на такій площині визначається за формулою, отриманою з теорії пружності і аналогічною формулі (9.11):

$$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cos^2 \alpha_3 \quad (9.17)$$

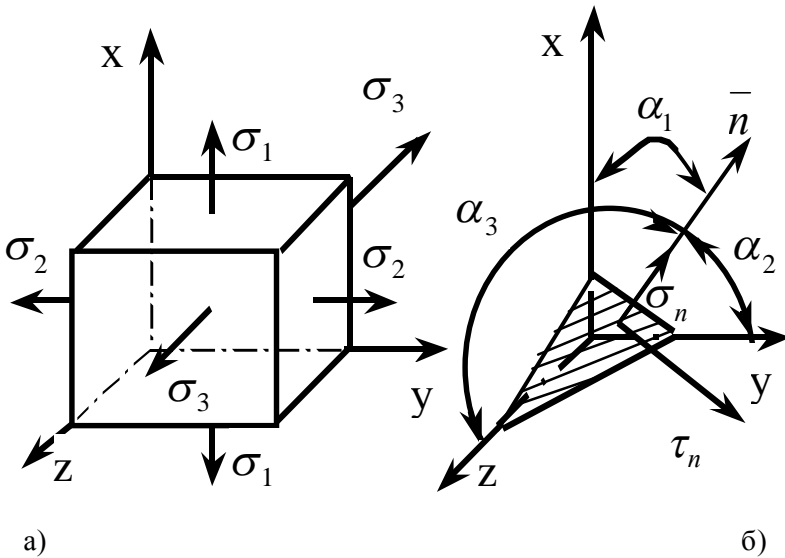


Рисунок 9.5 – Об'ємний напружений стан

Дотичні напруги на цій площині обчислюються за формулою:

$$\tau_n = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \cos^2 \alpha_3 - \sigma_n^2} \quad (9.18)$$

Екстремальні значення нормальних напруг:

$$(9.19) \quad \sigma_{n \max} = \sigma_1 \text{ і } \sigma_{n \min} = \sigma_3$$

Максимальні значення дотичних напруг

$$(9.20) \quad \tau_{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3).$$

Особливе значення в розрахунках на міцність відіграють нормальні і дотичні напруги на площадці, яка має однаковий нахил до всіх координатних осей, тобто у випадку, коли $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$. Така площадка називається октаедричною, а напруги на ній – октаедричними напругами, що позначаються $\sigma_{\text{окт}}$ і $\tau_{\text{окт}}$. Відомо, що в ортогональній (просторовій) системі координат $\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1$.

Тоді для октаедричної площадки $\cos^2 \alpha_1 = \cos^2 \alpha_2 = \cos^2 \alpha_3 = \frac{1}{3}$ і формула октаедричної нормальної напруги, згідно з (9.17) має вигляд

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \quad (9.21)$$

Якщо використати формулу (9.18), то октаедрична дотична напруга визначається:

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}. \quad (9.22)$$

У теорії пружності і пластичності користуються узагальнюючою характеристикою напруг, яку називають інтенсивністю напруг і позначають σ_i . Інтенсивність напруг σ_i виражена через головні напруги відрізняється від октаедричної дотичної напруги $\tau_{\text{окт}}$ лише числовим коефіцієнтом:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \quad (9.23)$$

тобто

$$(9.24) \quad \sigma_i = \frac{3\tau_{\text{окт}}}{\sqrt{2}}$$

З інтенсивністю напруг σ_i пов'язують момент початку текучості матеріалів, які працюють в умовах об'ємного напруженого стану.

Під дією зовнішніх сил матеріал може перебувати в різних механічних станах. Так, при незначних навантаженнях виникають

пружні деформації і матеріал перебуває в пружному стані. Наростаючі навантаження приводять до появи пластичних деформацій. В такому випадку говорять, що матеріал переходить у пластичний стан. За великих навантажень утворюються перші тріщини і матеріал переходить у стан руйнування. Всі ці механічні стани матеріалу ми вже спостерігали у процесі дослідження діаграми розтягу мало- вуглецевої сталі. В опорі матеріалів моменти появи пластичних деформацій (або ознаки крихкого руйнування) хоча в одній точці матеріалу конструкції розглядається, як порушення міцності в цілому. Розрахунки на міцність, що ґрунтуються на такому уявленні, називаються розрахунками за припустимими напругами.

Знаходження припустимих напруг у випадку лінійного (одновісного) напруженого стану при розтягу або стиску не викликає труднощів. При плоскому або об'ємному напруженому стані знаходження небезпечних напруг становить надзвичайно складну задачу. Справа в тому, що небезпечний напружений стан у точці залежить від співвідношення між головними напругами, а таких співвідношень по суті безліч. Крім цього, великі труднощі утворює і сама можливість реалізації і дослідження в лабораторних умовах величезної кількості різноманітних складних напружених станів.

У зв'язку з цим виникла необхідність, на основі дослідів при розтягу і стиску (лінійний напружений стан), теоретично визначати міцність матеріалів при довільних плоских та об'ємних напружених станах. В такому разі результати дослідів при лінійно напруженому стані стають еталоном міцності. За допомогою такого еталона – так званої еквівалентної напруги (її позначають $\sigma_{\text{екв}}$) - обґрунтовується міцність матеріалів при різних довільних напружених станах.

Зрозуміло, що еквівалентною напругою має бути така сукупна характеристика напруги (стан В на рисунку 9.6,б), яку необхідно створити в розтягнутому елементі, щоб його стан був би однаково небезпечним з досліджуваним плоским чи об'ємним напруженим станом (стан А, рисунок 9.6,а). Для обґрунтування еквівалентної напруги вводять різні гіпотези про переважаючий вплив того чи іншого чинника на міцність матеріалів при довільному напруженому стані.

Теорії, які обґрунтовують ознаки однакової безпеки руйнування матеріалів при різних напружених станах, називаються теоріями міцності.

Математично довільну теорію міцності можна охарактеризувати залежністю

$$\sigma_{\text{екв}} \leq [\sigma] = \frac{\sigma^\circ}{[S]}, \quad (9.25)$$

де σ° - небезпечна нормальна напруга, отримана експериментально із діаграми розтягу (стиску). За таку небезпечну напругу взято для пластичних матеріалів границю текучості $\sigma^\circ = \sigma_T$, а для крихких - границю міцності $\sigma^\circ = \sigma_M$, $[S]$ - припустимий коефіцієнт запасу міцності.

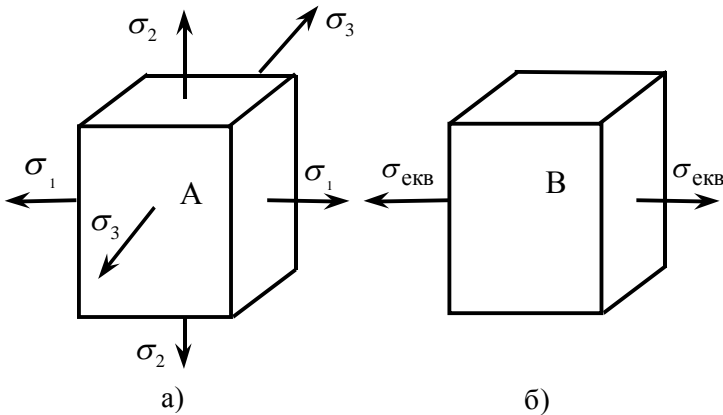


Рисунок 9.6 – Еквівалентна напруга при дослідженні об'ємного напруженого стану

З великої кількості запропонованих на цей час теорій розглянемо ті, які найбільш обґрунтовані експериментально і набули широкого застосування.

1. Теорія найбільших дотичних напруг (третя теорія міцності).

Згідно з цією теорією вважають, що пластична деформація виникає в наслідок необоротних зсувів у матеріалі, які спричиняються дотичними напругами.

За об'ємного напруженого стану найбільші дотичні напруги визначаються згідно з (9.20): $\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$. Отже, якщо величина τ_{\max} досягає деякого небезпечного значення τ° , властивого даному матеріалу і визначеного при простому (лінійному) розтягу, то

незалежно від виду напруженого стану матеріалів переходить до пластичного стану. Тоді умова небезпечного стану має вигляд $\tau_{max} = \tau^\circ$, а умова міцності записується співвідношенням

$$\tau_{max} \leq [\tau] = \frac{\tau^\circ}{[S]}. \quad (9.26)$$

На підставі (9.20 і 9.9), а також тому, що τ° при лінійному напруженому стані можна виразити через σ_T , то умову міцності можна записати через головні напруги:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) &\leq \frac{1}{2} \frac{\sigma_T}{[S]} \quad \text{і тоді} \\ \sigma_1 - \sigma_3 &\leq [\sigma]. \end{aligned} \right\} \quad (9.27)$$

Із формули (9.27) випливає, що еквівалентна напруга за третьою теорією міцності є

$$\sigma_{еквIII} = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (9.28)$$

В еквівалентній напрузі (дивись (9.28)) не врахована середня за значенням головна напруга σ_2 - це і є основним недоліком третьої теорії міцності. Перевага ж цієї теорії полягає в тому, що вона добре підтверджується різними дослідями при плоскому і об'ємному напружених станах над матеріалами, що однаково працюють на розтяг і стиск. Експериментально встановлено, що похибка в оцінюванні міцності через нехтування впливом σ_2 не перевищує 15%.

зміни форми тіла (четверта теорія міцності). Згідно з цією теорією вважають, що граничний стан для матеріалу, незалежно від виду напруженого стану, настає тоді, коли питома енергія зміни форми U_ϕ в одиниці об'єму матеріалу досягає свого небезпечного стану (U_ϕ° , обчисленого за простого розтягу). Умову міцності у цьому разі можна записати так:

$$U_\phi \leq [U_\phi] \quad (9.29)$$

Якщо величини, що входять до нерівності (9.29), виразити через головні напруги, то отримаємо

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \leq [\sigma] = \frac{\sigma^\circ}{[S]} \quad (9.30)$$

Ліва частина нерівності (9.30) відома нам з формули (9.23) і вона виражає інтенсивність напруги σ_i . Тоді еквівалентна напруга за четвертою теорією міцності має вигляд

$$\sigma_{еквIV} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2} = \sigma_i \quad (9.31)$$

Отже, четверта теорія міцності враховує всі три головні напруги, що безперечно є її перевагою. Зазначена теорія добре підтверджується дослідями над пластичними матеріалами.

Ця теорія дозволяє встановити критерій міцності для крихких матеріалів, які по-різному чинять опір розтягу і стиску. Вона ґрунтується на систематизації великої кількості експериментальних даних, яка показує, що середня головна напруга σ_2 не суттєво впливає на оцінку міцності матеріалів. На цій підставі Мор запропонував такий критерій міцності:

$$\sigma_{еквМ} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_c]} \sigma_3 \leq [\sigma_p], \quad (9.32)$$

де $[\sigma_p]$ і $[\sigma_c]$ - припустимі напруги відповідно при розтягу і стиску.

Критерій міцності Мора широко використовується в процесі розрахунків конструкцій із крихких матеріалів. Для пластичних матеріалів $[\sigma_p] = [\sigma_c]$ і тому теорія міцності Мора для них збігається з третьою теорією міцності (9.27).

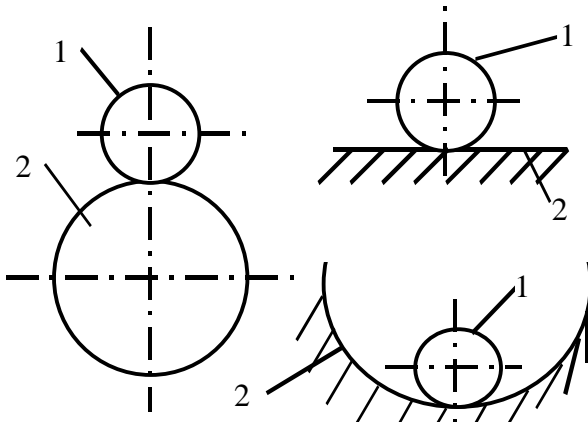


Рисунок 9.7 – Окремі випадки двох стичних тіл

Деформації і напруги, які виникають в наслідок взаємного тиску двох стичних тіл (дивись рисунок 9.7) називають контактними. Контактні напруги визначаються за формулою Герца-Беляєва.

$$\sigma_{H \max} = K \sqrt{\frac{q E_{np}}{R_{np}}},$$

(9.33)

де q – питоме навантаження на одиницю довжини;

$$E_{np} = \frac{2E_1E_2}{E_1 + E_2} \text{ - приведений модуль пружності стичних тіл;}$$

$$R_{np} = \frac{R_1R_2}{R_1 \pm R_2} \text{ - приведений радіус кривизни (знак мінус якщо}$$

стикаються опуклості з гнутістю); K – коефіцієнт, який залежить від розмірності величин, що входять під корінь.

При контакті двох стичних тіл виникає місцева поверхнева деформація стиску, яку називають зминання. При визначенні зминання, яке виникає на кінцевій по величині поверхні, можна виходити із припущення рівномірності напруги по усій поверхні контакту. Тоді для розрахунку на зминання використовуються формули розрахунку при стиску.

$$\sigma_{зм} = \frac{F}{A_{зм}} \leq [\sigma]_{зм},$$

(9.34)

де $[\sigma]_{зм} = (2...2,5)[\sigma]$, і $[\sigma]$ - є припустима напруга при розтягу.

Якщо на елемент ABCD (див. рис.10.1 а) діє тільки дотична напруга, то він відчуває чистий зсув. Закріплюємо грань АВ нерухомо, тоді під дією дотичних напружень грань CD рухається паралельно грані АВ і вона зсувається на деяку величину $\Delta D_1 = \Delta C C_1 = \Delta S$, яка називається абсолютним зсувом. Елемент ABCD перекоситися, а прямі кути перетворяться у гострі або тупі, змінившись на величину γ , котру називають відносним зсувом,

який є мірою перекошення, тобто перекосу кутів прямокутника. Оскільки у конструкціях ми маємо справу лише з пружними деформаціями, то цей кут буде дуже малим і тоді можна записати

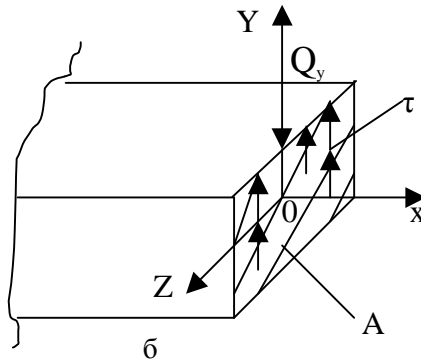
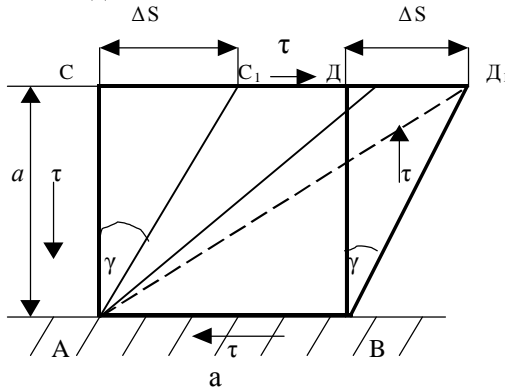


Рисунок 10.1 – Деформація і напруження зсуву

$$\gamma \approx \frac{\Delta S}{a} \quad (10.1)$$

Таким чином відносний зсув приблизно дорівнює абсолютному поділеному на відстань між гранями, які зрушуються. Необхідно відмітити, що зріз є кінцевою стадією деформації зсува, також як і при розтягу є розрив.

Згідно (рис.10.1,б) напруга при зсуві визначається:

$$\tau = \frac{Q_y}{A} \quad (10.2)$$

де Q_y – поперечна сила, яка зрушує паралельні грані; A – площа поперечного перерізу.

Закон Гука при зсуві має вигляд:

$$\tau = \gamma \cdot G, \quad (10.3)$$

де γ – відносний зсув; G – модуль зсуву (модуль пружності другого ряду). Модуль зсуву, зв'язаний з модулем Юнга відношенням:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}, \quad (10.4)$$

де μ – коефіцієнт Пуассона, для сталі можна приймати: $\mu = 0.3$; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, тоді $G \approx 0.4E = 8 \cdot 10^4$ МПа. Абсолютна деформація при зсуві визначається за формулою

$$\Delta S = \frac{Q \cdot a}{G \cdot A}, \quad (10.5)$$

де GA – жорсткість при зсуві. Умовою міцності при зсуві є:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max}}{A_3} \leq [\tau_3], \quad (10.6)$$

де $[\tau_3]$ – припустима напруга при зсуві, яка може бути визначена, як $[\tau_3] = (0.6 \dots 0.8) \sigma_p$ і для вуглецевої сталі можна приймати $[\tau_3] = 100$ МПа, оскільки $[\sigma_p] = 160$ МПа.

Перш ніж вивчати деформації кручення та згину необхідно розглянути відповідні їм геометричні характеристики плоских перерізів: статичні моменти площі перерізу, моменти інерції та моменти опору. Для їх визначення розглянемо рис. 10.2

Виділимо елемент площадки dA та запишемо такі вирази де A

$$S_z = \int y dA, \quad S_y = \int z dA, \quad (10.7)$$

A
 A

визначає, що інтегрування відбувається по площі A ; S_z і S_y , це статичні моменти відносно координатних осей OZ і OY . Звідси, за відомими площею A і її статичними моментами S_z і S_y , можна визначити координати центра ваги у вигляді:

$$Z_c = \frac{S_y}{A}, \quad Y_c = \frac{S_x}{A}. \quad (10.8)$$

Осьові (екваторіальні) моменти інерції площі A визначаємо:

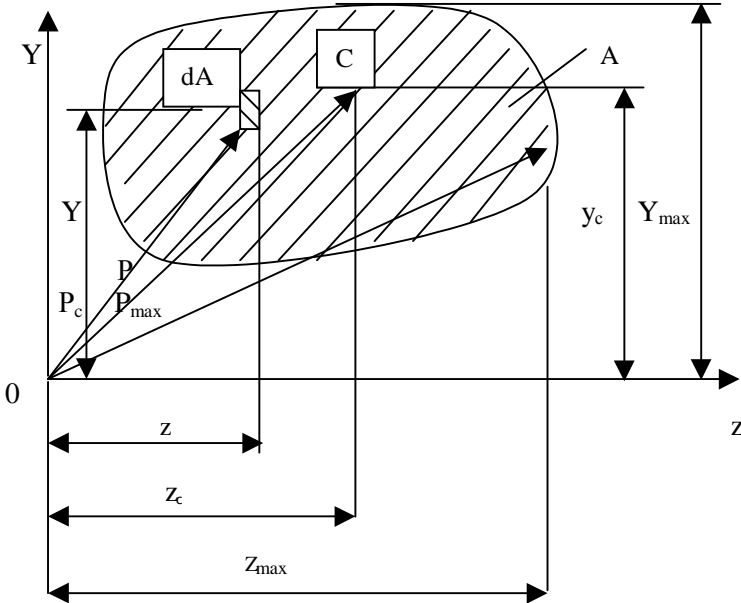


Рисунок 10.2 – Визначення геометричних характеристик плоских перерізів

$$I_z = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A z^2 dA. \quad (10.9)$$

Полярний моменти інерції площі A можна знайти за формулою:

$$I_p = \int_A p^2 dA = \int_A (z^2 + y^2) dA = I_y + I_z \quad (10.10)$$

Відцентровий момент інерції площі A , відносно координатних осей Z і Y , визначається:

$$I_{zy} = \int_A zy \cdot dA. \quad (10.11)$$

Розмірність моментів інерції це четверта степінь одиниці довжини, наприклад, м^4 і т. ін. Осьові моменти інерції та полярний момент інерції завжди позитивні, а відцентровий момент інерції може бути позитивним,

від'ємним або дорівнювати нулю. Осьові і полярний момент опору визначається за формулами:

$$W_z = \frac{I_z}{\varphi_{\max}}, \quad W_y = \frac{I_y}{Z_{\max}}, \quad W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}}. \quad (10.12)$$

До простої форми перерізу відносяться: прямокутник, квадрат, коло, кільце і інші (див. рис. 10.3). Визначаємо для прямокутника (див. рис. 10.3 а). Виділимо нескінченну малу площадку dA у вигляді смужки, що має ширину b і висоту dy , тоді $dA = bdy$. Визначаємо осьові моменти інерції.

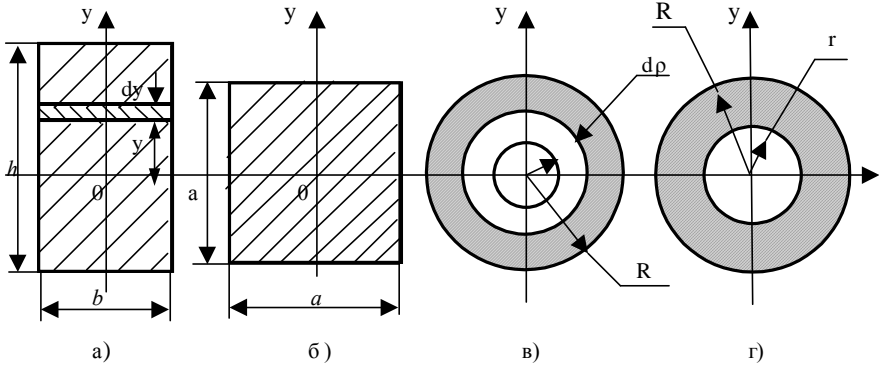


Рисунок 10.3 - Прості форми перерізів

$$I_z = \int_A y^2 dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b dy = \int_0^{\frac{h}{2}} 2by^2 dy = 2b \int_0^{\frac{h}{2}} \frac{y^3}{3} dy = 2b \cdot \frac{h^3}{3 \cdot 8} = \frac{bh^3}{12} \quad (10.13)$$

Аналогічно отримаємо, що

$$I_y = \frac{b^3 h}{12}$$

Визначаємо осьові моменти опору:

$$W_y = \frac{I_y}{I_{\max}} = \frac{bh^3}{12 \cdot \frac{h}{2}} = \frac{b^2 h}{6}. \quad (10.14)$$

Визначаємо для квадрата (рис.10.3,б), враховуючи, що $b=h=a$, тому осеві моменти інерції будуть:

$$I_z = I_y = \frac{a^3}{12} \quad (10.15)$$

і осеві моменти опору:

$$W_z = W_y = \frac{a^3}{6}. \quad (10.16)$$

Визначаємо для кола (див.рис.10.3,в) радіусом R . Виділимо нескінченно малу площадку dA у вигляді кільця шириною $d\rho$, яке розміщене на змінній відстані ρ від плюса, тобто $0 \leq \rho \leq R$, тоді $dA = 2\pi\rho d\rho$. Обчислюємо полярний момент інерції:

$$I_\rho = \int_A \rho^2 dA = \int_0^R \rho^2 \cdot 2\pi\rho \cdot d\rho = \int_0^R 2\pi\rho^3 \cdot d\rho = 2\pi \cdot \int_0^R \frac{\rho^4}{4} d\rho = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32} \quad (10.17)$$

Визначаємо значення осевих моментів інерції кола. Оскільки, внаслідок симетрії, для кола: $I_z = I_y$, то

$$I_z + I_y = I_\rho = \frac{\pi D^4}{32} \quad \text{і тоді} \quad I_z = I_y = \frac{1}{2} I_\rho = \frac{\pi D^4}{64} \quad (10.18)$$

Визначаємо моменти опору:

$$W_\rho = \frac{I_\rho}{\rho_{\max}} = \frac{\pi D^4}{64 / \frac{D}{2}} = \frac{\pi D^3}{16}$$

$$W_z = W_y = \frac{I_z}{Y_{\max}} = \frac{\pi D^4}{64 / \frac{D}{2}} = \frac{\pi D^3}{32} \quad (10.19)$$

Визначаємо для кільця (див.рис.10.3,г), що має розміри $d \times D$ або $r \times R$. Полярний момент інерції для кільця отримаємо аналогічно колу, якщо вираз полярного моменту інерції проінтегруємо у межах:

$$\frac{d}{2} \leq \rho \leq \frac{D}{2}$$

$$I_\rho = \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{D}{2}} \rho^2 2\pi\rho \cdot d\rho = 2\pi \cdot \frac{\rho^4}{4} d\rho = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - C^4), \quad (10.20)$$

де $C = \frac{d}{D}$ відношення внутрішнього діаметра кільця до зовнішнього.

Аналогічно маємо:

$$I_z = I_y = \frac{\pi D^4}{64} (C - 1). \quad (10.21)$$

Моменти опору:

$$\left. \begin{aligned} W_\rho &= \frac{I_\rho}{\rho_{\max}} = \frac{\frac{\pi D^4}{32} (1 - C^4)}{\frac{D}{2}} \\ W_z &= W_y = \frac{\pi D^4}{32} (1 - C^4) \end{aligned} \right\} \quad (10.22)$$

10.5

При розв'язанні різних практичних задач часто виникає потреба визначити моменти інерції, а також і моменти опору складних перерізів відносно тих чи інших осей, що лежать у площині перерізу. Для стандартних поперечних перерізів стержнів (кутових рівнобоких та нерівнобоких, двотаврових, швелерних та інших) моменти інерції відносно різних осей наведено в таблицях сортamentів.

При визначенні моментів інерції складних перерізів останні можна розбити на прості частини, моменти інерції яких відомі, і потім записати алгебраїчну суму цих відповідних моментів інерції, яка і буде моментом інерції складного перерізу, тобто:

$$I_z = \sum_{i=1}^n I_{zi} \quad \text{і} \quad I_y = \sum_{i=1}^n I_{yi}. \quad (10.23)$$

Моменти опору складних перерізів визначаються за формулами:

$$W_z = \frac{I_z}{Y_{\max}} \quad \text{і} \quad W_y = \frac{I_y}{Z_{\max}}, \quad (10.24)$$

де I_z і I_y - моменти інерції складного перерізу і I_{\max} , Z_{\max} - найбільш віддалені точки складного перерізу від початку координат осей. Слід зауважити, що коли в складному перерізі є отвір, то відповідний момент інерції отвору береться із знаком мінус.

10.6

Нехай відомі моменти інерції плоского перерізу відносно центральних осей z та y (осі, які проходять через центр ваги, називаються центральними):

$$I_z = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A z^2 dA, \quad I_{zy} = \int_A zy dA.$$

Треба визначити моменти інерції відносно осей, паралельних центральним (рис 10.4):

$$I_{z_1} = \int_A (I_z)^2 dA, \quad I_{y_1} = \int_A (z_1)^2 dA, \quad I_{z_1 y_1} = \int_A (z_1 \cdot y_1)^2 dA \quad (10.25)$$

Координати будь-якої точки у новій системі $z_1 o_1 y_1$ можна виразити через координати в старих осях (тобто у системі zoy):

$$Z_1 = Z + b \quad Y_1 = y + a$$

Підставляємо ці величини у формули (10.25) та інтегруємо почленно:

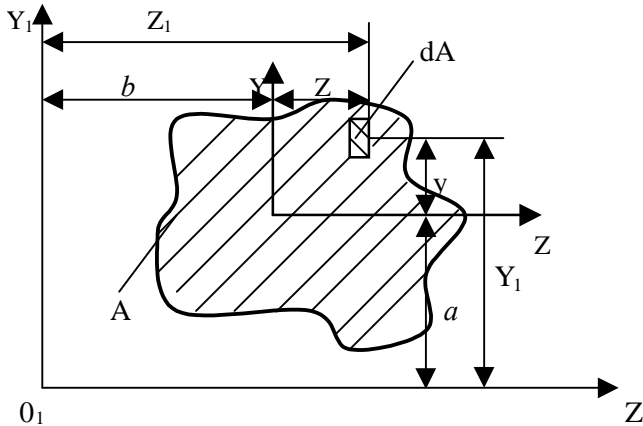


Рисунок 10.4 - Визначення моментів інерції відносно паралельних осей

$$I_{z_1} = \int_A (y_1)^2 dA = \int_A (y + a)^2 dA = \int_A y^2 dA + \int_A a^2 dA + 2a \int_A y dA \quad (10.26)$$

$$I_{y_1} = \int_A (z_1)^2 dA = \int_A (z + b)^2 dA = \int_A z^2 dA + \int_A b^2 dA + 2b \int_A z dA \quad (10.27)$$

$$I_{z_1 y_1} = \int_A z_1 y_1 \cdot dA = \int_A (z+b)(y+a) dA = \int_A zy \cdot dA + ab \int_A dA + a \int_A z dA + b \int_A y dA \quad (10.28)$$

Оскільки інтеграли:

$$\int_A y dA = S_z \quad \text{та} \quad \int_A z dA = S_y$$

дорівнюють нулю як статичні моменти відносно центральних осей, то формули (10.26), (10.27) і (10.28) набувають вигляду:

$$I_{z_1} = I_z + a^2 A \quad I_{y_1} = I_y + b^2 A \quad (10.29)$$

$$I_{z_1 y_1} = I_{zy} + abA \quad (10.30)$$

Отже:

1) момент інерції плоского перерізу відносно довільної осі дорівнює моменту інерції відносно центральної осі, паралельній даній, плюс добуток площі перерізу на квадрат відстані між цими осями.

2) відцентровий момент інерції відносно довільної системи взаємно перпендикулярних осей дорівнює відцентровому моменту інерції відносно центральних осей, паралельних даним, плюс добуток площі перерізу на координати її центра ваги в нових осях.

Зазначимо, що координати a , b у формулі (10.30) треба підставляти, враховуючи їхній знак.

Формули (10.29) показують, що моменти інерції перерізу відносно центральних осей завжди будуть меншими, порівняно з моментами інерції відносно паралельних осей.

11.1

Крученням називається деформація, яка виникає при прикладенні до кінців стержня двох пар сил, які діють у площинах, перпендикулярних до осі стержня і мають рівні протилежні моменти. Кручення вала відбувається внаслідок його навантаження зовнішніми крутильними моментами, які на відміну від внутрішнього силового чинника крутного моменту M_k (M_x), будемо позначати літерою T .

Крутильні моменти часто на практиці бувають задані ні моментами T_i , а потужністю P_i , що передається на вал, і кутовою швидкістю обертання вала ω_i або кількістю обертів за хвилину n_i . Тоді крутильний момент визначається за формулою:

$$T = \frac{P}{\omega}, \text{ Нм} \quad (11.1)$$

де P - потужність, що передається валом, Вт;

ω - кутова швидкість, рад/с.

Якщо задана частота вала, тоді визначається спочатку кутова швидкість:

$$\omega = \frac{\pi n}{30}, \quad (11.2)$$

де n - частота обертання, об/хв.

Для визначення крутних моментів користуємося методом перерізів. При цьому треба обумовитись правилом знаків прикладення крутного моменту. Так для стержня (див. рис. 11.1а) необхідно враховувати:

1) коли розглядаємо праву частину стержня, то прикладаємо внутрішній силовий чинник M_k так, щоб спостерігач, із позитивного кінця осі X , бачив його напрямом за рухом годинникової стрілки (див. рис.11.1,б).

2) коли розглянемо ліву частину стержня, то прикладаємо внутрішній силовий чинник M_k так, щоб спостерігач, із позитивного кінця осі x , бачив його напрямом проти руху годинникової стрілки (див. рис.11.1, в).

Потім при розгляданні якоїсь частини стержня, записавши рівняння рівноваги, знаходимо величину і знак внутрішнього силового чинника M_k (крутного момента). Слід зазначити, що розглядаємо кручення тільки для перерізів, які мають форму кола або кільця.

Розглянемо визначення крутних моментів для стержня (див. рис. 11.2,а). Спочатку можна визначити реакцію опори A , для цього записавши рівняння рівноваги:

$$\sum m_x = 0 \quad T_R - t \cdot 2a + 5T - 3T = 0 \quad \text{звідси}$$

$$T_R = a - 5T + 3T = 2 \cdot 2 \frac{T}{a} a - 2T = 2T$$

Тепер для визначення крутних моментів розглядаємо дві ділянки, роблячи два перерізи 1-1 і 2-2, див. рис. 11.2,а.

Розглядаємо ділянку BC, де X_1 знаходиться у межах $0 \leq X_1 \leq a$, і у думці прикладаємо до правої частини стержня M_{k1} (див. рис. 11.1,б). Після цього запишемо рівняння рівноваги, що $\sum m_x = 0 \quad M_{k1} - 3T = 0$ звідси $M_{k1} = 3T = const$, тобто на ділянці BC діє постійний крутний момент M_{ki} .

Розглядаємо ділянку АВ, де крім зосередженого крутильного моменту T_R , діє ще і розподілений крутильний момент $t = 2T/a$. На цій ділянці x_2 знаходяться у межах $0 \leq x_2 \leq 2a$ і у думці до лівої частини стержня прикладаємо M_{k2} (див. рис. 11.1, в). Після цього записуємо рівняння рівноваги, що:

$$\sum m_x = 0 \quad T_R - t \cdot x_2 - M_{k2} = 0 \quad \text{звідси}$$

$$M_{k2} = T_R - t \cdot x_2 = 2T - 2 \frac{T}{a} x_2,$$

тобто на ділянці АВ діє змінний крутний момент M_{k2} . Знаходимо величини крутного моменту M_{k2} у перерізах А та В. У перерізі А, $x_2 = 0$, тому $M_{k2} = 2T$. У перерізі В, $x_2 = 2a$, тому $M_{k2} = 2T - 2T/a \cdot 2a = -2T$. Для того, щоб було видно, як змінюється крутний момент, будуємо його епюру, тобто графічне зображення крутного моменту по довжині стержня. Епюру крутних моментів будуємо на підставі розгляду обох ділянок стержня (див. рис. 11.2,б).

Треба зауважити, що на епюрі крутних моментів в перерізі, де прикладений зосереджений крутильний момент, завжди буде стрибок на його величину. На ділянках, де прикладений розподілений крутильний момент, на епюрі крутних моментів будуть похилі прямі лінії, а на інших ділянках будуть горизонтальні прямі лінії.

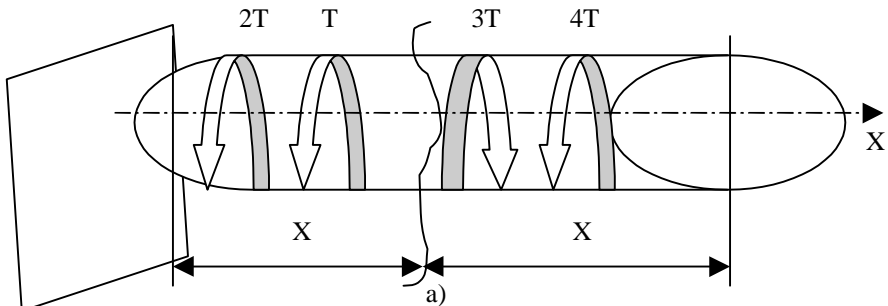


Рисунок 11.1 - Правило знаків при крученні

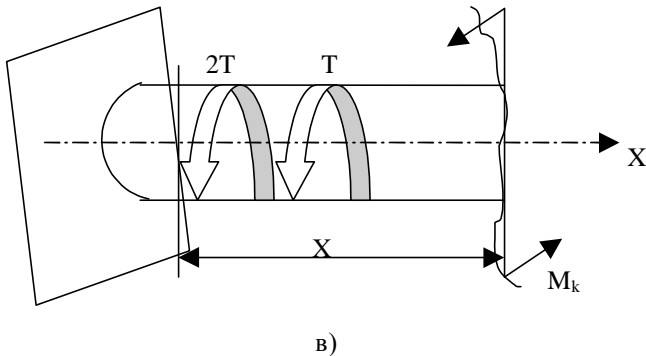
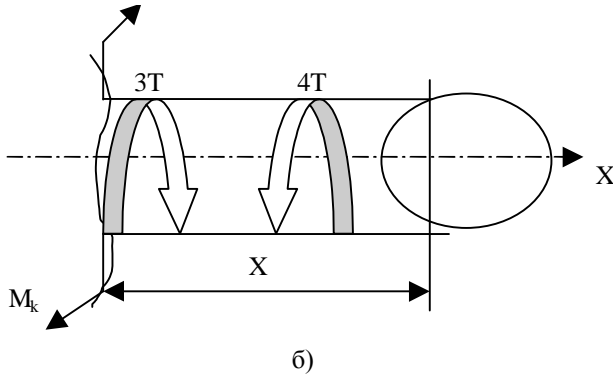


Рисунок 11.1 - Правило знаків при крученні (продовження)

Напруга при крученні визначається за формулою:

$$\tau_i = \frac{M_{ki}}{I_\rho} \cdot \rho, \quad (11.3)$$

де M_{ki} - крутний момент у перерізі, який розглядаємо і беремо його із епюри крутних моментів; I_ρ - полярний момент інерції перерізу; ρ - поточний радіус до точки, де визначається напруга (див. рис. 11.3), причому він знаходиться у межах, $0 \leq \rho \leq R$. Враховуючи, що відношення M_{ki}/I_ρ є постійна величина для окремого перерізу, то можна зробити висновок, що дотична напруга τ_i прямопропорційна поточному радіусу ρ і в центрі перерізу (центр ваги перерізу, точка О) напруга кручення дорівнює нулю, $\tau_0=0$ (тому що $\rho_0=0$). По мірі зростання ρ , напруга збільшується і досягає найбільшої величини на

поверхні перерізу (див. рис. 11.3., $\tau_A = \tau_{\max}$). Таким чином видно, що максимальна дотична напруга у розглядаємому перерізі, буде в точці А, тобто на поверхні перерізу і вона визначається за формулою:

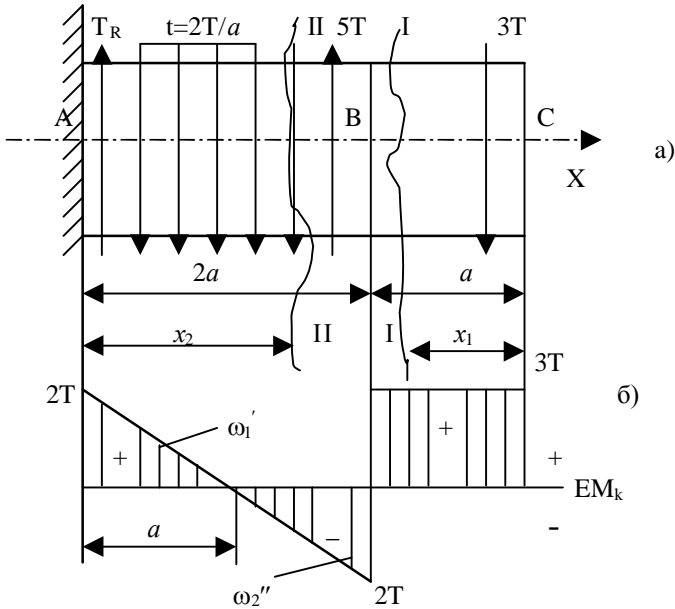


Рисунок 11.2 – Визначення крутних моментів

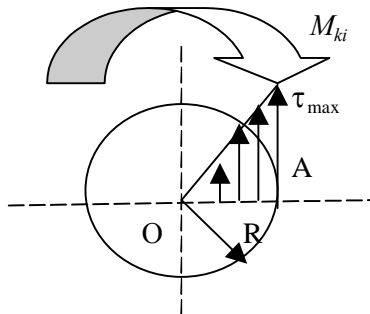


Рисунок 11.3 - Визначення напруги

$$\tau_{\max} = \frac{M_{k_i}}{I_{\rho}} \cdot \rho_{\max} = \frac{M_{k_i}}{I_{\rho}} \cdot R = \frac{M_{k_i}}{I_{\rho} / R} = \frac{M_{k_i}}{W_{\rho}} \quad (11.4)$$

Умова міцності при крученні має вигляд:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{k_{\max}}}{W_{\rho}} \leq [\tau], \quad (11.5)$$

де $[\tau]$ - припустима напруга при крученні і для вуглецевої сталі можна приймати, що $[\tau] = 100$ МПа. Використовуючи умову міцності, визначають діаметр вала.

$$W_{\rho} = \frac{\pi D^3}{16} \geq \frac{M_{k_{\max}}}{\tau} \quad \text{звідси} \quad D \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_{k_{\max}}}{\pi [\tau]}}. \quad (11.6)$$

Використовуючи рис. 11.2 можна записати, що

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 3T}{\pi [\tau]}}.$$

Характеристиками деформації при крученні є: абсолютний кут закручення φ і відносний кут закручення $\theta = \varphi / L$ (L - довжина відповідна). Абсолютний кут закручення визначається за формулою:

$$\varphi_i = \frac{M_{k_i} \cdot L_i}{G \cdot I_{\rho}} = \frac{\omega_i}{G \cdot I_{\rho}}, \quad (11.7)$$

де L_i - довжина розглядаємої ділянки;

G - модуль пружності другого роду (для сталі $G = 8 \cdot 10^4$ МПа);

ω_i - площа епюри крутних моментів відповідної ділянки.

Повний абсолютний кут закручення усього стержня (вала) визначається:

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i. \quad (11.8)$$

Відносний кут закручення обчислюється:

$$\theta_i = \varphi_i / L_i = M_{k_i} / G \cdot I_{\rho}. \quad (11.9)$$

Умовою жорсткості при крученні є:

$$\theta_{\max} = M_{k_{\max}} / G \cdot I_{\rho} \leq \theta, \quad (11.10)$$

де $[\theta]$ - припустимий кут закручення, для вуглецевої сталі можна приймати $\theta = (0.15 \dots 0.25) \cdot 10^{-4}$ рад/мм. Використовуючи умову міцності

також визначають діаметр вала, і в подальші розрахунки беруть його більше значення із цих двох обчислювань.

$$I_{\rho} = \frac{\Pi D^4}{32} \geq \frac{M_{k_{\max}}}{G \cdot [\Theta]} \text{ і звідси } D \geq \sqrt[4]{\frac{32 M_{k_{\max}}}{\Pi [\Theta] G}}. \quad (11.1)$$

Визначимо абсолютну деформацію для стержня (див. рис. 11.2).

$$\varphi_c = \varphi_{\text{вс}} + \varphi_{\text{ав}} = \varphi_1 + \varphi_2$$

$$\varphi_1 = \frac{M_{k_i} \cdot L_1}{G \cdot I_{\rho}} = 3 \frac{Ta}{GI_{\rho}}, \quad \varphi_2 = \frac{\omega_2}{G \cdot I_{\rho}} = \frac{\omega_2' + \omega_2''}{GI_{\rho}}$$

$$\omega_2' = \frac{1}{2} \cdot 2Ta = Ta, \quad \omega_2'' = \frac{-1}{2} \cdot 2Ta = -Ta, \text{ тому}$$

$$\varphi_2 = 0, \quad \varphi_c = \varphi_1 = \frac{3Ta}{GI_{\rho}}.$$

Якщо до кінців стержня у площині його осі прикласти дві рівні протилежно направлені пари сил, то така деформація називається згином. Якщо згинаючий момент єдиний, силовий чинник (див. рис. 12.1,а), то такий згин називається чистим.

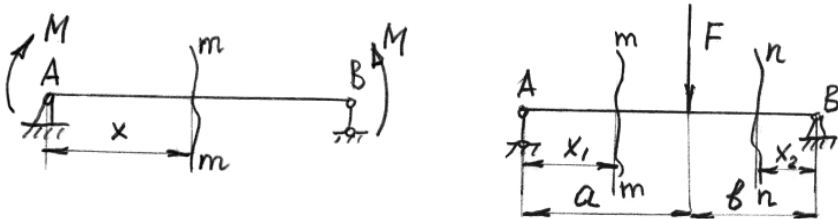


Рисунок 12.1 - Види згина

Якщо поряд із згинаючим моментом у поперечному перерізі виникають і поперечні сили, а нормальна сила при цьому дорівнює нулю, то існує

поперечний згин (див. рис. 12.1,б). Стержні, які працюють на згин, називають балками. Балки мають три основних типа опор (див. рис. 12.2):

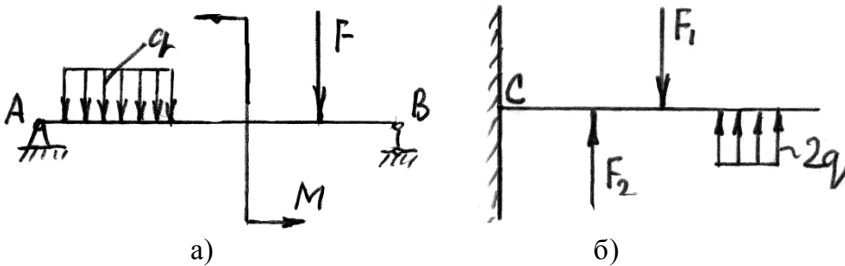


Рисунок 12.2 - Типи опор балок

1) шарнірно-рухома опора В (див. рис. 12.2,а) може сприймати вертикальне навантаження, в цій опорі виникає тільки вертикальна реакція R_y ;

2) шарнірно-нерухома опора А (див. рис. 12.2,а) може сприймати вертикальні і горизонтальні зусилля, в ній виникають горизонтальні і вертикальні реакції R_x та R_y ;

3) жорстке защемлення С (див. рис. 12.2,б) сприймає вертикальне, горизонтальне і моментне навантаження – реакції R_x , R_y і M_R .

Під дією зовнішніх навантажень у місцях стержня (балки) виникають опорні реакції. Для визначення опорних реакцій у статично визначеному стержні достатньо скласти три рівняння рівноваги статички. Для статично невизначеного стержня додають рівняння сумісності деформації.

Спочатку обмежимося розглядом найпростішого випадку згину балок, при якому всі задані навантаження діють в одній площині, що називається силовою (див. рис. 12.3, а – площина Π), причому ця площина збігається з однією з головних площин балки. Такий випадок називається плоским згином. На розрахунковій схемі балку прийнято замінювати її віссю (див. рис. 12.3,б). При цьому всі навантаження, природно, повинні зводитися до осі балки, і силова площина буде збігатися з площиною рисунка. Тому все це навантаження не дає проєкцій на вісь Z та моментів відносно осей X та Y . Отже, в будь-якому перерізі балки $Q_z = M_x = M_y = 0$, і не є нульовими тільки три величини: N_x , Q_y та M_z . Ці зусилля діють також у перерізах елементів рам та криволінійних стержнів. У балках, при навантаженні, перпендикулярному до осі балки, поздовжня сила (N_x) також дорівнюватиме нулю. Тому надалі будемо вважати, що в будь-якому перерізі балки можуть бути два внутрішні

зусилля: поперечна сила Q_y та згинаючий момент M_z , які і є внутрішніми силовими чинниками при згині.

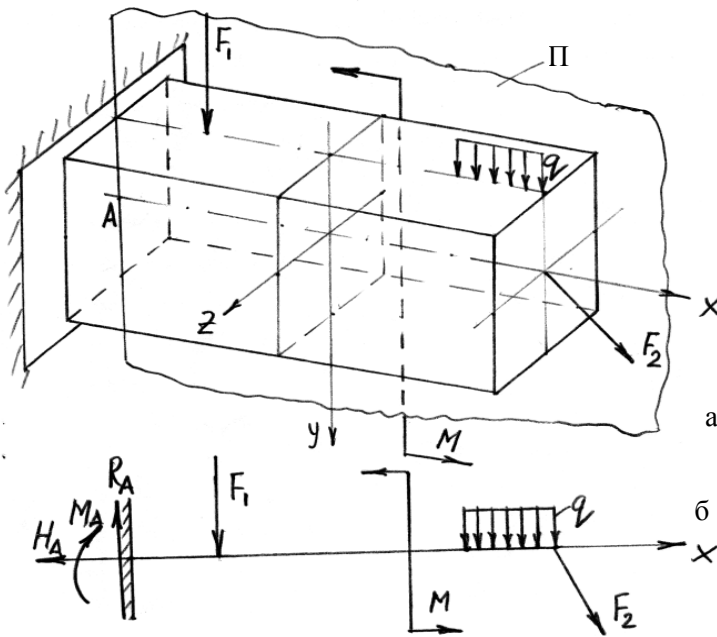


Рисунок 12.3 – Плоский згин

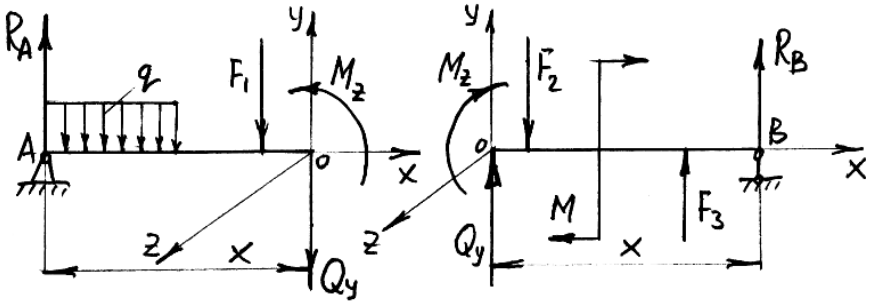
Установимо такі правила знаків для Q_y і M_z в балках:

1) поперечна сила Q_y у перерізі додатна, якщо її вектори намагаються обертати частини розсіченої балки за рухом годинникової стрілки;

2) згинаючий момент M_z у перерізі додатний, якщо він спричинює стиск у верхніх волокнах балки і спрямований на частину розсіченої балки. Для практичних розрахунків можна рекомендувати таке.

Якщо розглядаємо ліву частину балки (див. рис. 12.4,а), то внутрішні силові чинники прикладаємо: поперечну силу Q_y за напрямком униз, а згинаючий момент M_z за напрямком на розглядаєму частину балки. Якщо розглядаємо праву частину балки (див. рис. 12.4,б), то внутрішні силові чинники прикладаємо: поперечну силу Q_y за напрямком угору, а згинаючий момент M_z знов за напрямком на розглядаєму частину балки. Після цього складаємо рівняння рівноваги

$$\sum F_{ky} = 0 \quad \text{і} \quad \sum m_0(\bar{F}_k) = 0 \quad (12.1)$$



а)

б)

Рисунок 12.4 – Правило знаків при згині

і визначаємо внутрішні силові чинники Q_y та M_z за величиною і знаком.

Для визначення внутрішніх силових чинників Q_y і M_z використовуємо метод перерізів і будуємо їх епюри, тобто графіки зміни поперечних сил і згинаючих моментів вздовж центральної осі балки. Побудову епюр Q_y і M_z у більшості випадків слід починати із визначення реакцій опор.

Визначив реакції, балку слід розрізати на ділянки, на протязі яких навантаження однорідне. Для кожної ділянки складаємо загальний вираз для поперечної сили та згинаючого моменту, для цього розглядаємо довільний переріз у межах даної ділянки і будуємо епюри, надаючи аргументу x довільні значення у межах тієї ж ділянки.

Порядок побудови епюр розглянемо на прикладі шарнірно опертій балки, яка має навантаження (див. рис. 12.5,а).

Спочатку визначаємо реакції опор, записавши два рівняння рівноваги для усієї балки.

$$\sum m_A = 0 \quad -2q \cdot a \cdot \frac{a}{2} + F \cdot a - M - R_B \cdot 2a = 0$$

звідси

$$R_B = \frac{-qa^2 + qa^2 - qa^2}{2a} = -\frac{qa}{2},$$

знак “мінус” вказує, що реакція R_B має напрямок униз (див. $R_B = 0,5qa$ з двома рисками)

$$\sum m_B = 0 \quad -2q \cdot a \cdot (0,5a + 2a) + R_A \cdot 2a - F \cdot a - M = 0,$$

звідси
$$R_A = \frac{5qa^2 + qa^2 + qa^2}{2a} = 3,5qa.$$

Записуємо перевіряюче рівняння

$$\begin{aligned} \sum F_{ky} &= -2q \cdot a + R_A - F - R_B = -2qa + 3,5qa - qa - 0,5qa = \\ &= -3,5qa + 3,5qa \equiv 0, \end{aligned}$$

тобто реакції опор визначені вірно. Далі переходимо до розгляду ділянок CA, DB і AB.

Ділянка CA, переріз I-I, $0 \leq x_1 \leq a$

Складаємо рівняння рівноваги для розглядаємої ділянки.

$$1) \sum F_{ky} = -2qx_1 - Q_{y1} = 0, \quad \text{звідси } Q_{y1} = -2qx_1,$$

це означає, що поперечна сила на ділянці CA має змінну величину (рівняння прямої лінії, тому, що x_1 у першій степені). Надаючи два значення x_1 , дістанемо, що при $x_1=0$ (пер. C) $Q_{y1}=0$, а при $x_1=a$ (пер. A) $Q_{y1}=-2qa$.

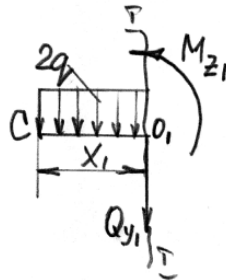
$$2) \sum m_{O1} = -2qx_1 \cdot \frac{x_1}{2} - M_{Z1} = 0, \quad \text{звідси}$$

$M_{Z1} = -qx_1^2$, це означає, що згинаючий момент на цій ділянці не тільки має змінну величину, але вона вже змінюється по кривій другого порядку, тому що x_1 знаходиться у квадраті. Надаємо три значення x_1 і дістанемо:

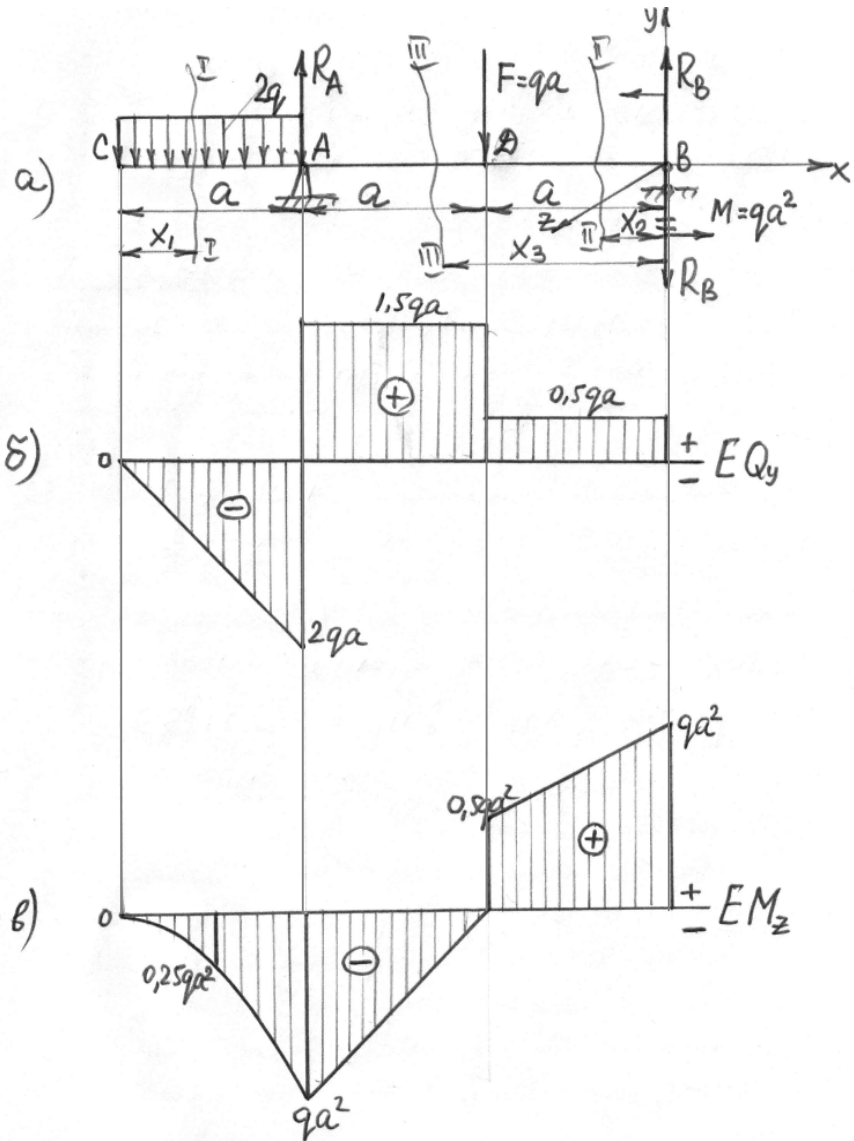
при $x_1=0$ (пер. C), $M_{Z1}=0$;

при $x_1=0,5a$ (середина ділянки CA), $M_{Z1}=-0,25qa^2$;

при $x_1=a$ (пер. A), $M_{Z1}=-qa^2$.

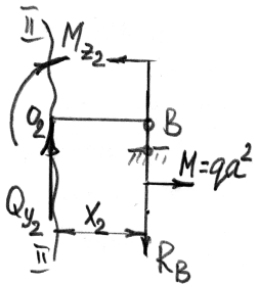


Якщо на ділянці крім розподіленого навантаження діє ще якась навантаження протилежного знаку, то необхідно при визначенні згинаючого моменту знайти його найбільше значення, використовуючи рівняння нулю похідної від нього.

Рисунок 12.5 – Побудова епюр Q_y і M_z

Ділянка BD, переріз II – II, $0 \leq x_2 \leq a$

Складаємо рівняння рівноваги.



1) $\sum F_{ky} = Q_{y2} - R_B = 0$, звідси $Q_{y2} = R_B = 0,5qa$, тобто на ділянці BD поперечна сила Q_{y2} має постійне значення.

2) $\sum m_{O2} = 0$, $M_{22} + R_B x_2 - M = 0$, звідси $M_{22} = M - 0,5qax_2$, рівняння прямої лінії для побудови якої достатньо подати два значення x_2 .

При $x_2 = 0$ (пер. B), $M_{22} = M = qa^2$;

при $x_2 = a$ (пер. D), $M_{22} = qa^2 - 0,5qa$

$$^2 = 0,5qa^2.$$

Ділянка AD, переріз III-III, $a \leq x_3 \leq 2a$.

Складаємо рівняння рівноваги.

1) $\sum F_{ky} = Q_{y3} - F - R_B = 0$,

звідси $Q_{y3} = F + R_B = qa + 0,5qa = 1,5qa$,

тобто на цій ділянці $Q_{y3} = \text{const}$.

$\sum m_{O3} = M_{Z3} + F(x_3 - a) +$

$R_B \cdot x_3 - M = 0$, звідси

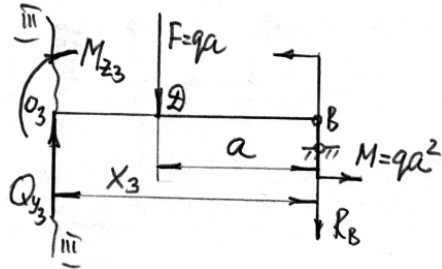
2) $M_{Z3} = M - F(x_3 - a) - R_B x_3$,
рівняння прямої лінії.

При $x_3 = a$ (пер. D), $M_{Z3} = M -$

$R_B a = qa^2 - 0,5qa^2 = 0,5qa^2$,

при $x_3 = 2a$ (пер. A),

$M_{Z3} = M - Fa - 2R_B a = qa^2 - qa^2 - qa^2 = -qa^2$.



По отриманим величинам Q_y і M_z при дослідженні усіх ділянок будемо епюру поперечних сил (див. рис. 12.5, б) і епюру згинаючих моментів (див. рис. 12.5, в).

Слід зауважити, що:

1. На епюрі поперечних сил у перерізі, де діє зосереджена сила, завжди буде стрибок на її величину, а на епюрі згинаючих моментів також буде стрибок на величину зосередженого згинаючого моменту у перерізі, де він діє;

2. Там, де діє розподілене навантаження, буде похила пряма лінія, а на інших ділянках будуть горизонтальні прямі лінії (це стосується епюри Q_y), а на епюрі M_z там, де буде розподілене навантаження, будуть криві лінії другого порядку, які направлені опуклістю угору, якщо розподілене навантаження має напрямок униз і опуклістю направлено униз, якщо

розподілене навантаження має напрямок угору (правило парасольки), а на інших ділянках будуть похилі прямі лінії;

3. У перерізі, де епюра Q_y змінює свій знак, на епюрі згинаючих моментів буде максимальне значення згинаючого моменту (так у перерізі А, $M_{z \max} = qa^2$, див. рис. 12.5, в).

При згині існують такі диференціальні залежності:

$$Q_y = \frac{dM_z}{dx}, \quad (12.2)$$

тобто поперечна сила дорівнює першій похідній від згинаючого моменту.

$$q = \frac{dQ_y}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dM_z}{dx} \right) = \frac{d^2 M_z}{dx^2}, \quad (12.3)$$

тобто розподілене навантаження дорівнює першій похідній від поперечної сили або другій похідній від згинаючого моменту.

Перевіримо ці залежності, використовуючи балку (див. рис. 12.5):

ділянка СА, маємо: $Q_{y1} = -2qx_1$ і $M_{z1} = -qx_1^2$

$$\frac{dM_z}{dx} = (-qx_1^2)' = -2qx_1 = Q_y \quad \text{і} \quad \frac{dQ_y}{dx} = (-2qx_1)' = -2q$$

(знак “мінус” вказує, що розподілене навантаження має напрямок униз).

Ділянка BD, маємо: $Q_{y2} = 0,5qa$ і $M_{z2} = M - 0,5qax_2$

$$\frac{dM_z}{dx} = \frac{d}{dx} (M - 0,5qax_2) = -0,5qa \quad (R_B \text{ має напрямок униз})$$

$$\frac{dQ_y}{dx} = \frac{d}{dx} (0,5qa) = 0,$$

тобто розподілене навантаження відсутнє.

Нормальна напруга при згині визначається за формулою

$$\sigma = \frac{M_z}{I_z} \cdot y, \quad (12.4)$$

де M_z – згинаючий момент у розглядаємому перерізі, I_z – осьовий момент інерції цього перерізу і y – поточна координата по висоті перерізу від центру його ваги.

Оскільки для окремого перерізу відношення $M_z/I_z = \text{const}$, то нормальна напруга для нього прямо пропорційна координаті y , отже, у центрі ваги перерізу вона дорівнює нулю, а на поверхні перерізу досягає максимального значення (див. рис. 12.6, б), яке визначається:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{I_z} \cdot y_{\max} = \frac{M_z}{I_z} \cdot \left(\pm \frac{h}{2} \right) = \pm \frac{M_z}{\frac{h}{2}} = \pm \frac{M_z}{W_z}, \quad (12.5)$$

де W_z – момент опору розглядаємого перерізу.

Дотична напруга при згині визначається за формулою

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_z^{\text{відс.}}}{b \cdot I_z}, \quad (12.6)$$

де Q_y – поперечна сила у розглядаємому перерізі, b – ширина перерізу і $S_z^{\text{відс.}}$ – статичний момент відсіченої частини перерізу відносно осі z від лінії, де визначається напруга. Для перерізу (див. рис. 12.6, а) маємо

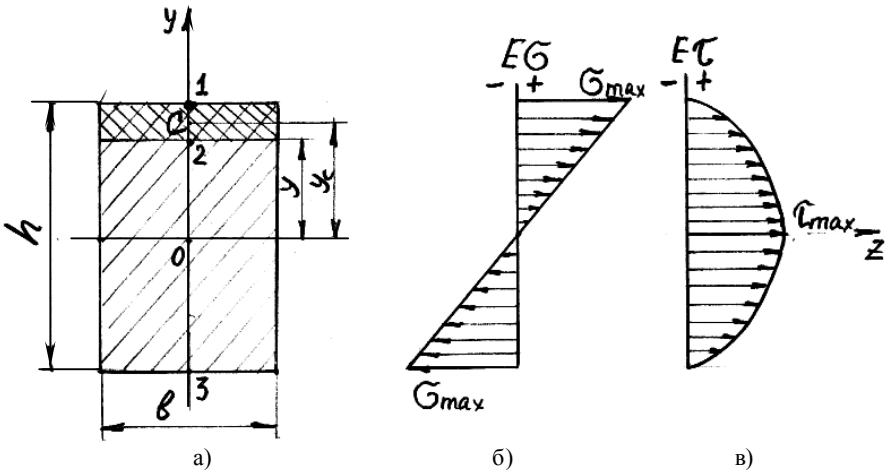


Рисунок 12.6 – Нормальна і дотична напруги прямокутного перерізу

$$S_z^{\text{відс.}} = A^{\text{відс.}} \cdot y_c = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \cdot \left[y + \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} - y \right) \right] = \frac{1}{2} b \left(\frac{h}{2} - y \right) \left(\frac{h}{2} + y \right) =$$

$$= \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad \text{і тоді} \quad \tau = \frac{Q_y \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{b \cdot \frac{bh^3}{12}} = \frac{6Q_y \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right)}{bh^3} \quad (12.7)$$

Досліджуючи формулу (12.7) відмічаємо, що на поверхні перерізу при $y = \pm \frac{h}{2}$, дотична напруга дорівнює нулю, а у центрі ваги вона досягає максимальної величини (див. рис. 12.6,в) і дорівнює

$$\tau_{\max} = \frac{6Q_y \cdot \frac{h^2}{4}}{bh^3} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{bh} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{A} \quad (12.8)$$

Досвід показує, що перевірка міцності по дотичній напрузі виявляється вирішальною тільки для дуже коротких і високих балок, а також для матеріалів, які недостатньо чинять опір сколюванню і тому розрахунок балок ведеться по нормальним напругам і умова міцності при згині має вигляд:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{z \max}}{W_z} \leq [\sigma], \quad (12.9)$$

де $M_{z \max}$ – максимальна згинаюча напруга, взята із епюри M_z , $[\sigma]$ – припустима напруга при згині, яка дорівнює припустимій напрузі при розтягу. Із умови міцності можна визначити потрібний осьовий момент опору балки

$$W_z \geq \frac{M_{z \max}}{[\sigma]}, \quad (12.10)$$

Співвідношення (12.10) дозволяє приймати раціональну форму поперечного перерізу балки, тобто приймати ту форму перерізу, яка має більший W_z при однаковій площі.

У випадку, коли необхідно врахувати і дотичну напругу, умова міцності має вигляд:

$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}{2} \leq [\sigma] \quad (12.11)$$

У формулу (12.11) підставляють значення σ і τ для відповідного перерізу балки.

Стержні, які застосовуються в інженерних спорудах, повинні володіти не тільки визначеною міцністю, але і достатньою жорсткістю.

Під розрахунком на жорсткість розуміють оцінку пружної піддатливості балки під дією прикладеного навантаження та добір таких розмірів поперечного перерізу, при яких переміщення не буде перевищувати встановлених нормами границь. Для виконання такого розрахунку треба навчитись обчислювати переміщення точок балки під дією будь-яких зовнішніх навантажень. Розглядаючи деформацію балки при плоскому згині, можна відмітити, що вісь балки під дією навантаження в одній з головних площин інерції викривлюється в тій самій площині, а поперечні перерізи повертаються і водночас дістають поступальне переміщення в напрямі осі y . Викривлену вісь балки називають зігнутою віссю або пружною лінією. Переміщення центру ваги перерізу в напрямі, перпендикулярному до недеформованої осі балки, називається прогином балки в даному перерізі й позначається літерою y , а найбільший прогин балки називається стрілою прогину і позначається літерою f . Кут θ , на який кожний переріз повертається відносно свого початкового положення, називається кутом повороту перерізу і він визначається за формулою

$$\theta(x) = \frac{dy(x)}{dx} = y' , \quad (12.12)$$

Припустимі прогини та кути повороту перерізів встановлюються нормами.

Визначимо диференційне рівняння пружної лінії балки. Враховуючи, що між кривизною і згинаючим моментом існує зв'язок

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EI_z} , \quad (12.13)$$

де ρ – радіус кривизни, і якщо балка постійного перерізу та відчуває “чистий” згин, то можна записати

$$\frac{M_z}{EI_z} = \text{const} . \quad (12.14)$$

Отже, $\rho^{-1} = \text{const}$ і $\rho = \text{const}$, це вказує на те, що вісь балки деформується по колу. Слід відмітити, що в загальному випадку безпосередньо застосовувати закон визначення кривизни для обчислення прогинів не

вдається. Для аналітичного розв'язання цієї задачі використовується значення кривизни (дивись курс математики):

$$K = \frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (12.15)$$

Підставивши в (12.13) значення кривизни із (12.15) дістаємо диференціальне рівняння осі зігнутої балки

$$\pm \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{M_z}{EI_z} \quad (12.16)$$

Інтегрування цього рівняння пов'язано з великими труднощами (воно нелінійне і неоднорідне другого порядку), але враховуючи, що на практиці маємо справу з малими прогинами ($y_{\max} < (0,002 \dots 0,003)l$) тоді тангенси кутів нахилу (dy/dx) дотичної до осі будуть малі і тому квадратом першої похідної у знаменнику $(dy/dx)^2$ у порівнянні з одиницею можливо знехтувати і тому рівняння (12.16) приймає вигляд:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \pm \frac{M_z}{EI_z} \quad (12.17)$$

Рівняння (12.17) є наближеним диференціальним рівнянням осі зігнутої балки. Два знаки у рівнянні (12.17) поставлені тому, що знак кривизни може не співпадати із знаком згинаючого моменту. Для визначення знаків можна скористатися такою умовою. Якщо вісь у направлена угору, то у рівнянні (12.17) береться знак “плюс”, а якщо униз, то - “мінус”.

Для того, щоб отримати аналітичний вираз для прогинів, необхідно знайти рішення до рівняння (12.17). Права частина цього рівняння є відомою функцією від x , тому, інтегруючи рівняння (12.17) перший раз, отримуємо:

$$\frac{dy}{dx} = \pm \int \frac{M_z}{EI_z} dx + C, \quad (12.18)$$

де dy/dx – це кут повороту перерізу. Інтегруючи другий раз рівняння (12.17) дістаємо прогин:

$$y = \pm \iint \frac{M_z}{EI_z} dx^2 + CX + D \quad (12.19)$$

Постійні величини інтегрування C і D знаходимо, використовуючи граничні умови, які залежать від способу закріплення балки. Розглянемо приклад визначення прогину для консольної балки (див. рис. 12.7). Для визначення згинаючого моменту M_z розглядаємо праву частину балки і, отже:

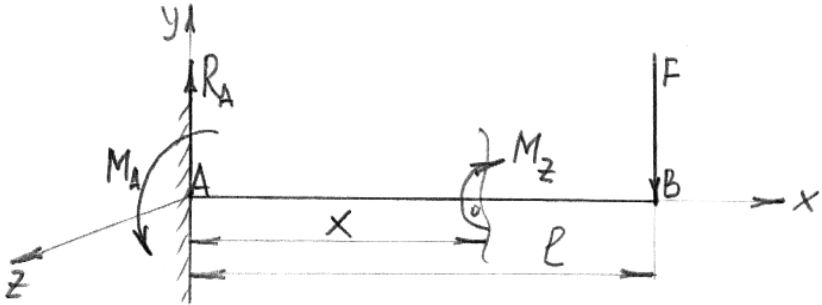


Рисунок 12.7 – Визначення прогину

$M_z = -F(l - x) = F(x - l)$, де $0 \leq x \leq l$, і тоді маємо:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_z}{EI_z} = \frac{F(x - l)}{EI_z} \quad \text{і далі} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{F}{EI_z} \int (x - l) dx + C =$$

$$= \frac{F}{EI_z} \left(\frac{x^2}{2} - lx \right) + C,$$

$$y = \frac{F}{EI_z} \int \left(\frac{x^2}{2} - lx + C \right) dx + D = \frac{F}{EI_z} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{lx^2}{2} \right) + Cx + D.$$

Оскільки граничні умови для балки (див. рис. 12.7) $y_A = y'_A = 0$, тоді

$$0 = \frac{F}{EI_z} (0 - 0) + C \quad \text{і звідси} \quad C = 0,$$

$$0 = \frac{F}{EI_z}(0 - 0) + 0 + D \text{ і } D=0,$$

і таким чином маємо рівняння пружної лінії розглядаємої балки

$$y = \frac{F}{EI_z} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{lx^2}{2} \right).$$

Визначаємо максимальний прогин балки.

$$y_{max} = y_B = y|_{x=l} = \frac{F}{EI_z} \left(\frac{l^3}{6} - \frac{l^3}{2} \right) = -\frac{Fl^3}{3EI_z}, \text{ знак "мінус" вказує на}$$

те, що напрямок прогину не співпадає з позитивним напрямком осі y .

Визначення переміщень в балках методом безпосереднього інтегрування диференціального рівняння пружної лінії у випадку балок з великою кількістю ділянок пов'язано із значними труднощами. Тому для зменшення великої обчислювальної роботи, пов'язаної з визначенням сталих інтегрування, останнім часом розроблено декілька методів.

До них у першу чергу належить метод початкових параметрів, котрий дає змогу при будь-якій кількості ділянок звести розв'язання до відшукування всього двох сталих – прогину і кута повороту на початку координат. Для того, щоб користуватися цим методом, необхідно дотримуватися наступних умов:

1. Відрахунок горизонтальних координат усіх ділянок повинен бути від одного початку координат, тобто крайньої лівої або крайньої правої точки осі балки.

2. Всі нововведені складові виразу згинаючого моменту наступних ділянок повинні містити у собі множник дужки $(x-l_0)$, де l_0 – сума довжин усіх попередніх ділянок до відповідного навантаження.

3. При розрахунку згинаючих моментів треба розглядати ту частину балки, яка містить початок координат.

4. Інтегрування диференційного рівняння повинно бути без розкриття дужки $(x-l_0)$.

5. Розподілене навантаження не повинно перериватись, але якщо воно переривається, то його слід продовжити до кінця балки, і додавши при цьому (від перерізу, де воно переривається) розподілене навантаження тієї ж інтенсивності, але протилежного знаку.

6. У формулі для визначення деформацій при згині вводять ті навантаження, які розміщені від початку координат до перерізу, в якому визначається відповідна деформація.

Формули для визначення кута повороту і прогину при згині балок мають вигляд

$$\begin{aligned} EI\theta &= EI\theta_0 + \sum \frac{M(x-l_0)}{1!} + \sum \frac{F(x-l_0)^2}{2!} + \sum \frac{q(x-l_0)^3}{3!} \quad \text{і} \\ EIy &= EIy_0 + EI\theta_0 x + \sum \frac{M(x-l_0)^2}{2!} + \sum \frac{F(x-l_0)^3}{3!} + \\ &+ \sum \frac{q(x-l_0)^4}{4!}, \end{aligned} \quad (12.20)$$

де l_0 – горизонтальна координата від початку координат до відповідного навантаження, θ_0 і y_0 – відповідні характеристики деформації у перерізі при $x=0$, тобто у початку координат. Якщо початок координат буде на лівому кінці балки, то згинаючий момент буде позитивним, якщо він має напрямок за рухом годинникової стрілки і сила і розподілене навантаження будуть позитивні, якщо вони мають напрямок угору. Якщо початок координат на правому кінці балки, то знаки у навантажень будуть протилежними.

Визначаємо максимальний прогин для балки (див. рис. 12.7) за методом початкових параметрів.

Оскільки початок координат на лівому кінці балки, то потрібно спочатку визначити реакції опори А, для цього складаємо два рівняння рівноваги:

1. $\sum F_{ky}=0$, $R_A-F=0$ і $R_A=F$
2. $\sum m_A=0$, $-M_A+F l=0$ і $M_A=F l$

Використовуючи формулу (12.20), маємо:

$$EIy = EIy_0 + EIy'_0 x + \sum \frac{M(x-l_0)^2}{2!} + \sum \frac{F(x-l_0)^3}{3!} + \sum \frac{q(x-l_0)^4}{4!}$$

і так як $y_0=y_A=0$, $y'_0=\theta_0=y'_A=0$ і до перерізу В діють тільки R_A і M_A , то

$$EIy = -\frac{M_A x^2}{2} + \frac{R_A x^3}{6} = -\frac{Fl x^2}{2} + \frac{Fx^3}{6}$$

Звідси

$$EIy_B = EIy|_{x=l} = -\frac{Fl \cdot l^2}{2} + \frac{Fl^3}{6} = -\frac{Fl^3}{3} \quad \text{і} \quad y_B = -\frac{Fl^3}{3EI}.$$

Під складним опором розуміють різні комбінації простих (плоских) напружених станів стержня (розтягу, стиску, кручення, згину).

В загальному випадку навантаження стержня в поперечних перерізах можуть діяти шість внутрішніх силових чинників- N_x , Q_y , Q_z , M_x , M_y і M_z . Напружений стан при цьому знаходять на основі принципу суперпозиції. Згідно з даним принципом, у досліджуваній точці розраховують окремо напруги від дії кожного силового чинника, після чого їх підсумовують і визначають сумарні компоненти напруг. Зрозуміло, що знаючи напружений стан у точці і використовуючи ту чи іншу теорію міцності, можна провести розрахунки на міцність даного елемента.

На практиці одночасно дія всіх силових чинників зустрічається рідко. Частіше приходить мати справу з різними їх комбінаціями, які ми і розглянемо.

13.1

Косим називають згин, за якого площина дії навантажень не збігається з жодною із головних осей перерізу. Наприклад, на рис.13.1, а сила F і розподілене навантаження q діють у площині V , яка не збігається з головними площинами x_y і x_z . Під час розрахунків кожне із навантажень розкладають на складові частини, що діють у головних площинах (рис.13.1,б). Отже косий згин розглядають як суму двох плоских згинів у двох взаємно перпендикулярних площинах.

Розглянемо консольну балку довжиною l прямокутного перерізу (рис.13.2), до кінця якої прикладено силу F , що утворює з віссю y кут α . Розкладемо силу F на дві складові, напрямлені вздовж головних осей перерізу:

$$F_y = F \cos \alpha, \quad F_z = F \sin \alpha$$

(13.1)

У поперечних перерізах балки сили F_y , F_z утворюють чотири (із шести) внутрішніх силових чинників: Q_y , Q_z , M_y і M_z . У розрахунках на міцність, як і за плоского згину, нехтують силами Q_y , Q_z і утворюваними ними дотичними напруженнями. Тоді значення згинаючих моментів у довільному поперечному перерізі балки, взятому на відстані x від кінця консолі, будуть

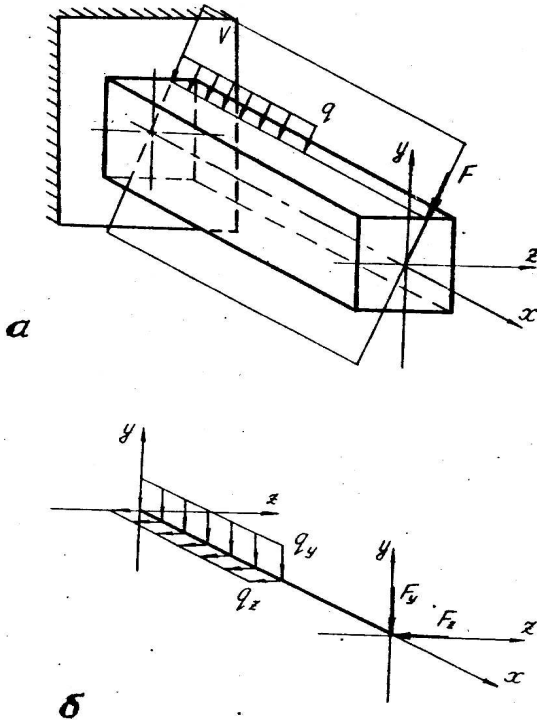


Рисунок 13.1 - Неплоский згин (а) і схематичне зображення його у вигляді двох плоских (б)

$$M_z = F_y x, \quad M_y = F_z x \quad (13.2)$$

Згинаючий момент вважають додатним, якщо в першому квадранті перерізу він розтягує волокна балки, і від'ємним, якщо утворює стиск волокон. У розглядуваному прикладі M_y і M_z – додатні. Епюри згинаючих моментів M_y і M_z зображені на рис. 13.3.

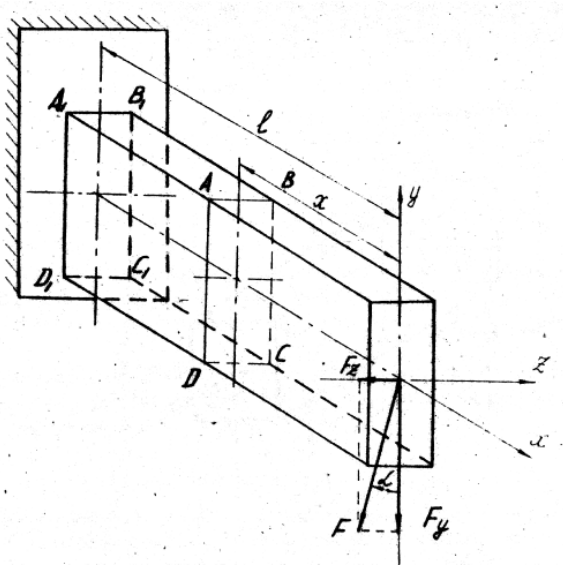


Рисунок 13.2 - Приклад розв'язання задач для балки, навантаженої при плоскому згині

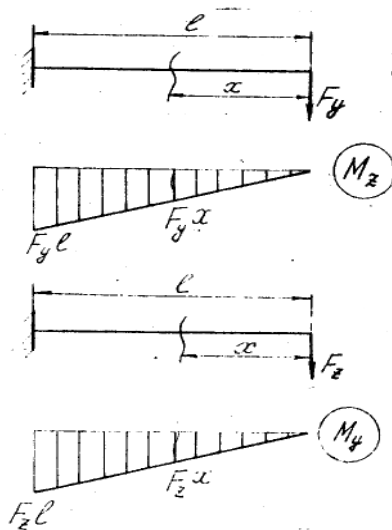


Рисунок 13.3 - Епюри згинаючих моментів M_y і M_z при неплоскому згині

Обчислимо нормальні напруги в довільній точці $K(z,y)$ поперечного перерізу, взятого на відстані x від вільного краю консолі (рис 13.4).

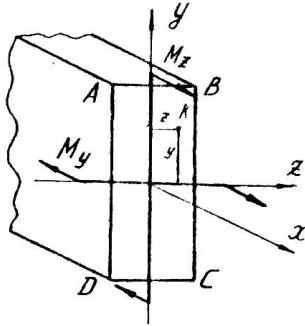


Рисунок 13.4 - Схема до визначення нормальних напруг у поперечному перерізі при неплоскому згині

Оскільки кожний із моментів M_y і M_z утворює в даній точці нормальну напругу, то повну напругу знайдемо як суму складових: $\sigma = \sigma' + \sigma''$. Тут σ' – нормальна напруга в точці K, утворена згинаючим моментом M_z :

$$\sigma' = \frac{M_z}{I_z} \cdot y, \quad (13.3)$$

а σ'' – нормальна напруга в тій же точці, утворена згинаючим моментом M_y :

$$\sigma'' = \frac{M_y}{I_y} \cdot z, \quad (13.4)$$

отже, результуюча нормальна напруга в точці K становитиме

$$\sigma = \sigma' + \sigma'' = \frac{M_z}{I_z} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot z. \quad (13.5)$$

Відомо, що за прямого (плоского) згину нейтральна лінія збігається з однією із головних осей перерізу і перпендикулярна до силової площини. З рівняння (13.5) видно, що нормальні напруги при косому згині в центрі ваги перерізу також дорівнюють нулю. Тобто,

якщо в (13.5) підставимо $y=0$ і $z=0$, то дістанемо $\sigma=0$. Проте нейтральна лінія не збігається з жодною із головних осей.

Оскільки формула нейтральної лінії описує геометричне місце точок в перерізі, де $\sigma=0$, то із (13.5) маємо:

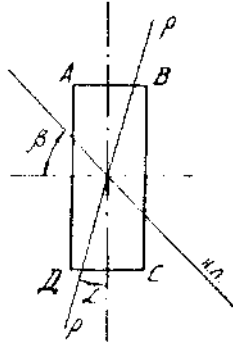
$$\frac{M_z}{I_z} \cdot y + \frac{M_y}{I_y} \cdot z = 0$$

або

$$y = -\frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{I_z}{I_y} \cdot z$$

(13.6)

Це рівняння прямої, що проходить через центр ваги перерізу. Із математики відомо, що положення такої прямої може бути задано кутом її нахилу до однієї з координатних осей. Тобто положення нейтральної лінії визначається кутовим коефіцієнтом:



$$\operatorname{tg} \beta = \frac{y}{z} = -\frac{M_y}{M_z} \cdot \frac{I_z}{I_y},$$

(13.7)

де β – кут, який утворює нейтральна лінія (н. л.) з віссю Z (рис. 13.5).

Рисунок 13.5 - Взаєморозміщення силової площини $p-p$ і нейтральної лінії (н.л.)

На цьому ж рисунку показана силова лінія $p-p$ як лінія перетину силової площини і поперечного перерізу балки. Із формул (13.1) і (13.2) випливає, що

$$\frac{M_y}{M_z} = \frac{F_z \cdot x}{F_y \cdot x} = \frac{F \cdot \sin \alpha}{F \cdot \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha ,$$

(13.8)

тоді формулу (13.7) можна переписати у вигляді

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{I_z}{I_y} \cdot \operatorname{tg} \alpha .$$

(13.9)

Отже, положення нейтральної лінії не залежить від значення сили F , а визначається лише кутом нахилу силової площини до осі Y і формою перерізу. Причому, якщо $I_z = I_y$, то із (13.9) випливає, що $|\beta| = |\alpha|$, а значить, нейтральна лінія стає перпендикулярно до силової площини. Оскільки в загальному випадку косоного згину моменти інерції I_z і I_y не дорівнюють один одному, то і нейтральна лінія не перпендикулярна до силової площини.

Звернемо увагу на те, що на нейтральній лінії нормальні напруги дорівнюють нулю, а максимальних значень вони досягають у точках перерізу, найвіддаленіших від нейтральної лінії. В розглядуваному перерізі (рис. 13.5) найбільш напруженими будуть точки B і D . Для знаходження напруг у даних точках необхідно у рівняння (13.5) підставити із врахуванням знака їх координати, тоді

$$\sigma_B = \frac{M_z}{I_z} \cdot Y_B + \frac{M_y}{I_y} \cdot Z_B, \quad \sigma_D = \frac{M_z}{I_z} \cdot Y_D + \frac{M_y}{I_y} \cdot Z_D,$$

або

$$\sigma_B = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y}, \quad \sigma_D = -\left(\frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \right),$$

(13.10)

де $W_z = \frac{I_z}{Y_{\max}} = \frac{I_z}{Y_B} = -\frac{I_z}{Y_D}$ – момент опору перерізу відносно

осі Z ;

$W_y = \frac{I_y}{Z_{\max}} = \frac{I_y}{Z_B} = -\frac{I_y}{Z_D}$ – момент опору перерізу відносно

осі Y .

Для нормальної роботи елемента конструкції максимальні нормальні напруги в небезпечному перерізі не мають бути більшими за припустимі. Небезпечний переріз знаходять із аналізу побудованих епюр M_y і M_z (див. рис. 13.3). Очевидно, що в розглянутому випадку небезпечний переріз буде в закріпленні балки (переріз $A_1B_1C_1D_1$ на рис. 13.2), а максимальні згинаючі моменти становитимуть: $M_z^{\max} = F_y l$, $M_y^{\max} = F_z l$. Тоді умову міцності при косому згині з урахуванням (13.10) запишемо у вигляді

$$\sigma_{\max} = \sigma_{B_1} = \frac{M_z^{\max}}{W_z} + \frac{M_y^{\max}}{W_y} \leq [\sigma_p];$$

$$\sigma_{\min} = \sigma_{D_1} = \left| \frac{M_z^{\max}}{W_z} + \frac{M_y^{\max}}{W_y} \right| \leq [\sigma_c],$$

(13.11)

де $[\sigma_p]$ і $[\sigma_c]$ – припустимі напруги матеріалу балки відповідно на розтяг і стиск.

Для балок, матеріали яких однаково чинять опір розтягу і стиску, маємо

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z^{\max}}{W_z} + \frac{M_y^{\max}}{W_y} \leq [\sigma],$$

(13.12)

де $W_z = \frac{I_z}{Y_{\max}}$; $W_y = \frac{I_y}{Z_{\max}}$; Z_{\max}, Y_{\max} – координати самої віддаленої від нейтральної лінії точки.

13.2

Якщо на стержень діють зовнішні навантаження, силові площини яких проходять через вісь стержня і викликають поперечні і поздовжні зусилля, то такий вид складного опору називають згином з розтягом (стиском). В цьому разі в поперечних перерізах стержня мають місце поперечні сили Q_y і Q_z , поздовжня сила N_x і згинаючі моменти M_y і M_z . Як і в випадку косоного згину, в цьому разі також нехтують поперечними силами Q_y і Q_z і спричиненими дотичними

напругами τ_y та τ_z . Для знаходження в точках поперечного перерізу нормальної напруги σ необхідно, використовуючи принцип суперпозиції, додати складові напруги, зумовлені окремо поздовжньою силою N_x і згинаючими моментами M_y і M_z .

Розглянемо деформацію згину і розтягу (стиску) на прикладі позacentрового розтягу. Позacentровий розтяг – це такий вид деформації, коли розтягуюча сила паралельна осі стержня, але точка її прикладення не збігається з центром ваги перерізу. Точку перетину будь-якого перерізу стержня з лінією дії сили F назовемо полюсом сили. Координати полюса сили в системі головних осей поперечного перерізу позначимо Y_p та Z_p . Відстань від полюса сили до центра ваги перерізу називається ексцентриситетом e (рис. 13.6)

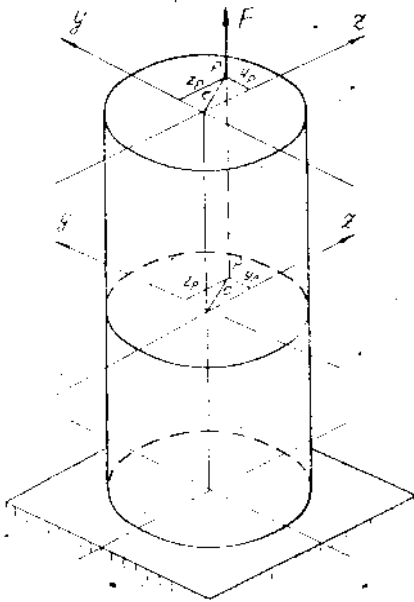


Рисунок 13.6 - Внутрішні силові чинники при позacentровому розтягу стержня

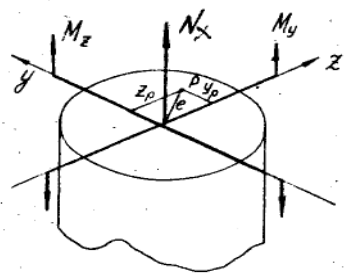


Рисунок 13.7 - Внутрішні силові чинники в довільному перерізі стержня

Знайдемо внутрішні силові чинники у довільному перерізі стержня (рис. 13.7). Використовуючи метод перерізів, дістанемо

$$N_x = F, \quad M_z = F Y_p, \quad M_y = F Z_p.$$

Нормальні напруги від кожного із внутрішніх силових чинників N_x, M_z, M_y будуть відповідно

$$\sigma' = \frac{N_x}{A}, \quad \sigma'' = \frac{M_z}{I_z} \cdot y, \quad \sigma''' = \frac{M_y}{I_y} \cdot z$$

Підсумовуючи σ', σ'' і σ''' , маємо

$$\sigma = F \cdot \left(\frac{1}{A} + \frac{Y_p}{I_z} \cdot y + \frac{Z_p}{I_y} \cdot z \right).$$

(13.13)

Формулу (13.13) можна використовувати для визначення напруги при позacentровому розтягу. В разі позacentрового стиску перед правою частиною формули (13.13) необхідно поставити знак “мінус”.

Прирівнюючи напругу в формулі (13.13) до нуля, дістаємо рівняння нейтральної лінії

$$\frac{1}{A} + \frac{Y_p}{I_z} \cdot y + \frac{Z_p}{I_y} \cdot z = 0$$

(13.14)

Очевидно, що (13.14) є рівняння прямої, яка не проходить через початок координат. Отже, це рівняння нейтральної лінії можна записати також у вигляді $y = az + b$, де

$$a = - \frac{I_z \cdot Z_p}{I_y \cdot Y_p}, \quad \text{і} \quad b = - \frac{I_z}{A \cdot Y_p}$$

Для побудови такої прямої необхідно визначити хоча б дві точки, які їй належать. Проте простіше на підставі рівняння (13.14) записати формули для визначення величин відрізків, які відсікаються нейтральною лінією на осях координат (рис. 13.8).

$$\text{Якщо} \quad z = 0, \quad y = y_H = - \frac{I_z}{A \cdot Y_p},$$

(13.15)

$$\text{якщо} \quad y = 0, \quad z = z_H = - \frac{I_y}{A \cdot Z_p}.$$

(13.16)

Очевидно (рис. 13.8, формули (13.15) та (13.16)), що полюс і нейтральна лінія лежать по різні боки від центра ваги перерізу. При чому, якщо ексцентриситет e збільшується, то нейтральна лінія наближається до центра ваги перерізу, і навпаки. Отже, якщо полюс збігається з центром ваги, то нейтральна лінія віддаляється в нескінченність. В цьому разі згинаючі моменти зникають, тому що координати Y_p та Z_p дорівнюють нулю, і позацентровий розтяг (стиск) перетворюється в центральний.

В разі позацентрового розтягу (стиску) нормальна напруга в кожній точці поперечного перерізу стержня пропорційна відстані від цієї точки до нейтральної лінії. Використовуючи цю закономірність, побудуємо епюру нормальних напруг, значення яких відкладаються відносно лінії, перпендикулярної до нейтральної осі (рис. 13.8). Тоді значення максимальних нормальних напруг на ділянці розтягу становитиме:

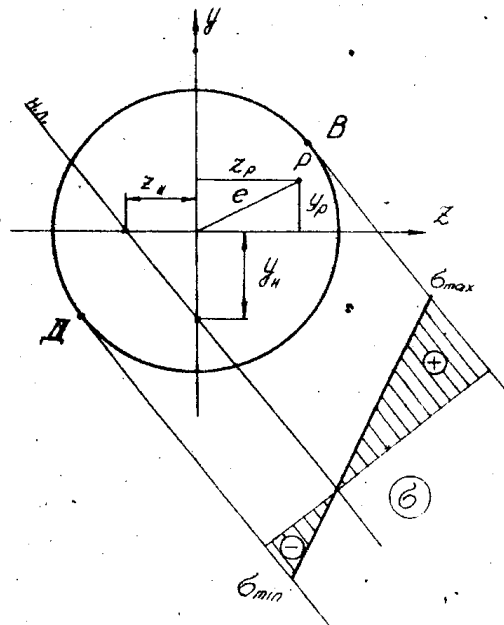


Рисунок 13.8 - Положення нейтральної лінії і епюра нормальних напруг при позацентровому розтягу стержня

$$\sigma_{max} = \sigma_B = F \cdot \left(\frac{1}{A} + \frac{Y_p}{I_z} \cdot Y_B + \frac{Z_p}{I_y} \cdot Z_B \right),$$

на ділянці стиску

$$\sigma_{min} = \sigma_D = F \cdot \left(\frac{1}{A} - \frac{Y_p}{I_z} \cdot Y_D - \frac{Z_p}{I_y} \cdot Z_D \right).$$

Останні рівняння можуть бути використані для складання умови міцності матеріалу при позацентровому розтягу (стиску). Оскільки для пластичних матеріалів $[\sigma_p] = [\sigma_c] = [\sigma]$, то умова міцності записується для однієї, найбільш віддаленої від нейтральної лінії точки:

$$\sigma_{max} = \sigma_B = F \cdot \left(\frac{1}{A} + \frac{Y_p}{I_z} \cdot Y_B + \frac{Z_p}{I_y} \cdot Z_B \right) \leq [\sigma].$$

(13.17)

Для крихких матеріалів $[\sigma_c] > [\sigma_p]$, тому, якщо напруги стиску в поперечному перерізі стержня більші від напруг розтягу, розрахунок на міцність ведеться за двома умовами:

$$\sigma_{max} \leq [\sigma_p], \quad \sigma_{min} \leq [\sigma_c].$$

(13.18)

Одночасних деформацій згину і кручення зазнає більшість валів, які звичайно бувають прямими стержнями круглого або кільцевого перерізу. Таке поєднання деформацій валів утворюють сили натягу пасів на шківів пасових передач, тиску зубців коліс в зубчастих передачах тощо. В поперечних перерізах вала при згині з крученням відмінні від нуля такі силові чинники: M_k , M_y , M_z , Q_y та Q_z . Ці сили і моменти в точках перерізу вала утворюють нормальні напруги від згину і дотичні напруги від згину і кручення. Впливом поперечних сил Q_y і Q_z нехтують, тому що відповідні їм дотичні напруги набагато менші за дотичні напруги кручення і нормальні напруги згину. До того ж в найнебезпечніших точках на поверхні вала дотичні напруги від поперечних сил дорівнюють нулю. Розглянемо вал, на якому закріплено два шків С і Д пасової передачі діаметрами D_1 і D_2 (рис. 13.9). Сили

натягу віток пасових передач позначимо t_1', t_1'' і t_2', t_2'' . Нехтуючи тертям у підшипниках А та В, складемо розрахункову схему.

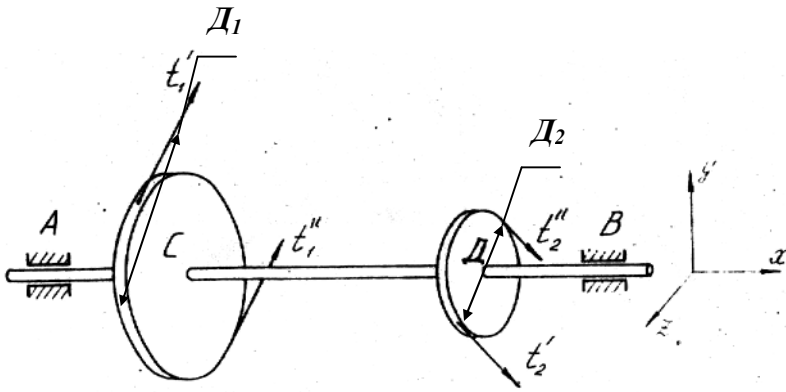


Рисунок 13.9 - Приклад згину з крученням вала

Для цього наведемо всі діючі сили і крутильні моменти на вал до його осі. Під час перенесення сили F (рис. 13.10) до осі вала необхідно додати ще крутильний момент $T = \frac{F \cdot D}{2}$ (рис. 13.10, б).

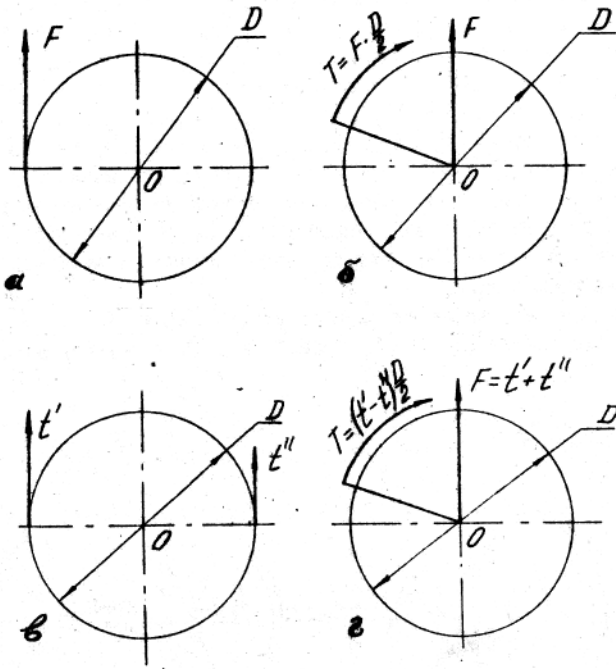


Рисунок 13.10 - Внутрішні силові чинники в поперечних перерізах при згині з крученням вала

Якщо на шків діють дві сили, наприклад t' і t'' (рис. 13.10, в), то результуюча сила, що діє на вісь вала, $F = t' + t''$, а крутильний момент

$T = \frac{(t' - t'') \cdot D}{2}$ (рис. 13.10, г). За умови, що ведуча вітка паси

натягнута вдвічі сильніше від веденої ($t' = 2t''$), маємо $F_1 = t_1' + t_1'' = 3t_1$, $F_2 = t_2' + t_2'' = 3t_2$, (див. рис. 13.9). Розрахункова схема вала пасової передачі зображена на рис. 13.11, а. Сили F_1 і F_2 розкладають на вертикальні та горизонтальні складові. Вертикальні сили F_{1y} і F_{2y} утворюють в підшипниках вертикальні реакції R_{Ay} і R_{By} , а горизонтальні сили F_{1z} і F_{2z} – горизонтальні реакції R_{Az} і R_{Bz} . Величини реакцій в підшипниках вала визначають як для балки, що лежить на двох опорах (див. рис. 13.11, б, г), складаючи рівняння рівноваги.

Епюра згинаючих моментів M_z побудована від вертикальних сил R_{Ay} , F_{1y} , F_{2y} , R_{By} і показана на рис. 13.11, в. Аналогічно їй епюра

згинаючих моментів M_y у горизонтальній площині побудована від горизонтальних сил R_{Az} , F_{1z} , F_{2z} і R_{Bz} (рис. 13.11, д). Епюру сумарних згинаючих моментів M_{3z} (рис. 13.11, е) будують на підставі епюр M_z і M_y за формулою

$$M_{3z} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2} \quad (13.19)$$

За рівномірного обертання вала він перебуває в стані рівноваги, тобто $T_1 + T_2 = 0$. Епюра крутних моментів із врахуванням того, що $T_1 = T_2 = T$, зображена на рис. 13.11, ж.

Небезпечний переріз вала розміщено там, де епюри повних згинаючих моментів M_x і крутних моментів M_k досягають найбільших значень. Для вала, показаного на рис. 13.11, небезпечним буде переріз С, зображений на рис. 13.12. В цьому перерізі діє найбільший згинаючий момент M_x , також максимальний крутний момент M_k . За вісь у взята вісь, яка перпендикулярна до площини дії згинаючого моменту M_{3z} . Отже, вісь у – це нейтральна лінія перерізу.

Від дії моментів M_{3z} і M_k у поперечному перерізі виникають нормальні σ і дотичні τ напруги, значення яких в будь-якій точці перерізу визначаються за формулами

$$\sigma = \frac{M_{3z}}{I} Z; \quad \tau = \frac{M_k}{I_p} \rho. \quad (13.20)$$

$$T_1 = \frac{(t'_1 - t''_1) \cdot D_1}{2} = \frac{t_1 \cdot D_1}{2}, \quad T_2 = \frac{t'_2 - t''_2}{2} \cdot D_2 = \frac{t_2 \cdot D_2}{2}$$

Тут $I = I_z = I_y$ – осьовий момент інерції вала круглого поперечного перерізу; $I_p = I_z + I_y = 2I$ – полярний момент інерції того ж перерізу.

Епюри нормальних і дотичних напруг зображені на рис. 13.12. Максимальні за абсолютними величинами нормальні напруги виникають у найвіддаленіших від нейтральної лінії точках К та L :

$$\sigma = \frac{M_{3z}}{W} \quad (13.21)$$

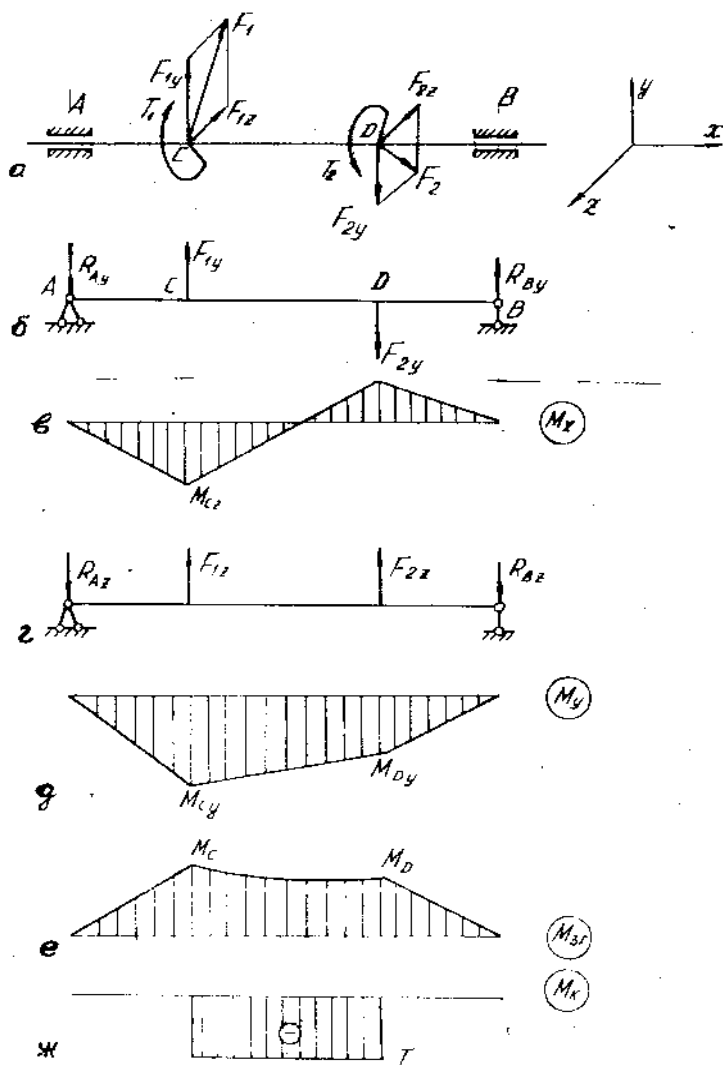


Рисунок 13.11 - Порядок побудови епюр M_z , M_y , M_x і M_k при згині з крученням

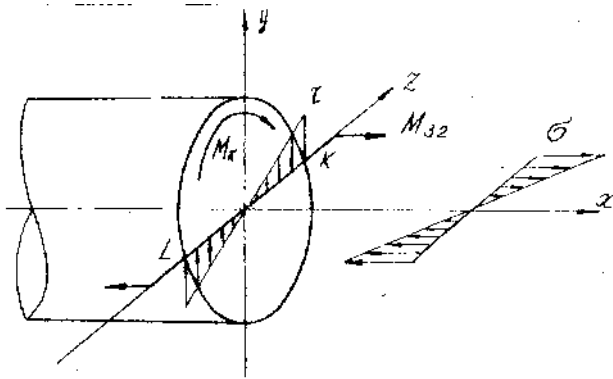


Рисунок 13.12 - Епюри σ і τ у поперечному перерізі вала при згині з крученням

Найбільші дотичні напруги виникають в точках контура перерізу

$$\tau = \frac{M_K}{W_p} = \frac{M_K}{2 \cdot W}.$$

(13.22)

У формулі (13.22) враховано, що полярний момент опору для круга W_p удвічі більший від осьового $W = W_z = W_y$.

Для матеріалів, які однаково чинять опір розтягу і стиску, небезпечними в поперечному перерізі будуть одночасно точки K і L.

Розрахунок вала на міцність при згині з крученням проводиться з використанням однієї з теорій міцності. В цьому разі вал із пластичних матеріалів розраховують за третьою або четвертою теоріями міцності. Загальна умова міцності вала матиме вигляд

$$\sigma_{екв} \leq [\sigma].$$

(13.23)

Тоді за третьою теорією міцності маємо

$$\sigma_{екв.III} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \leq [\sigma],$$

(13.24)

а за четвертою теорією дістанемо

$$\sigma_{екв.IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} \leq [\sigma].$$

(13.25)

Враховуючи формули (13.21), (13.24) і (13.25) тоді умову міцності (13.23) можна замінити однією формулою:

$$\sigma_{екв} = \frac{M_{зв}}{W} \leq [\sigma],$$

(13.26)

де $M_{зв}$ – зведений момент, який визначається за відповідними теоріями міцності:

за третьою теорією міцності

$$M_{звIII} = \sqrt{M_{3z}^2 + M_K^2} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + M_K^2}, \quad (13.27)$$

за четвертою теорією міцності

$$M_{звIV} = \sqrt{M_{3z}^2 + 0,75 \cdot M_K^2} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + 0,75 \cdot M_K^2}. \quad (13.28)$$

Звернемо увагу, що отримані формули справджуються також для розрахунків кільцевого поперечного перерізу.

Руйнування стержнів може відбуватися не тільки тому, що буде порушено його міцність, а й тому, що стержень не зберігає тієї форми, котра йому надана конструктором. Найбільш типовим прикладом є робота стержня стиснутого силами F . Так, якщо підвергнути поздовжньому стиску тонку дерев'яну лінійку, то вона може зігнувшись зламатися, оскільки при її скривленні виникають згинаючі моменти від стискаючих сил F і, отже поява додаткової напруги згину (говорять, що лінійка втратила стійкість). Тому для надійної роботи конструкції недостатньо, щоб вона була міцною, а треба ще, щоб всі її елементи були стійкі, тобто вони повинні при дії навантажень деформуватися у таких межах, щоб характер їх роботи залишався незмінним. Тому в цілому ряді випадків, а саме для стислих стержнів, окрім перевірки на міцність ще необхідна перевірка й на стійкість.

Втрату стійкості прямолінійної форми стислого стержня іноді називають “повздовжнім згином”.

Сила, при якій прямолінійна форма стислого стержня перестає бути стійкою формою рівноваги стислого стержня, називається критичною силою F_k .

Критична сила F_k викликає в стислому стержні напругу, що називається “критичною напругою” σ_k , тобто

$$\sigma_K = \frac{F_K}{A} \quad .$$

(13.29)

Критична напруга є небезпечною напругою для стислого стержня. Тому, щоб забезпечити стійкість прямолінійної форми стержня, стислого силами F , необхідно до умови міцності ($\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma]$) додати ще й умову стійкості

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma]_y, \quad (13.30)$$

де $[\sigma]_y = \frac{\sigma_K}{K_y}$ - припустима напруга на стійкість, K_y – коефіцієнт запасу на стійкість, який можна приймати 1,8...3,0.

Згідно формули Ейлера критична сила, для шарнірного закріплення стержня з двох боків, визначається:

$$F_K = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l^2},$$

(13.31)

де I_{min} – мінімальний осьовий момент інерції поперечного перерізу стержня, а l – довжина стержня. І тоді можна визначити критичну напругу за формулою

$$\sigma_K = \frac{F_K}{A} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{l^2 \cdot A} = \frac{\pi^2 E i_{min}^2}{l^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{e}{i_{min}}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \quad (13.32)$$

де $\lambda = \frac{\mu_3 l}{i_{min}}$ – гнучкість стержня, а при $\mu_3 = 1$ (основний випадок

закріплення) $\lambda = \frac{e}{i_{min}}$, $i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}}$ - радіус інерції, μ_3 – коефіцієнт зведення довжини.

В залежності від способу закріплення стержня критична сила визначається

$$F_K = \frac{\pi^2 EI_{min}}{(\mu_3 l)^2}, \quad (13.33)$$

де $\mu_3 l$ – зведена (вільна) довжина.

Коефіцієнт зведення довжини стержня залежить від його закріплення. Так на рис. 13.13 наведено приклади стержнів з найхарактернішими способами закріплення кінців і відповідні їм значення коефіцієнтів μ_3

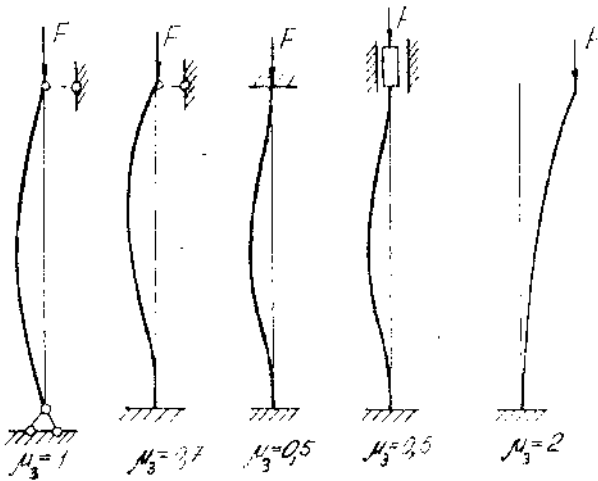


Рисунок 13.13 - Значення коефіцієнта μ_3 при різних формах закріплення стержня

Формула Ейлера застосовується (вживається) для різних матеріалів, в залежності від гнучкості стержня:

- 1) для сталей при $\lambda \geq 85$,
- 2) для чавунів при $\lambda \geq 80$,
- 3) для сосни при $\lambda \geq 110$, і т. ін.

Для стержнів середньої та малої гнучкості, які не задовольняють вище приведеним співвідношенням, пропонуються різні емпіричні формули, які вказують, що критичні напруги при таких гнучкостях змінюються по закону близькому до лінійного

$$\sigma_K = a - b\lambda, \quad (13.34)$$

де a та b – коефіцієнти, які залежать від матеріалів.

Формула (13.34) має назву формули Ясинського. Дані для коефіцієнтів a та b для різних матеріалів приведені у довідниках. Так для сталі 3 при $40 \leq \lambda \leq 100$, $a=336$ МПа, $b=1,47$ МПа. Таким чином стислі стержні необхідно перевіряти не тільки на міцність, але і на стійкість дивись формули (13.29) і (13.30), при цьому враховуючи, що якщо ці умови не задовільнені або задовільнені з великим запасом, то тоді необхідно змінити розміри перерізу і розрахунки повторити до тих пір, поки різниця між напругою у стержні і припустимою не перевищує 3...5%.

Розрахунок на стійкість зводиться до наступного: як правило задані (стискаюча сила F , умова закріплення стержня та його довжина), при цьому добирається форма стержня і завдаються розміри його поперечного перерізу. Потім обчислюють найменший радіус інерції та гнучкість стержня, після чого по таблиці знаходять коефіцієнт φ (коефіцієнт зменшення припустимої напруги). Знаючи φ обчислюють $[\sigma]_c = \varphi[\sigma]$ і потім роблять перевірку умови стійкості за формулою

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma]_c. \quad (13.35)$$

Слід зауважити, що для першого розрахунку приймають $\varphi=0,5$ і визначають розміри перерізу. Кількість розрахунків визначається умовою щоб σ та $[\sigma]_c$ не відрізнялись більше ніж 3...5%.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Артоболевський І.І. Теорія механізмів і машин. М., 1977. -640 с.
2. Заблонський К.І. і інші. Прикладна механіка. – Київ, Вища школа, 1984. - 280 с.
3. Чернілевський Д.В., Кіницький Я.Т., Панов С.Л. Технічна механіка. Книга 3. Основи теорії машин та механізмів. Київ, 1992. - 167 с.