МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний університет “Запорізька політехніка”

Скребцов А.А., Омельченко О.С., Кружнова С.Ю., Шалева Н.В

КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
З
ТЕОРІЇ МЕХАНІЗМІВ ТА МАШИН

для студентів інженерних спеціальностей усіх форм навчання

2023

Конспект лекцій з теорії механізмів та машин для студентів інженерних спеціальностей усіх форм навчання / Укл.: Скребцов А.А., Омельченко О.С., Кружнова С.Ю., Шалева Н.В.– Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2023. – 265 с.

Укладачі: А.А. Скребцов, доцент, канд.техн.наук;
О.С. Омельченко, ст. викладач.
С.Ю.Кружнова, ст. викладач
Н.В. Шалева, асистент

Рецензент: В.І. Пожуєв, професор, д-р фіз-мат. наук

Відповідальний
за випуск: В.Г. Шевченко, завідувач каф. «Механіка»

Затверджено
на засіданні кафедри “Механіка”
Протокол № _5___
від “12_” __12____ 2022.

Рекомендовано до видання
НМК ФБАД
Протокол № __4___
від “_28_” __12___ 2022.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА……..……...……. 8
ВСТУП……. 9
1.ПОБУДОВА МЕХАНІЗМІВ…… 11
1.1 Основні визначення…… 11
1.2 Кінематичні пари та їх класифікація. Кінематичні ланцюги. 12
1.2.1 Класифікація кінематичних пар……. 15
1.3 Структурні формули механізмів……. 19
1.4 Групи Ассура та їх класифікація. Утворення механізмів. Заміна вищих пар нижчими……. 21
1.4.1 Утворення механізмів за Ассуром…….. 21
1.4.2 Заміна вищих пар нижчими……. 25
1.5 Надлишкові в'язі та зайві ланки……. 26
1.5.1 Локальні надлишкові в'язі в кінематичній парі…… 30
2. СИНТЕЗ МЕХАНІЗМІВ…… 35
2.1 Синтез кінематичних схем механізмів з нижчими парами. 35
2.1.1 Умова існування кривошипу в плоских чотириланкових механізмах……. 35
2.2 Синтез механізмів за середньою швидкістю ланки і за коефіцієнтом зміни середньої швидкості вихідної ланки…… 37
2.3 Синтез чотириланкових механізмів за двома положеннями ланок…….. 43
2.4 Синтез чотириланкових механізмів за трьома положеннями ланок…….. 49
3. АНАЛІТИЧНА КІНЕМАТИКА. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ 55
3.1 Аналітична кінематика шарнірного чотириланковика…… 57
3.2 Аналітична кінематика кривошипно–повзунного механізму 60
3.3 Аналітична кінематика кулісного механізму…… 61
4. ГРАФІЧНІ МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕДАТОЧНИХ ФУНКЦІЙ……. 63
4.1 Механізм шарнірного чотириланковика…….. 64
4.2 Кривошипно-повзунний механізм…… 64
4.3 Кулісний механізм……. 65
4.4 Формули переходу при визначенні передаточних функцій складних механізмів……. 66

4.5 Визначення швидкостей і прискорень точок та ланок механізмів…….. 66
5. ГРАФОАНАЛІТИЧНА КІНЕМАТИКА СТЕРЖНЕВИХ МЕХАНІЗМІВ…….. 69
5.1 Графоаналітична кінематика механізмів другого класу…… 69
5.1.1 Графоаналітична кінематика кривошипно-повзунного механізму……. 69
5.1.2 Графоаналітична кінематика механізму шарнірного чотириланковика…… 73
5.1.3 Графоаналітична кінематика кулісного механізму…… 75
5.2 Графоаналітична кінематика механізму III класу……... 78
5.3 Графічний метод кінематичного дослідження механізму…. 82
6. ДИНАМІКА МАШИН…… 88
6.1 Загальні відомості…….. 88
6.2 Сили, що діють у механізмах…… 88
6.3 Зведені сили та маси…….. 89
6.4 Рівняння руху машини в енергетичній формі……. 92
6.5 Рівняння руху машини у диференціальній формі……..…… 94
6.6 Режими руху механізму…… 95
6.7 Загальні методи дослідження руху механізму…… 97
6.8 Регулювання руху машини…… 99
6.9 Визначення закону руху машини під дією сил, що залежать від положення ланки зведення…… 102
6.10 Маховик та його роль…….. 103
6.11 Визначення момента інерції маховика…… 105
6.11.1 Визначення момента інерції маховика методом Гут'яра 105
6.11.2 Визначення момента інерції маховика методом Віттенбауера……... 107
7. КІНЕТОСТАТИЧНИЙ (СИЛОВИЙ) АНАЛІЗ МЕХАНІЗМУ… 109
7.1 Статична визначенність кінематичного ланцюга……... 110
7.2 Реакції в кінематичних парах…….. 110
7.3 Умова статичної визначеності кінематичного ланцюга…… 111
7.4 Аналітичний метод кінетостатичного розрахунку механізму……. 112
7.5 Графоаналітичний метод кінетостатичного розрахунку механізму……..…….. 114
7.6 Графоаналітичний метод кінетостатичного розрахунку механізму третього класу…….. 120

7.7 Визначення зрівноважуючої сили методом Жуковського. Теорема Жуковського…… 121
8. ЗРІВНОВАЖЕННЯ СИЛ ІНЕРЦІЇ…… 124
8.1 Основні відомості про зрівноваження…….. 124
8.2 Визначення положення загального центра мас механізму… 125
8.3 Зрівноваження обертаючих мас, розташованих в одній площині……. 125
8.4 Зрівноваження обертаючих мас, розташованих в паралельних площинах…… 126
8.5 Зрівноваження машин на фундаменті…….. 128
8.6 Види нерівноваг (рівноваг)…….. 131
9. ЗУБЧАТІ КОЛЕСА І ПЕРЕДАЧІ…….. 132
9.1 Загальні відомості…….. 132
9.2 Елементи зубчатого колеса……. 134
9.3 Евольвента. Рівняння евольвенти у полярній системі координат…….. 137
9.4 Основні властивості евольвенти…….. 137
9.5 Основна теорема зачеплення……. 138
9.6 Основні розміри зубчатого колеса……... 140
9.7 Визначення товщини зуба…….. 142
10 ЕВОЛЬВЕНТНЕ ЗАЧЕПЛЕННЯ…….. 145
10.1 Елементи і властивості евольвентного зачеплення……... 145
10.2 Способи виготовлення зубчатих коліс…….. 148
10.3 Вихідний твірний контур (ВТК). Інструментальна рейка… 150
10.4 Рейкове станочне зачеплення і коефіцієнт зміщення…….. 151
10.5 Розміри зубчатого колеса із зовнішніми зубцями…… 152
10.6 Розміри зубчатого колеса із внутрішніми зубцями……... 152
10.7 Товщина зуба по ділильному колу…… 153
10.8 Підрізання і загострення зуба…… 153
11. ЕВОЛЬВЕНТНА ЗУБЧАТА ПЕРЕДАЧА…….. 156
11.1 Елементи евольвентної зубчатої передачі…… 156
11.2 Визначення кута зачеплення і міжосьової відстані…….. 158
11.3 Якісні показники зубчатої передачі …….. 160
11.3.1 Коефіцієнт перекриття……..……. 160
11.3.2 Кут торцевого перекриття…….. 161
11.4 Коефіцієнт відносного ковзання. Швидкість ковзання спряжених профілів…… 163
12. ВИБІР КОЕФІЦІЄНТІВ ЗМІЩЕННЯ…… 168

12.1 Вибір коефіцієнтів зміщення для передач зовнішнього зачеплення……..... 168
12.2 Вибір коефіцієнтів зміщення за умовою відсутності загострення…….. 169
12.3 Вибір коефіцієнтів зміщення за умовою вписування у наперед задану міжосьову відстань……. 170
13. ПОБУДОВА ПРОФІЛЮ ЗУБЧАТОГО КОЛЕСА …..……. 172
14. ПРОСТОРОВІ ЗУБЧАТІ ПЕРЕДАЧІ……..…… 179
14.1 Гіперболоїдна передача…… 179
14.2 Конічна передача…….. 180
14.3 Гвинтова зубчата передача……..…… 187
14.4 Черв'ячна зубчата передача…….…. 189
15. БАГАТОЛАНКОВІ ЗУБЧАТІ МЕХАНІЗМИ……..…. 193
15.1 Багатоланкові зубчаті механізми з нерухомими осями коліс……..…. 193
15.2 Планетарні зубчаті механізми……. 198
15.3 Вибір схем планетарних механізмів та їх кінематичні особливості……..... 201
15.4 Визначення чисел зубців коліс планетарних механізмів….. 206
16. ХВИЛЬОВІ ЗУБЧАТІ ПЕРЕДАЧІ……... 209
16.1 Кінематика хвильової передачі……..... 211
16.2 Особливості хвильового зачеплення……..…… 213
17. КУЛАЧКОВІ МЕХАНІЗМИ……..….. 215
17.1 Загальні відомості……. 215
17.2 Види кулачкових механізмів та іх особливості…… 216
17.3 Закон руху штовхача та його вибір…… 219
17.4 Складання рівнянь закону руху……. 224
17.5 Аналіз кулачкових механізмів …… 227
17.6 Передача сил в кулачкових механізмах. Кут тиску при передачі руху вищою парою……. 233
17.7 Передача сил в кулачкових механізмах з гострим штовхачем…….. 234
17.8 Передача сил в кулачковому механізмі з тарільчатим штовхачем…… 237
18. ВИЗНАЧЕННЯ МІНІМАЛЬНОГО РАДІУСА ВЕКТОРА ПРОФІЛЮ КУЛАЧКА…… 239
18.1 Графічний метод визначення мінімального радіуса-вектора профілю кулачка…… 239

18.2 Визначення мінімального радіуса-вектора профілю кулачка з гострим поступально - рухаючим штовхачем…… 240
18.3 Визначення мінімального радіуса-вектора профілю кулачка з гострим коливальним штовхачем…….. 242
18.4 Визначення мінімального радіуса - вектора профілю кулачка з тарільчатим штовхачем……. 243
19. АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ МІНІМАЛЬНОГО РАДІУСА-ВЕКТОРА ПРОФІЛЮ КУЛАЧКА……..….. 246
19.1 Аналітичний метод визначення мінімального радіуса-вектора профілю кулачка з гострим поступально рухаючим штовхачем…….. 247
19.2 Аналітичний метод визначення мінімального радіуса-вектора профілю кулачка з гострим коливальним штовхачем… 248
19.3 Аналітичний метод визначення мінімального радіуса-вектора з тарільчатим штовхачем……. 249
20. ВИЗНАЧЕННЯ КООРДИНАТ ПРОФІЛЮ КУЛАЧКА…….. 250
20.1 Кулачковий механізм з гострим поступально рухаючим штовхачем……... 250
20.2 Кулачковий механізм з гострим коливальним штовхачем.. 251
20.3 Кулачковий механізм з тарільчатим штовхачем……. 252
20.4 Вибір радіуса ролика для кулачків з гострим штовхачем… 252
20.5 Умова кочення ролика…….. 253
21. ПРОЕКТУВАННЯ ПРОСТОРОВИХ КУЛАЧКОВИХ МЕХАНІЗМІВ…… 255
21.1 Циліндричний кулачок з коливальним роликовим штовхачем……. 255
21.1.1 Вивід залежності кута тиску від основних параметрів.. 255
21.1.2 Геометрична умова визначення радіуса кулачка……. 256
21.1.3 Графічне визначення найменшого радіуса кулачка…. 257
21.1.4 Аналітичний метод визначення радіуса кулачка…….. 258
21.2 Циліндричний кулачок з поступально рухаючим штовхачем…… 259
21.3 Графічний метод побудови профілю просторового кулачка…….. 260
ЛІТЕРАТУРА…… 263

ПЕРЕДМОВА

Теорія механізмів та машин (ТММ) викладає наукові основи створення нових машин та механізмів, методи їх побудови та методи теоретичного та експериментального дослідження. Через брак часу, що відводиться вивчення цього курсу нині, і необхідного обсягу матеріалу основну увагу даного конспекта зосереджено необхідних поняттях механіки машин (інша назва дисципліни) і методах теоретичного дослідження механізмів і машин. Основною метою конспекту лекцій з ТММ - дати мінімально необхідний обсяг знань з механіки машин для того, щоб студент-машинобудівник розумів та успішно засвоював матеріал спеціальних предметів, які йому доведеться вивчати на наступних курсах університету. На жаль, через вищевказані причини в даному конспекті мало зачіпаються розділи, присвячені проблемам синтезу механізмів, проте автори сподіваються, що студент, прочитавши і засвоївши зміст пропонованого матеріалу, зуміє у разі необхідності із залученням інших джерел впоратися з вирішенням завдань проектування, що перед ним виникають.

Конспект лекцій створено на основі методичних напрацювань викладача теорії механізмів та машин Кутєпова Бориса Миколайовича.

ВСТУП

Теорія механізмів та машин (ТММ) вивчає загальні методи дослідження та проектування механізмів та машин.

Проблеми, якими займається ТММ, – це проблеми аналізу та синтезу механізмів та машин. Аналіз полягає у визначенні властивостей існуючих механізмів та машин. Це пряме завдання механіки машин. Зворотне завдання – синтез механізмів, тобто створення нових механізмів, які повинні мати покращені властивості в порівнянні з існуючими з точки зору продуктивності, надійності, довговічності та ін.

Загальне визначення машини. Функціональна класифікація машин. Машина є пристрій, створений людиною для використання законів природи з метою полегшення фізичної та розумової праці, збільшення її продуктивності шляхом часткової або повної заміни людини у її трудових та фізіологічних функціях.

Усі існуючі машини можна розділити на такі групи:

I. Енергетичні. В них відбувається перетворення енергії з одного виду в інший (наприклад, електрогенератори, електродвигуни, двигуни внутрішнього згоряння будь-якого типу, парові і газові турбіни і т. д.).

II. Технологічні. Вони призначені для зміни форми, розмірів та фізичних властивостей матеріалів (металорізальні верстати, деревообробні, дорожні, будівельні, поліграфічні машини, машини харчових виробництв, машини текстильної та легкої промисловості та ін.). Ці машини становлять найчисленнішу групу.

III. Транспортні. Ці машини служать для переміщення різноманітних виробів, матеріалів і людей (автомобілі, літаки, локомотиви, судна, крани, конвеєри, маніпулятори).

IV. Логічні (інформаційні). Машини, що становлять цю групу, служать для зберігання, переробки та передачі інформації (різні обчислювальні пристрої, ЕОМ, комп'ютери) в том числе ПК).

V. Кібернетичні. Для заміни людини в її трудових та фізіологічних функціях (апарати штучне серце, штучні нирки, робот-домогосподарка та ін.).

ТММ вивчає ті машини та механізми, які функціонують на основі законів механіки, звідси інша назва ТММ – механіка машин.

Вузьке визначення машини. Машина є пристрій, що діє на основі законів механіки та призначений для перетворення енергії, матеріалів та інформації та переміщення виробів.

Машина, зазвичай, складається з однієї чи кількох механізмів, основне призначення яких – перетворення руху (з одночасним перетворенням сил). Механізмом називається штучно створена система тіл, призначена для перетворення руху одного або декількох тіл на необхідні рухи інших тіл.

Тверді тіла у складі механізму – ланки. Нерухлива ланка механізму називається стійкою. Рухливе з'єднання двох ланок, що допускає їх відносний рух, називається кінематичною парою.

1.ПОБУДОВА МЕХАНІЗМІВ

Механізм є системою твердих тіл. Тому механізми мають як вельми просту, так і достатньо складну й різноманітну побудову (структуру). Саме побудовою механізму визначаються такі його характеристики, як **види здійснюваних рухів**, засоби його перетворення, число **ступенів волі.** Формування механізму, тобто з'єднання окремих його частин у єдину систему, здійснюється накладанням **в'язів** на їх відносний рух. Правильне їх розподілення в побудові механізму у великій степені обумовлює його надійну експлуатацію. Тому при проектуванні необхідно з великої різноманітності механізмів вибрати найбільш оптимальний й правильно підібрати його основні структурні елементи. А для цього перш за все треба знати основні види сучасних механізмів, їх структурні характеристики, закономірності їх побудови.

Механізм це:

- система тіл призначена для перетворення руху одного або кількох тіл у потрібні рухи інших тіл;
- кінематичний ланцюг з однією нерухомою ланкою, призначений виконувати цілком визначені доцільні рухи;
- кінематичний ланцюг, до складу якого входить нерухома ланка (стояк. стійка) й число ступенів волі якого відносно стійки дорівнює числу узагальнених координат;
- пристрій для перетворення механічних рухів

1.1 Основні визначення

Тверді тіла, з яких утворюється механізм, називають **ланками.** При цьому маються на увазі як абсолютно тверді, так і такі що деформуються й гнучкі тіла. Рідина та гази в теорії механізмів і машин ланками не вважаються. **Ланка це або одна деталь, або сукупність декількох деталей, з'єднаних в одну кінематичне нерухому систему.** Між собою ланки розрізняються за конструктивними ознаками (вал, шатун, повзун, поршень, зубчасте колесо, тощо) й за характером їх руху. Наприклад, ланка, яка обертається на повний оберт відносно нерухомої вісі, називається **кривошипом**, при неповному оберті –

коромислом; ланка, яка здійснює поступальний прямолінійний рух, - **повзуном** (**поршнем***)*, тощо. Нерухома ланка механізму називається **стійкою** (**стояком, опорою, корпусом***)*.Так , наприклад, на рис. 1.1, *а* зображена енергетична машина – двигун внутрішнього згоряння (ДВС), в якому поступальний рух **поршня 3** (за характером руху – повзун) під дією сили тиску газів в циліндрі 4 (нерухома ланка – стояк) перетворюється за допомогою **шатуна 2** в обертальний рух колінчастого вала (кривошипа) 1, до якого прикладене навантаження (момент сили опору); на рис.1.1,*б* і рис.1.1,*в* зображена структурна схема механізму ДВС.

Ланка це або одна деталь, або сукупність декількох деталей, з'єднаних в одну кінематичне нерухому систему.

Додаткові відомості:

Поршень, повзун – ланка, яка здійснює поступальний рух відносно іншої ланки.

Шатун – ланка, яка здійснює плоский (плоско-паралельний) рух.

Кривошип - ланка, яка здійснює обертальний рух (на повний оберт) відносно нерухомої точки.

Коромисло - ланка, яка здійснює обертальний рух (на неповний оберт – коливальний рух) відносно нерухомої точки.

Куліса – ланка, яка здійснює обертальний рух (на повний оберт чи на обмежений кут) і по якій рухається інше тіло (найчастіше - повзун).

1.2 Кінематичні пари та їх класифікація. Кінематичні ланцюги

Кінематичною парою називають рухоме з'єднання двох ланок, або з'єднання двох ланок, що мають відносний рух. Сукупність поверхонь, ліній або точок ланок, що входять в контакт з іншою ланкою пари, називають **елементом** пари. Для того щоб елементи пари знаходились у постійному контакті, пара повинна бути замкнута геометрично (за рахунок конструктивної форми ланок) або силовим (силою ваги, пружиною, силою тиску рідини або газу, тощо) способом.

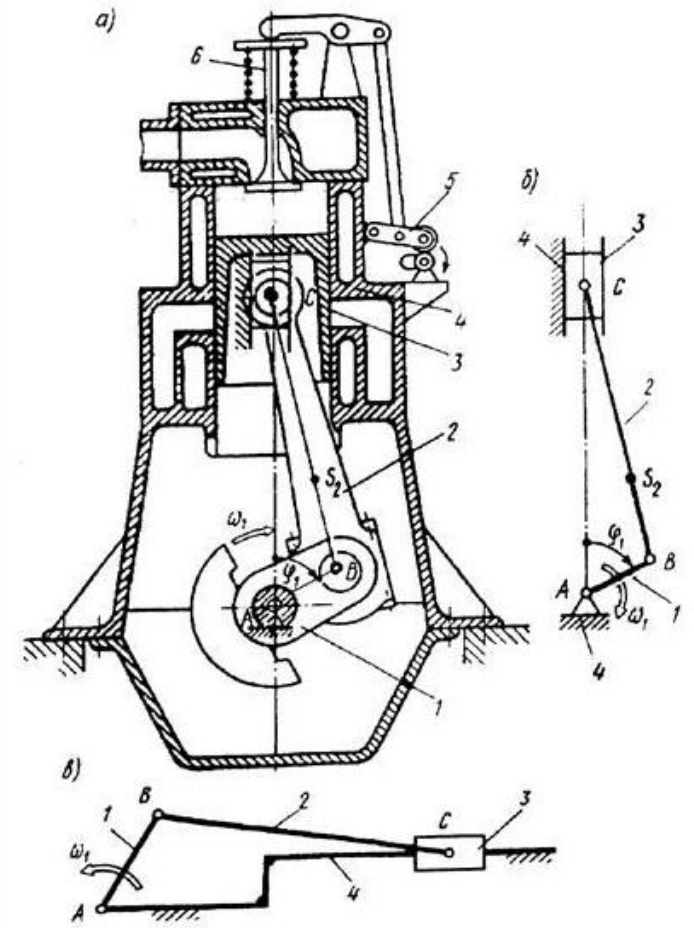


Рисунок 1.1

Кінематичні пари у значній мірі визначають працездатність й надійність машини, тому що через них передаються зусилля від однієї ланки до другої; в кінематичних парах, внаслідок відносного руху, виникає тертя, елементи пари знаходяться у напруженому стані і у стані зносу. Наприклад, при роботі механізму ДВС, зображеного на рис.1.1,*а*, зношуються гільза циліндру й поршневі кільця, корінна А й шатунна В шийки колінчатого валу 1 і т. і. Тому правильний вибір кінематичної

пари, її геометричної форми, розмірів, конструкційних та мастильних матеріалів має велике значення при проектуванні машини.

Систему ланок, які утворюють між собою кінематичні пари, називають **кінематичним ланцюгом.** Розрізняють ланцюги **просторові** та **плоскі, замкнуті та розімкнуті, прості та складні**. Якщо в кінематичному ланцюзі є хоча б одна кінематична пара просторова (тобто така в якій будь-яка точка однієї ланки, що рухається відносно іншої, може виходити за межі однієї площини), то і кінематичний ланцюг вважається просторовим. В замкнутому ланцюзі кожна ланка входить не менш ніж у дві кінематичні пари, в розімкнутому ланцюзі є ланки, що входять тільки в одну кінематичну пару. Якщо в кінематичному ланцюзі усі ланки входять не більш ніж у дві кінематичні пари, то такий ланцюг є простим. Якщо в кінематичному ланцюзі є хоча б одна ланка, яка входить біль ніж у дві кінематичні пари, тобто припускає розділення ланцюга на паралельні гілки, то такий ланцюг вважається складним.

Використовуючи термін «кінематичний ланцюг», можна дати таке визначення механізму: **механізм** – кінематичний ланцюг, до складу якого входить нерухома ланка (стояк, стійка) й число ступенів волі якого відносно стійки дорівнює числу узагальнених координат, які характеризують положення ланцюга відносно цієї ж стійки (інші визначення механізму див.[4]). Наприклад, на схемі кривошипно – повзунного механізму ДВС з однією ступінню волі (W=1) (Рис.1.1,*б*) показана одна узагальнена координата механізму у вигляді кутової координати φ_1 ланки 1, похідною φ_1 є ω_1 - кутова швидкість (узагальнена швидкість) ланки 1.

Нерухомість ланки показують на схемі штриховою. Розрізняють вхідні та вихідні ланки механізму. **Вихідною** називають ланку, яка здійснює рух, для якого й призначено механізм. **Вхідною** називають ланку, якій надається рух, що перетворюється механізмом у необхідний рух вихідної ланки. Число вхідних ланок звичайно ж дорівнює числу ступенів волі механізму, тобто числу його узагальнених координат, але може й не збігатись з ним.

При зображені механізму на кресленні розрізняють його **структурну** (принципову) схему з використанням умовних позначень ланок і пар (без вказування розмірів ланок) й **кінематичну** схему з розмірами, необхідними для кінематичного розрахунку. На схемах ланки позначають цифрами, а пари й різні точки ланок - буквами.

1.2.1 Класифікація кінематичних пар

Кінематичні пари розрізняють (по **Рело**[1]) за характером дотику ланок: пару називають **вищою,** якщо елементом дотику ланок є точка або лінія, і **нижчою**, якщо елементом дотику ланок є поверхня.

При цьому точковий або лінійний контакт розуміється як такий при дотику ланок без зусилля, а під навантаженням ланки , які утворюють вищу пару, будуть контактувати по деякій фактичній поверхні, яка зветься **плямою контакту**.

Вища кінематична пара це така, елементами якої є точки або лінії.

Нижча кінематична пара це така, елементами якої є поверхні або площини.

Просторовий кінематичний ланцюг це такий, в якому є хоча б одна кінематична пара просторова ($W \geq 3$), тобто така, в якій будь-яка точка однієї ланки, що рухається відносно іншої, може виходити за межі однієї (базової) площини.

Плоский кінематичний ланцюг це такий, в якому усі ланки, а також усі їх точки, рухаються в одній базовій або паралельній їй площині.

Замкнутий кінематичний ланцюг це такий, в якому усі ланки входять не менш, як у дві кінематичні пари.

Розімкнутий кінематичний ланцюг це такий, в якому є хоча б одна ланка, яка входить тільки в одну кінематичну пару.

Простий кінематичний ланцюг це такий, в якому усі ланки входять не більш, як у дві кінематичні пари.

Складний кінематичний ланцюг це такий, в якому є хоча б одна ланка, яка входить більше ніж у дві кінематичні пари.

В просторі кожна ланка має шість вільних незалежних рухів – три поступальних та три обертальних відносно трьох прямокутних (Декартових) осей координат. Будь який контакт з іншою ланкою (за умовою постійності його) накладає обмеження у відносному русі ланок, тобто віднімає певну кількість незалежних рухів.

В теоретичній механіці, при розгляді теми в'язів та реакцій в'язів, було показано, що реакцій в'язів стільки, скільки обмежень у

---

[1] Ф.Рело (1829-1905) – німецький вчений, який розробив графічний метод синтезу спряжених поверхонь, відомий тепер як „метод нормалей". Рело також є автором праць із структури та кінематики механізмів.

відносному русі така в'язь накладає. Таким чином при класифікації кінематичних пар (за **І.І. Артоболевським**[2]) клас кінематичної пари визначається кількістю в'язів накладених на відносний рух ланок, або, інакше, кількістю незалежних рухів відібраних у ланки в її відносному русі.

При цьому вважається, що усі в'язі – геометричні, які накладають обмеження тільки на координати точок ланки, що входить у кінематичну пару, в його відносному русі.

На рис.1.2 показані кінематичні пари різних класів: *а)* - однорухома пара 5-го класу, яка припускає лише відносний обертальний рух ланок навколо вісі; *б)* - однорухома пара 5-го класу, яка припускає лише відносний поступальний рух; *в)* – дворухома пара 4-го класу (циліндрична), яка припускає незалежні обертальний та поступальний відносні рухи ланок; *г)* – трирухома сферична пара 3-го класу, яка припускає три незалежні обертальні відносні рухи навколо осей *x, y,* z*;* пара нижча з геометричним замиканням; *д)* – чотирирухома пара 2-го класу, що припускає три обертальні та один поступальний незалежні рухи; *е)* – п'ятирухома пара 1-го класу, яка припускає п'ять незалежних рухів.

Види здійснюваних рухів – поступальний, обертальний, плоский або складний рухи твердого тіла. Поступальний рух це такий рух твердого тіла, при якому будь-яка пряма, проведена в цьому тілі, рухається, залишаючись паралельною сама собі. Обертальний рух це такий рух твердого тіла, при якому будь-які дві точки, що належать тілу (або незмінно з ним зв'язані), залишаються за увесь час руху нерухомими. Пряма, яка проходить через ці дві нерухомі точки, зветься віссю обертання. Абсолютний рух це рух твердого тіла відносно нерухомої системи координат.

---

[2] І.І.Артоболевський (1905-1977) – організатор радянської школи теорії механізмів і машин. Він написав численні праці зі структури, кінематики й синтезу механізмів, динаміки машин і теорії машин-автоматів, а також підручники [1], які отримали загальне визнання. Перший президент Міжнародної федерації з теорії механізмів і машин (ІФТОММ).

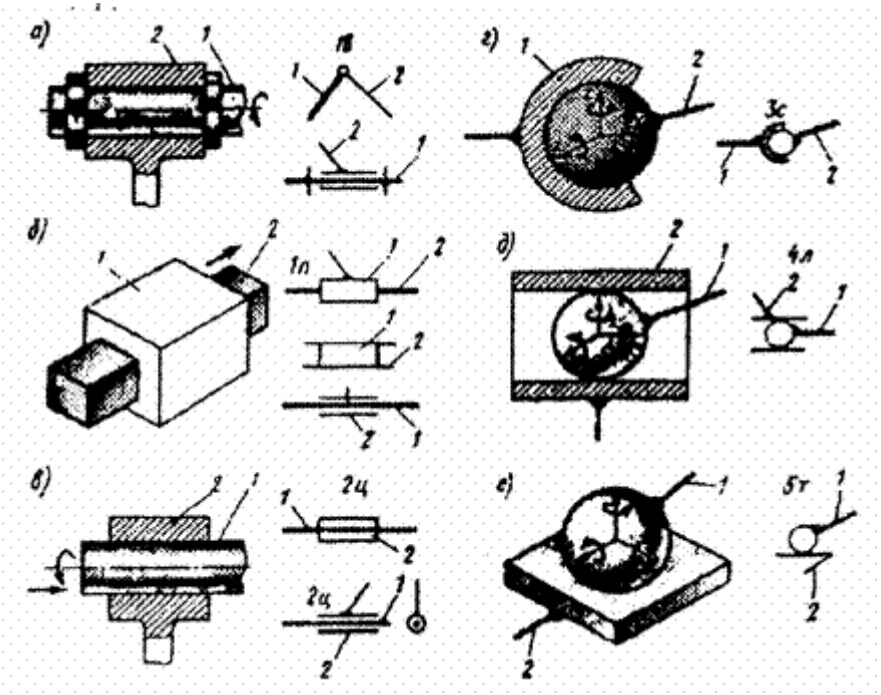


Рисунок 1.2

На рис.1.2 показані також приклади умовних позначень кінематичних пар на схемах.

Нагадаємо, що кінематичні пари поділяються на вищі (Рис.1.2,*д,е)* та нижчі (Рис.1.2,*а,б,в,г).* Одна з переваг нижчих пар по відношенню до вищих – можливість передавати більші сили, оскільки контакт здійснюється по поверхні і тому контактна міцність їх значно більша.

На рис. 1.3,*а* показана схема складного відкритого (розімкнутого) кінематичного ланцюга; на рис.1.3,*б* – схема простого замкнутого ланцюга; на рис. 1.3,*в* – схема складного замкнутого ланцюга з шести ланок. Усі ці схеми плоскі.

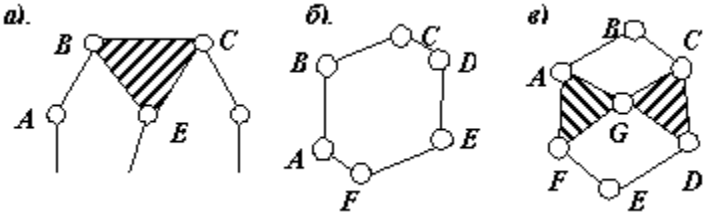


Рисунок 1.3

На рис. 1.4 показані макети та схеми просторових кінематичних ланцюгів: *а),б),в),г),д),е)* – замкнутих ,*ж)* – розімкнутого, складеного з плоских кінематичних пар.

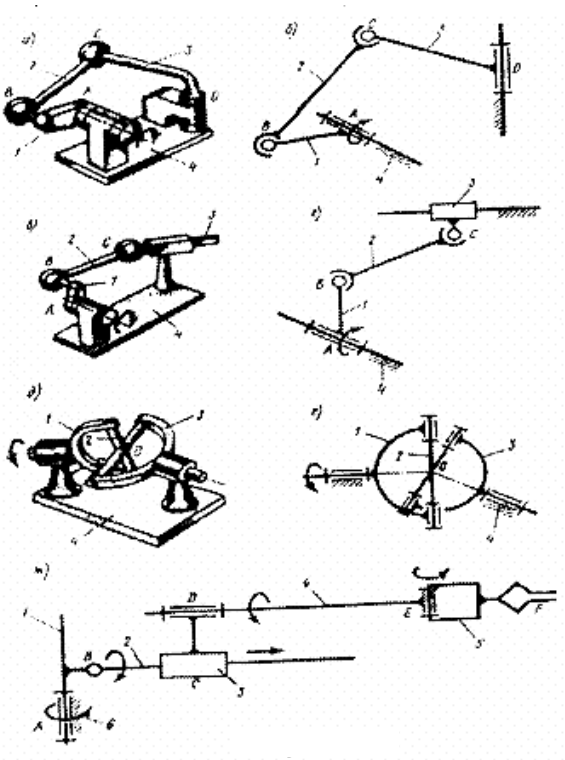


Рисунок 1.4

1.3 Структурні формули механізмів

Існують загальні закономірності в структурі (побудові) різних механізмів, які залежність враховують число ступенів волі ***W*** механізму з числом ланок й числом та видом його кінематичних пар. Ці закономірності носять назву **структурних формул** механізмів.

Структурна формула механізму це закономірність в структурі механізмів, яка враховує залежність числа ступенів волі W механізму від числа ланок й числа та виду його кінематичних пар.

Для просторових механізмів найбільш розповсюджена формула **Сомова – Малишева**[3], вивід якої проводиться так, як показано нижче.

Пусть в механізмі, що має ***m*** ланок (включно зі стійкою), p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 – число п'яти -, чотири -, три -, дво -, однорухомих пар (тобто 1-го, 2-го, 3-го, 4-го та 5-го класів). Число рухомих ланок позначимо $n = m - 1$. Якби усі рухомі ланки були б вільними тілами, то загальна кількість ступенів волі була б рівною $6n$. Однак кожна пара 1-го класу накладає на відносний рух ланок, що її утворюють, п'ять в'язів, кожна пара 2-го класу накладає на відносний рух ланок, що її утворюють, чотири в'язі і т.д. Таким чином, загальне число ступенів волі буде дорівнювати

$$W = 6n - (5p_1 + 4p_2 + 3p_3 + 2p_4 + p_5 - q), \qquad (1.1)$$

де q – кількість зайвих (надлишкових) в'язів, які дублюють інші в'язі, не зменшуючи рухомості механізму, а тільки перетворюючи його у статично невизначену систему. Тому від загальної кількості ступенів волі треба відняти цю кількість зайвих в'язів q. В загальному вигляді розв'язок рівняння (1.1) – важка задача, тому що невідомими є W і q; існуючі способи розв'язку є складними і в даних методичних вказівках не розглядаються. Однак в окремих випадках, якщо W, яке дорівнює числу узагальнених координат механізму, яке відомо з геометричних міркувань, з формули (1.1) можна визначити число надлишкових в'язів.

$$q = W - 6n + (5p_1 + 4p_2 + 3p_3 + 2p_4 + p_5) \qquad (1.2)$$

---

[3] П.І.Сомов в 1887 році вперше вивів формулу визначення ступеня волі просторового механізму, яка розвинута А.П.Малишевим у 1923 році. Тепер ця формула носить назву формули Сомова – Малишева.

Треба зауважити, що в структурні формули не входять розміри ланок, тому при структурному аналізі механізмів їх можна припустити будь-якими. Якщо надлишкових в'язів нема ($q = 0$), складання механізму відбувається без деформування ланок; такі механізми називаються **самоустановлюючими.** Якщо ($q > 0$), то складання механізму і рух його ланок будуть можливими тільки при деформуванні останніх.

Для плоских механізмів без надлишкових в'язів структурна формула носить ім'я **П.Л.Чебишева**[4], який вперше запропонував її у 1869 році для важільних механізмів з обертальними парами й одною ступінню волі. В наш час формула Чебишева розповсюджується на будь-які плоскі механізми.

Пусть в плоскому механізмі, що має $n = m - 1$ - кількість рухомих ланок, $p_н$ – число нижчих пар і $p_в$ - число вищих пар. Якби усі рухомі ланки були б вільними тілами, що здійснюють плоский рух, то загальне число ступенів волі було б рівним $3n$. Однак кожна нижча пара накладає на відносний рух ланок, що утворюють пару, дві в'язі, лишаючи одну ступінь волі, а кожна вища пара накладає одну в'язь, залишаючи дві ступені волі.

Ступінь волі (вільності) – кількість незалежних рухів (дивись "види здійснюваних рухів"), які може здійснювати тверде тіло або механізм.

В'язь – геометричне або кінематичне обмеження, або неможливість виконання, деяких рухів твердого тіла.

В загальну кількість в'язів можуть увійти q надлишкових в'язів, вилучення яких не збільшує рухомості механізму. Таким чином , число ступенів волі рухомого плоского кінематичного ланцюга (механізму) визначається формулою Чебишева:

$$W = 3n - (2p_н + p_в - q). \qquad (1.3)$$

---

[4] П.Л.Чебишев, академік, видатний математик і механік (1821-1894), опублікував 15 робіт зі структури та синтезу важільних механізмів, при цьому на підставі розроблених методів винайшов і побудував більш ніж 40 різних нових механізмів, які здійснюють задану траєкторію, зупинку деяких ланок при русі інших і т. і; структурна формула визначення ступеня волі плоских механізмів тепер носить його ім'я.

Враховуючи, що плоскими кінематичними парами нижчими є пари 5-го класу, вищими – пари 4-го класу, формула Чебишева має вигляд:

$$W = 3n - (p_4 + 2p_5 - q). \quad (1.4)$$

1.4 Групи Ассура та їх класифікація. Утворення механізмів. Заміна вищих пар нижчими

1.4.1 Утворення механізмів за Ассуром

Розроблена **Л.В.Ассуром**[5] структурна класифікація плоских важільних механізмів полегшує дослідження існуючих та утворення нових механізмів без надлишкових в'язів.

Основний її принцип полягає в тому, що механізм може бути утворений шляхом приєднання до одного або декількох початкових ланок й стійки кінематичних ланцюгів (структурних груп) нульової рухомості відносно тих ланок , до яких група приєднується. Таким чином, **нульова структурна група (група Ассура) – кінематичний ланцюг, приєднання якого до механізму не змінює числа його ступеня волі.** За Ассуром в структурних групах усі ланки з'єднуються тільки кінематичними парами нижчими, тобто 5-го класу ($p_4 = 0$). Первісний механізм, або механізм 1-го класу, є найпростіший механізм, що представляє з себе дволанковий механізм, який складений з однієї рухомої ланки й стійки; число первісних механізмів рівне числу ступенів волі механізму. Для структурних груп Ассура за формулою Чебишева можна записати рівність:

$$W = 3n - 2p_5 = 0 \quad (1.5)$$

З цієї формули можна визначити співвідношення між кількістю рухомих ланок та кількістю кінематичних пар 5-го класу, які можливі в структурній групі Ассура.

---

[5] Л.В. Ассур, російський вчений (1878-1920), відкрив загальну закономірність в структурі багатоланкових плоских механізмів, яку використовують зараз при їх аналізі та синтезі. Його ім'ям називаються нульові групи – групи Ассура. Він же розробив метод "особливих точок" для кінематичного аналізу складних важільних механізмів.

$$n = \frac{2}{3} p_5.$$

Звідси можна скласти таку табличку:

N	2	4	6	8	…
P_5	3	6	9	12	…

Приклади груп Ассура з таким співвідношенням кількості ланок і кінематичних пар представлені на рис 1.5.

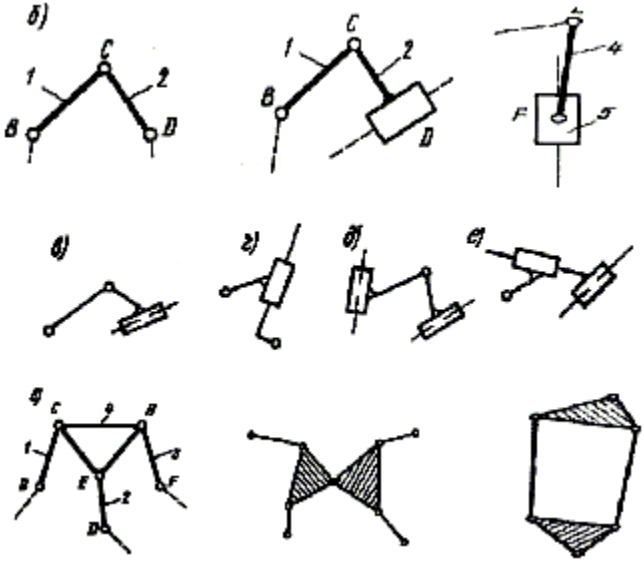


Рисунок 1.5

Найпростіше сполучення чисел ланок і пар, що задовольняє умові (1.5), буде n = 2 та p_5 = 3. Враховуючи, що будь – яка група Ассура, якщо її приєднати до початкової ланки й стійки, утворює замкнутий кінематичний ланцюг (Рис. 1.6), можна зробити висновок: **число елементів, якими група приєднується до початкової ланки та стійки не може бути менше двох.** Тоді у найпростіших групах (верхній і середній ряди рис. 1.6), які складаються з трьох кінематичних пар, елементи двох ланок є вільними. **Обов'язковою умовою приєднання групи Ассура є неможливість з'єднання вільних її елементів між собою або до однієї ланки.** Ці групи можуть своїми

вільними елементами бути приєднаними до двох ланок інших груп, або до початкової ланки (механізму 1 – го класу) та стійки відповідно. Якщо група буде приєднана до механізму 1 – го класу і стійки, то це буде механізм з ступінню волі 1, тобто W = 1. Якщо група буде приєднана до двох механізмів 1 – го класу, то це буде механізм з ступінню волі 2, тобто W = 2 (див. рисунок 1.6)

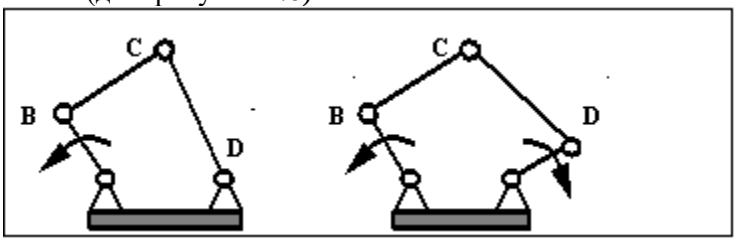


Рисунок 1.6

Робочий механізм екскаватора (Рис. 1.6,а) є практично плоским. Просторовим його робить можливість обертання основної опори відповідно вертикальної осі. Ступінь волі механізму

$$\boldsymbol{W = 3 \cdot 12 - 2 \cdot 16 = 36 - 32 = 4.}$$

Дійсно для нормальної роботи механізму потрібно мати 4 незалежних вхідних ланок. В даному випадку це: 1-корпус екскаватора і привод обертання механізму відносно його; 2-робочий циліндр 9, який обертається на опорі 10; 3-робочий циліндр 1; 4-робочий циліндр 5 (дивись рисунок). До передостанньої групи Ассура, яка складається зі штока циліндра 5 і ланки 6 додається ще група, яка складається із ланок 7 і 8.

Робота механізму екскаватора, крім повороту відносно основної осі, показано на рисунку 1.6,а.

Група, що має дві ланки й три кінематичні пари 5 – го класу, зветься групою 2 – го класу та 2 – го порядку, тому що приєднання цієї групи до основного механізму здійснюється двома повідками CB і CD.

Клас групи Ассура визначається найвищим класом контурів, з яких складається дана група. Контур – це замкнута фігура, що утворена ланками однієї групи. Контуром другого класу (Рис.1.7) вважається будь–яка ланка з двома кінематичними парами 5-го класу.

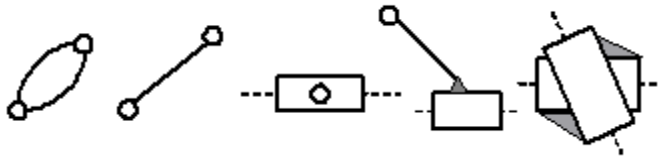


Рисунок 1.7

Контуром третього класу (Рис. 1.8) вважається трикутник, утворений трьома ланками, що з'єднані між собою трьома кінематичними парами 5-го класу. Контуром четвертого класу вважається чотирикутник, утворений чотирма ланками, що з'єднані між собою чотирма кінематичними парами 5-го класу.

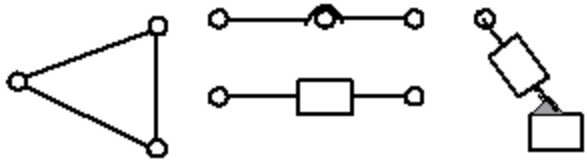


Рисунок 1.8

Слід звернути увагу на те, що **кінематичні пари, які утворюють контури, повинні бути утворені ланками тільки однієї групи Ассура.** Якщо у трикутнику хоча б одна кінематична пара утворена ланками, що входять до різних груп Ассура, вона вважається несуттєвою, тобто такою, яка не входить до ознак контуру, а ланка вважається контуром другого класу.

Порядок групи Ассура визначається числом елементів ланок, якими група приєднується до основного механізму, або до інших груп.

Основний механізм (механізм 1-го класу) це:

- кривошип зі стійкою;
- ведуча ланка, з'єднана зі стійкою, якій задається незалежний рух;
- механізм, який складається з однієї рухомої і однієї нерухомої ланок і має ступінь волі W = 1.

Наприклад, на рис.1.5 у двох верхніх рядках показані групи 2 – го порядку, а у нижньому рядку (зліва направо) відповідно групи третього, четвертого та другого порядків.

Клас механізму визначається найвищим класом усіх груп, що входять до складу механізму.

1.4.2 Заміна вищих пар нижчими

Як було вказано раніше, плоскі механізми можуть мати ланки, що входять як у нижчі, так і у вищі кінематичні пари. При вивченні структури й кінематики плоских механізмів в багатьох випадках зручніше заміняти вищі пари кінематичними ланцюгами або ланками, що входять тільки у нижчі обертальні або поступальні пари п'ятого класу. Як і у всьому іншому, при такій заміні треба виконувати деякі умови заміни умови структурной еквівалентності. Такими умовами заміни є:

- механізм, отриманий після такої заміни, повинен мати таку ж ступінь волі, яку він мав і до заміни;
- ланки, які утворювали вищу кінематичну пару, після заміни її вищою парою повинні мати ті ж відносні рухи, що і до заміни.

Розглянемо першу умову. Для плоского механізму можна записати формулу Чебишева:

$$W = 3n - p_4 - 2p_5 \qquad (1.6)$$

Отриманий після заміни механізм будемо називати **замінюючим механізмом. Або механізм, який за своїми кінематичними параметрами може повністю замінити даний.** Ступінь волі замінюючого механізму буде такою ж, як і до заміни, тільки без пар четвертого класу, тобто $p_4 = 0$.

$$W_з = W = 3n_{1з} - 2p_{51з} = 3n - p_4 - 2p_5 . \qquad (1.7)$$

Тут $n_{1з} = n + n_з$ і $p_{51з} = p_5 + p_{5з}$, де $n_з$ – кількість ланок в ланцюзі заміни і $p_{5з}$ – кількість кінематичних пар п'ятого класу в ланцюзі заміни. Підставимо ці рівності у формулу (1.7).

$$3(n + n_з) - 2(p_5 + p_{5з}) = 3n - 1 - 2p_5.$$

Звідки:

$$3\,n_з - 2\,p_{5з} = -\,p_4 \text{ і } n_з = \frac{2 \cdot p_{5з} - p_4}{3}. \quad (1.8)$$

З цієї формули видно, що рівність може бути досягнута за умов, коли $n_з = p_4$ і $p_{5з} = 2p_4$, або: якщо $p_4=1$, то $n_з = 1$ і $p_{5з} = 2$; $p_4=2$, то $n_з = 2$ і $p_{5з} = 4$, і таке інше. Можна звичайно брати будь – яке інше сполучення $n_з$ і $p_{5з}$, наприклад: якщо $p_4 = 1$, то $n_з = 3$ і $p_{5з} = 5$; $p_4 = 2$, то $n_з = 6$ і $p_{5з} = 10$, але треба пам'ятати, що чим простіше механізм, тим він надійніше. Тому приймаємо, що одну кінематичну пару четвертого класу можна замінити однією ланкою з двома кінематичними парами п'ятого класу.

Тепер треба вирішити питання, а які приймати кінематичні пари (поступальні чи обертальні) в ланці заміни та якою вибирати довжину ланки заміни. Ці питання можна вирішити, якщо звернутись до другої умови заміни.

1.5 Надлишкові в'язі та зайві ланки

Надлишкові в'язі – такі ступені вільності і умови зв'язку, які не впливають на рухомість механізму в цілому, однак саме число ступеня вільності може мінятись, а надається для збільшення жорсткості окремим ланкам.

Зайві ланки – такі ланки, які надаються до механізму для збільшення жорсткості деяких ланок, або для виведення механізму з положення кінематичної невизначеності, які не впливають на рухомість в цілому, однак саме число ступеня вільності може мінятись.

При довільних (у деяких межах) розмірах ланок механізм із залишковими в'язями ($q>0$) не можна скласти без деформування ланок. Тому такі механізми потребують підвищеної точності виготовлення, інакше ланки деформуються, що викликає додаткове навантаження кінематичних пар і ланок значними силами. При недостатній точності виготовлення механізму із залишковими в'язями тертя в кінематичних парах може настільки збільшитись, що призведе до заклинення ланок, тому з цієї точки зору, надлишкові в'язі в механізмах є небажаними.

Однак у багатьох випадках приходиться свідомо проектувати й виготовляти статично невизначені механізми із залишковими в'язями для забезпечення необхідної міцності й жорсткості системи, особливо при передачі великих сил. Слід розрізняти надлишкові, або додаткові,

в’язі в кінематичних парах і в кінематичних ланцюгах механізму. Так, наприклад, (Рис. 1.9) колінчатий вал чотириціліндрового двигуна внутрішнього згоряння утворює з підшипником однорухому обертальну пару, що є достатнім з точки зору кінематики даного механізму з однією ступінню волі (W=1).

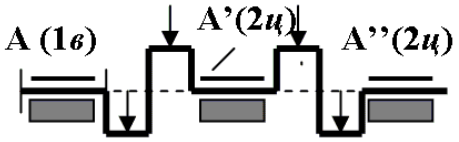


Рисунок 1.9

Однак, враховуючи велику довжину вала й значні сили, що навантажують колінчатий вал, приходиться додавати ще два підшипника А’ та А’’, інакше система буде непрацездатною з-за недостатньої міцності й жорсткості. При цьому потребується висока точність виготовлення для забезпечення співвісності усіх трьох опор, інакше вал буде сильно деформуватись, а в матеріалі вала та підшипників можуть з’явитись неприпустимо великі напруги.

Що стосується надлишкових в’язів в кінематичних ланцюгах механізму, то при конструюванні машин їх слід намагатись видаляти або залишати мінімальну кількість, якщо повне їх вилучення є невигідним з-за ускладнення конструкції або з яких-небудь інших міркувань.

Методику визначення й вилучення надлишкових в’язів в кінематичних ланцюгах механізмів розглянемо на прикладі.

Хай плоский чотириланковий механізм з чотирма однорухомими обертальними парами (W = 1, n = 3, p_1 = 4, Рис.1.10,*а*) за рахунок неточностей виготовлення (наприклад внаслідок непара-лельності осей A і D) виявився просторовим.

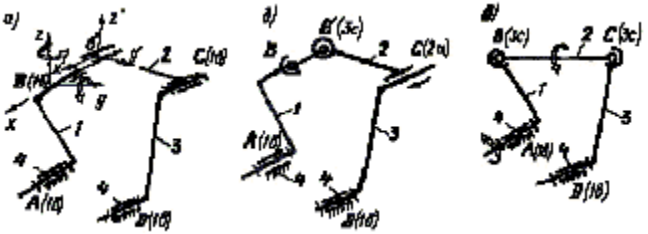


Рисунок 1.10

Складання кінематичних ланцюгів 4, 3, 2 і окремо 4, 1 не викликає труднощів, і точки *B* і *B'* можна розташувати на осі *x*. Однак скласти обертальну пару *B*, що утворена ланками 1 і 2, можна тільки якщо співпадають осі систем координат *Bxyz* і *B'x'y'z',* для чого необхідне лінійне переміщення (деформація) точки *B'* ланки 2 вздовж осі *x* й кутові деформації ланки 2 навколо осей *y* і *z* (показані стрілками). Це означає наявність в механізмі трьох надлишкових в'язів: $q = 1 - 6 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 3$. Щоб даний просторовий механізм був статично визначеним, потребується його друга структурна схема, наприклад зображена на рис.1.10,*б*, де $W = 1$, $p_1 = 2$, $p_2 = 1$, $p_3 = 1$. Складання такого механізму відбудеться без натягів, оскільки сполучення точок *B* і *B'* буде можливим за рахунок переміщення точки *C* в циліндричній парі.

Можливий також варіант механізму (Рис.1.10,*в*) з двома сферичними парами ($p_1 = 2$, $p_3 = 2$); в цьому випадку, окрім **основної рухомості** механізму $W_0 = 1$ з'являється **місцева рухомість** $W_м = 1$ – можливість обертання шатуна 2 навколо власної осі *BC*; ця рухомість не впливає на основний закон руху механізму й може бути навіть корисним з точки зору вирівнювання зносу шарнірів: при роботі механізму шатун 2 може вільно повертатись навколо власної осі за рахунок змінних динамічних навантажень та вібрацій. Таким чином підтверджується формула Малишева за якою такий механізм є статично визначеним.

Іноді приходиться враховувати й так звану *групову рухомість* ланок; наприклад, в механізмі гідроприводу (Рис.1.11) в разі, коли пари *B* і *C* сферичні, ланки 2 і 3 будуть мати додаткову спільну (групову) рухомість у вигляді обертання навколо осі *BC*.

Механізми з незамкнутим кінематичним ланцюгом складаються без натягів, тому вони статично визначені, без надлишкових в'язів. Для таких механізмів легко визначається ступінь волі. Ці рухомості (ступені волі) незалежні один від одного і забезпечуються окремими приводами. На рис.1.12 показано приклад позбавлення надлишкових в'язів в кулачковому механізмі з поступально рухаючим роликовим штовхачем.

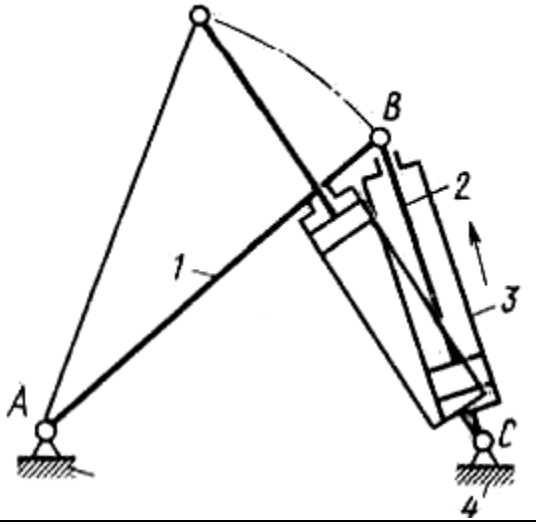


Рисунок 1.11

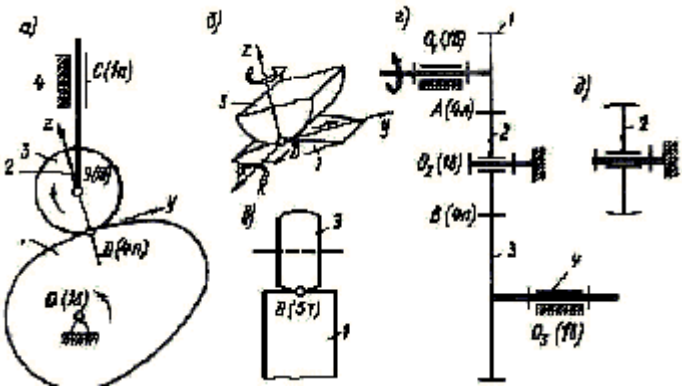


Рисунок 1.12

Механізм (Рис.1.12,*а*) – чотириланковий (n = 3); окрім основної рухомості (обертання кулачка 1) є ще і місцева рухомість (незалежне обертання круглого циліндричного ролика 3 навколо власної осі); таким чином $W_п = W = W_о + W_м = = 2$. Плоска схема надлишкових в'язів не має (механізм збирається без натягів, $q_п = W_п - 3n + 2p_5 + p_4 = 2 - 3\cdot3 + 2\cdot3 + 1 = 0$). Якщо внаслідок неточностей виготовлення механізм

вважати просторовим, то при лінійному контакті ролика 3 з кулачком 1 за формулою Малишева при $p_1 = 3$ отримаємо $q = 1$, але за певною умовою. Кінематична пара циліндр – циліндр (Рис.1.12,*б*) при неможливості відносного повороту ланок 1, 3 навколо осі z була б трирухомою парою. Якщо ж такий поворот внаслідок неточностей виготовлення має місце, але малий, й практично зберігається лінійний контакт (при навантаженні пляма контакту за формою близька до прямокутника), то дана кінематична пара буде чотирирухомою, таким чином, $p_4 = 1$ й $q = 2 - 6 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 1$.

Знижуючи клас вищої пари шляхом застосування бочковидного ролика (п'ятирухома пара з точковим контактом, рис.1.12,*в*), отримаємо при $p_1 = 3$ і $p_5 = 1$, $q = 2 - 6 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 1 = 0$ – механізм статично визначений. Однак слід пам'ятати, що лінійний контакт ланок, хоч і потребує при $q > 0$ підвищеної точності виготовлення, дозволяє передати більші навантаження, чим точковий контакт.

На рис.1.12,*г,д* показаний другий приклад позбавлення надлишкових в'язів в зубчатій чотириланковій передачі ($W = 1$, $n = 3$, $p_1 = 3$, $p_4 = 2$, контакт зубців коліс 1, 2 і 2, 3 – лінійний). В цьому випадку, за формулою Чебишева, $q_п = 1 - 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 2 = = 0$ – плоска схема надлишкових в'язів не має, за формулою Малишева, $q = 1 - 6 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 2$ – механізм статично невизначений, таким чином, необхідна висока точність виготовлення, зокрема для забезпечення паралельності геометричних осей усіх трьох коліс.

Замінюючи зубці проміжного колеса 2 на бочковидні (рис.1.12,*д*), отримаємо $q = 1 - 6 \cdot 3 + 5 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 0$ – статично визначений механізм.

1.5.1 Локальні надлишкові в'язі в кінематичній парі

Елементи кінематичної пари визначають умови взаємодії ланок між собою: їх відносна рухомість й обмеження, які не дають можливості точкам ланок займати довільні положення у просторі та мати довільні швидкості.

Обмеження, що накладаються на положення й швидкості точок ланок механізму (в'язі), повинні виконуватись при будь-яких, діючих на механізм силах. Рівняння, яким за умовами накладених в'язів повинні задовольняти координати точок ланок механізму та їх швидкості, звуться **рівняннями в'язів.**

Геометричні в'язі описуються рівняннями, які мають тільки координати точок механічної системи. Ці рівняння відображають ті

в’язі, які відповідають виду кінематичної пари та її конструктивному виконанню.

Конструкція елементів кінематичних пар в реальних механізмах найрізноманітніша. Так, наприклад, однорухома поступальна кінематична пара, що з’єднує ланки 1 і 2 і зображена на кінематичних схемах умовно (Рис.1.13,*а*), реалізується в конструкції металорізальних верстат у вигляді плоских напрямляючих з різним профілем поперечного перерізу (Рис.1.13,*в*), а в конструкції підйомника (Рис.1.13,*г*).

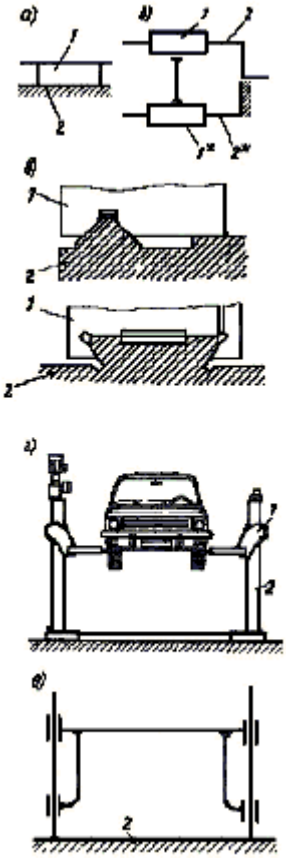


Рисунок 1.13

З наведених прикладів витікає, що контактуючі поверхні, лінії й точки ланок 1 і 2, є елементами кінематичної пари, можуть утворювати прості (Рис.1.13,*а*) й складні (Рис.1.3,*б,е*) кінематичні пари. В простій кінематичній парі контактують тільки два елементи, які визначають відповідне число компонент реакцій в'язів. В складній парі необхідні геометричні в'язі дублюються додатковими в'язями (наприклад, 1^* і 2^* на рис.1.13,*б*).

Якщо крім необхідних елементів кінематичної пари, обумовлених потрібними геометричними в'язями, при конструюванні використовуються додаткові елементи, то в такій складній кінематичній парі можуть з'явитись **надлишкові локальні в'язі**. При наявності надлишкових локальних в'язях відносний рух ланок або стає неможливість (заклинення, защемлення елементів), або здійснюється за рахунок деформації ланок, збільшення зазорів між реальними поверхнями елементів або їх зносу.

Щоб конструкції кінематичної пари були працездатними й надійними в експлуатації, до них пред'являють відповідні вимоги щодо **розмірів, форми й відносного положення її елементів**. Звичайно, обов'язковим є вказування меж відхилень від заданих або необхідних геометричних форм й розташування поверхонь, осей або точок. Наприклад, для плоских елементів кінематичної пари (Рис.1.13,*б*) нормують відхилення від площинності й прямолінійності: відхилення від прямолінійності в площині, відхилення від прямолінійності лінії у просторі й відхилення від прямолінійності лінії у заданому напрямку. Окремі види відхилень від прямолінійності і площинності – опуклість й вгнутість.

В залежності від призначення механізму й машини обмежують величини можливих відхилень форми і розташування поверхонь допусками, що передбачені відповідними стандартами. Чим менше допуск на обробку, тим складніше технологія й більше витрати на виготовлення. В цих випадках використовують більш точне й дороге обладнання та технологічну оснастку, засоби контролю, більш ретельно проводять технологічну підготовку виробництва, використовують більш кваліфіковану робочу силу. Тому конструктор повинен обґрунтовано вибирати конструкцію складних кінематичних пар, які необхідні для забезпечення заданих показників працездатності механізму, машини або пристрою. Конструкція складних кінематичних пар поряд з підвищенням жорсткості і точності повинна забезпечувати

невимушене складання вузлів й складальних одиниць і давати можливість механізмові зберігати задане число степенів волі при можливих деформаціях стійки, валів, осей та інших деталей під дією зовнішніх навантажень.

При розробці конструкцій додаткові елементи кінематичних пар уводять для того, щоб зменшити тиск і знос контактних поверхонь за

рахунок перерозподілу реактивних сил і збільшення розмірів елементів кінематичних пар (наприклад, Рис.1.13,*г*). Особливу увагу приділяють зменшенню деформацій під дією заданих сил шляхом встановлення додаткових підшипників.

Це можна показати на прикладі вала 1, який утворює зі стійкою 2 обертальну пару (Рис.1.14).

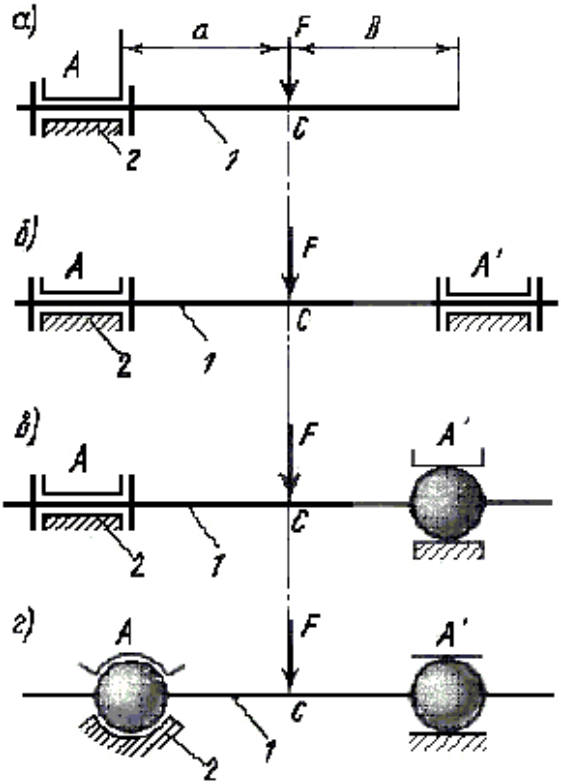


Рисунок 1.14

Якщо замість простої обертальної пари (Рис.1.14,*а*) вал установити на двох опорах, вводячи в конструкцію додаткові елементи (Рис.1.14,*б*), то вигин вала в точці С під дією сили F може бути зменшена. Для вала за схемою, що зображена на рис.1.14, 6,*в*, вигин в точці С (при *а = б*) зменшується у 8 разів порівняно з консольною конструкцією вала (Рис.1.14,*а*).

Число надлишкових локальних в'язей в кінематичній парі, сприяючи зменшенню податковості конструкції, може виявитись шкідливим в разі зміни температурного режиму роботи, при деформації стійки, при відхиленнях розмірів, форми й розташування поверхонь елементів кінематичної пари. В статично невизначених системах надлишкові локальні в'язі можуть викликати додаткові зусилля та переміщення. Тому число надлишкових локальних в'язей приходиться зменшувати. Так, якщо для вала правий підшипник виконати сферичним плаваючим, то число в'язей буде зменшено (Рис.1.14,*в*).

Якщо обидва підшипники виконати зі сферичними елементами (Рис.1.14,*г*), причому лівий підшипник нерухомий в осьовому напрямку, а правий підшипник має осьову рухомість (плаваючий), то максимальний прогин від навантаження F в точці С (при *а = в*) зменшиться тільки у два рази порівняно з консольною опорою вала тільки на лівому кінці (Рис.1.14,*а*), однак вал буде статично визначеним.

Вимоги до механізму – виконувати задані функції і зберігати задані параметри у відповідних межах протягом всього періоду експлуатації – висуває задачу про проектування механізмів оптимальної структури.Схему кінематичної пари, що відображає тільки необхідне число геометричних в'язей, відповідне виду пари (Рис.1.14,*а*), називають **основною**. Схему кінематичної пари, що відображає як необхідні так і надлишкові локальні (додаткові) в'язі, називають **дійсною** (Рис.1.14,*в,г*). Надлишкові локальні в'язі вносять статичну невизначеність, тобто визначити реакції в опорах методами статики неможливо і ми вимушені використовувати методи теорії пружності.Число додаткових в'язей в реальній конструкції пари називають **степінню статичної невизначенності** кінематичної пари. Для однорухомих обертальних кінематичних пар, наведених на рис.1.14,*б*, вона дорівнює п'яти, а на рис.1.14,*в* – двом, на рис.1.14,*а,г* – нулю.

2. СИНТЕЗ МЕХАНІЗМІВ

2.1 Синтез кнематичних схем механізмів з нижчими парами

При проектуванні механізму дуже часто треба вирішувати таку задачу: за вибраною структурною схемою й заданою кінематичною характеристикою визначити розміри ланок проектованого механізму, при яких він здійснював би необхідні рухи. Така задача називається **синтезом кінематичної схеми** механізму.

2.1.1 Умова існування кривошипу в плоских чотириланкових механізмах

Важливою кінематичною характеристикою при синтезі механізму є можливість провертатись його ланок (наявність у ньому одного або двох **кривошипів**), яка залежить від співвідношення довжин ланок [1]. Спершу розглянемо плоский шарнірний чотириланковик ABCD (Рис.2.1,*а*) з довжинами ланок *a, b, c* і *d* .

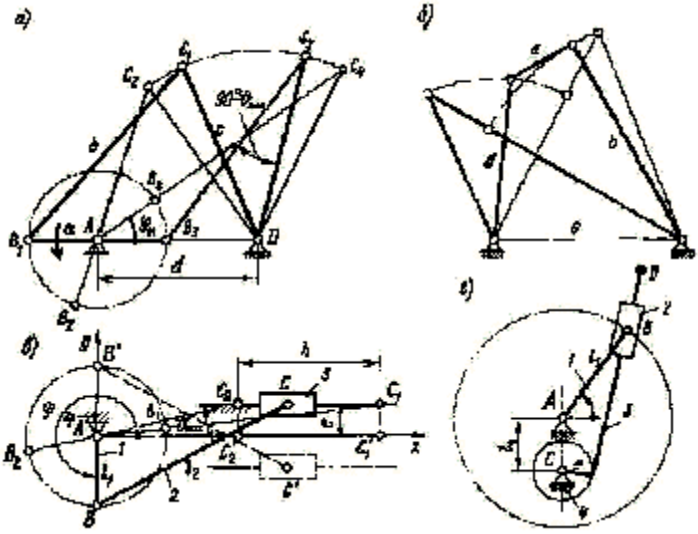


Рисунок 2.1

Для того щоб ланка AB могла бути кривошипом, вона повинна при обертанні пройти послідовно через крайні ліве (AB_1) і праве (AB_3)

положення. Припустивши, що a – довжина самій короткій ланки, d – самого довгого, і, використовуючи відоме співвідношення між довжинами сторін трикутника (довжини сторін трикутника менше суми довжин двох інших його сторін), запишемо такі нерівності:

$$\text{з}\ \Delta\ \mathbf{B_1C_1D}\ \boldsymbol{d + a < b + c} \qquad (2.1)$$

$$\text{з}\ \Delta\ \mathbf{B_3C_3D}\ \boldsymbol{d - a < b + c} \qquad (2.2)$$

Незалежно від співвідношення довжин b *і* c нерівномірність (2.1) завжди забезпечує виконання нерівності (2.2). Якщо ж самою довгою ланкою є ВС або CD ($b > c > d$ або $c > b > d$), то нерівність (2.1) тільки збільшується.

Позиції AB_2 і AB_4 характеризують крайні положення коромисла CD. Ланка ВС згідно рис.2.1,*а* не виконує повного оберту відносно стійки AD і тому є **шатуном**.

Нерівність (2.1) дозволяє дати загальне формулювання умови обертання ланки плоского шарнірного чотириланковика, а саме – **найкоротша ланка шарнірного чотириланковика може бути кривошипом, якщо сума довжин найкоротшої та найдовшої ланок менше суми довжин інших ланок**. Це положення носить назву **правила Грасгофа[6].**

Застосовуючи це правило, шарнірні чотириланковики поділяють на три групи:

- механізм буде **кривошипно–коромисловим** (Рис.2.1,*а*), якщо розміри його ланок задовольняють правилу й за стійку прийнята ланка, що розташована поруч з самою короткою;

- механізм буде **двокривошипним**, якщо сума довжин найкоротшої і найдовшої ланок менше суми довжин інших ланок і за стійку прийнята найкоротша ланка; це виходить з того, що якщо кривошип при виконанні правила Грасгофа робить повний оберт відносно стійки й шатуна, то і ці ланки теж здійснюють повний оберт відносно кривошипа;

- механізм буде **двокоромисловим**, якщо розміри його ланок не задовольняють правилу, а також у випадку, коли сума довжин

---

[6] Ф.Грасгоф (1826-1893) математично сформулював умови існування кривошипа у плоскому важільному механізмі, використані при його синтезі.

найкоротшої і найдовшої ланок менше суми довжин інших ланок, але найкоротша його ланка є шатуном (Рис.2.1,*б*), і, відповідно, можливість йому бути кривошипом неможлива, тому що вона не є ланкою, розташованою рядом зі стійкою.

У граничному випадку, коли нерівність (2.1) перетворюється в рівність, усі ланки механізму в одному з крайніх положень розташовуються по одній прямій. В результаті з'явиться невизначеність руху вихідної ланки (вона може рухатись або в одному, або в другому напрямку).

У **нецентральному кривошипно–повзунному** механізмі (Рис.2.1,*в*) ланка 1 буде кривошипом, якщо при обертанні пройде положення φ = 90° і 270°, що можливо при виконанні умови

$$l_1 < l_2 - |e|,$$

де e – ексцентриситет (або дезаксіал), тобто відстань між лінією руху повзуна 3 та центром обертання кривошипа. Штриховою лінією зображена схема, коли $e < 0$.

Якщо $l_1 > l_2 - |e|$, ланка 1 буде коромислом й такий механізм вірніше буде називати коромислово-повзунним.

В **кулісному механізмі** (Рис.2.1,*г*) ланка 1 завжди може бути кривошипом; ланка *CD* (куліса) буде кривошипом, якщо при обертанні пройде положення φ = 270° , що можливо при виконанні умови $l_1 > l_4 - e$, де e – ексцентриситет куліси; в цьому випадку маємо механізм з обертаючою кулісою. Якщо $l_1 < l_4 - e$, то куліса *CD* буде коромислом (механізм з коливальною кулісою). Найбільш розповсюджені схеми кулісних механізмів, в яких $e = 0$.

2.2 Синтез механізмів за середньою швидкістю ланки і за коефіцієнтом зміни середньої швидкості вихідної ланки

Кривошипно – коромисловий механізм. Задані довжина вихідної ланки l_3 і координати γ_1 і γ_2 його крайніх положень (Рис. 2.2). Різниця $\gamma_2 - \gamma_1 = \beta$ є кутовим ходом (розмахом) вихідної ланки. Кривошип *AB* обертається рівномірно, а його центр обертання в деякій, поки що невідомій , точці *A* на осі *x*.

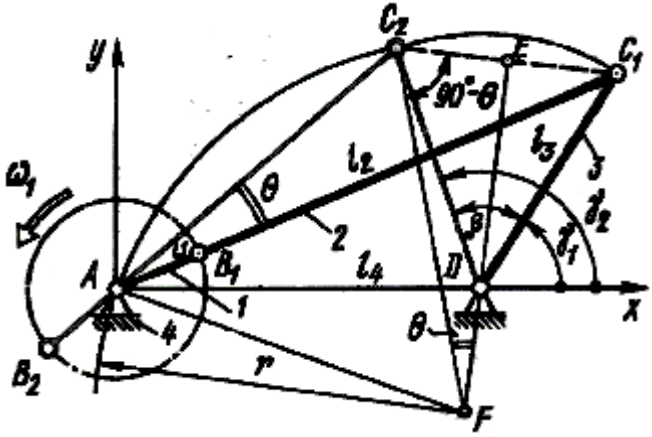


Рисунок 2.2

Рух коромисла з положення 1 у положення 2 візьмемо за прямий хід, а рух у протилежному напрямку – за зворотний хід.

Треба спроектувати кінематичну схему механізму, для якого відношення середніх кутових швидкостей вихідної ланки при зворотному й прямому ходах дорівнює деякій заданій величині $K_\omega = \omega_{звор}/\omega_{пр}$ (коефіцієнт зміни середньої швидкості вихідної ланки).

На рис. 2.3 зображені два крайні положення механізму, в кожному з яких кривошип і шатун розташовуються по одній прямій; кут між цими двома положеннями AC_1 і AC_2 позначений літерою θ.

З креслення витікає, що за час прямого ходу $t_{пр}$ кривошип повернеться на кут ($180^0 + \theta$), а за час зворотного ходу $t_{звор}$ – на кут ($180^0 - \theta$). Таким чином, при рівномірному обертанні кривошипа

$$K_\omega = \frac{\beta/t_{звор}}{\beta/t_{пр}} = \frac{180+\theta}{180-\theta}, \text{ звідки } \theta = 180^0 \cdot \frac{K_\omega - 1}{K_\omega + 1}.$$

Якщо кутовий хід β поділити прямою DE навпіл й через точку C_2 провести пряму C_2F, що складає кут θ з напрямком DE то вона перетнеться з останнім у деякій точці F. Коло радіусом $l_{FC2} = r$ буде геометричним місцем шуканих центрів обертання кривошипа A, оскільки в будь-якій точці цього кола вписаний кут $\angle C_1AC_2$ дорівнює

половині центрального кута $\angle C_1FC_2 = 2\theta$, що опирається на ту ж дугу C_1C_2, й, таким чином, дорівнює θ.

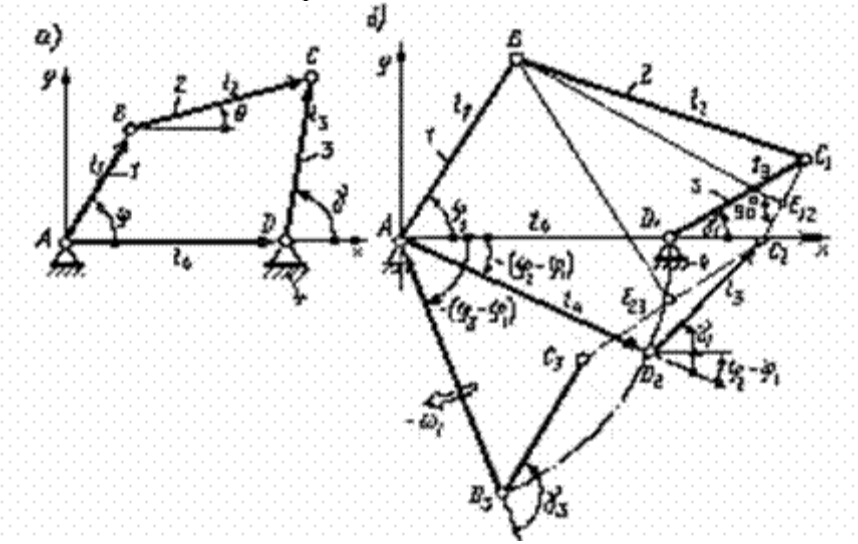


Рисунок 2.3

Точка A перетину цього кола з віссю абсцис згідно вхідним даним задачі буде центром обертання кривошипа. Після цього задача зводиться до синтезу механізму за двома крайніми положеннями ланки 3 ; довжини кривошипа l_1 й шатуна l_2 визначаються за формулами (2.3).

$$l_1 = \frac{\left(l_{AC_1} - l_{AC_2}\right)}{2}; \qquad l_2 = \frac{\left(l_{AC_1} + l_{AC_2}\right)}{2}. \tag{2.3}$$

Якщо в спроектованому механізмі максимальний кут тиску більше припустимого, слід вибрати інше положення центра обертання кривошипа на колі радіуса r (вище точки A).

Кут тиску має геометричне і силове визначення:

- кут між нормаллю до ланок в точці контакту і напрямком абсолютного руху веденої ланки;

- кут між загальною реакцією між ланками та її корисною складовою, що діє на ведену ланку.

Кривошипно-повзунний механізм. При проектуванні машин інколи задають середню швидкість повзуна (поршня) $v_{сер}$ (м/с). Для центрального кривошипно–повзунного механізму (Рис. 2.4 подвійний хід повзуна, що відповідає одному повному оберту кривошипа, $2h = 4l_1$.

Якщо частота обертання кривошипа дорівнює n (1/с), то

$$v_{сер} = 2hn = 4l_1n,$$

звідки довжина кривошипа (м) $l_1 = v_{сер}/(4n)$.

Потім за заданою величиною $\lambda_2 = l_2 / l_1$ можна визначити й довжину шатуна l_2.

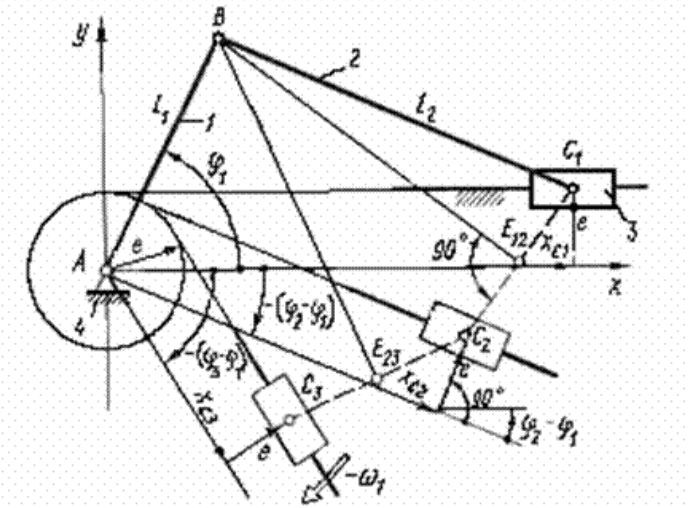


Рисунок 2.4

Механізм з коливальною кулісою. Шестиланковий кулісний механізм (Рис.2.5) перетворює обертальний рух кривошипа *1* у зворотно – поступальний рух повзуна *5*, при цьому середня швидкість $v_{звор}$ повзуна при зворотному ході більше у K_v разів середньої швидкості $v_{пр}$ прямого ходу. Вхідними даними є хід h вихідної ланки *5* й коефіцієнт зміни його середньої швидкості $K_v = v_{звор} / v_{пр}$.

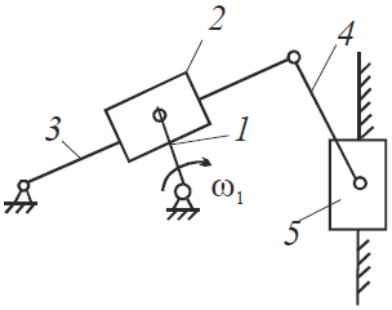


Рисунок 2.5

Наприклад, у стругальних станках виріб обробляється в одному напрямку із заданою швидкістю різання, а холостий (зворотний) хід різального інструмента здійснюється з більшою середньою швидкістю; в цьому випадку $K_v > 1$.

Коефіцієнт K_v і кут β розмаху (кутовий хід) куліси зв'язані (при ω_1 = const) залежністю

$$K_v = \frac{h/t_{звор}}{h/t_{пр}} = \frac{180+\theta}{180-\theta}, \text{ звідки } \theta = 180^0 \cdot \frac{K_v-1}{K_v+1}.$$

Довжину куліси визначають з розгляду її крайнього положення за формулою

$$l_3 = l_{CD} = h/[2 \cdot sin(\beta/2)].$$

В середньому (вертикальному) положенні куліси CD довжини ланок l_3 , $l_6 = l_{AC}$ (стійки) і $l_1 = l_{AB}$ зв'язані співвідношенням

$$l_3 = l_6 + l_1 + a, \qquad (2.4)$$

де розмір a вибирають конструктивно з метою більш повного використання довжини куліси. З другого боку, з прямокутного ΔABC

$$l_1 = l_6 \, sin(\beta / 2). \qquad (2.5)$$

Підставлення значення l_1 у вираз (2.4) дає довжину стійки (міжосьову відстань)

$$l_6 = (l_3 - a)/[1 + sin(\beta/2)].$$

Після обчислення l_6 можна за формулою (2.5) визначити l_1 ; для механізмів даного типу $l_6 / l_1 \geq 2$.

При ведучому кривошипі кут тиску при передачі зусилля від кулісного повзуна 2 до куліси 3 $\upsilon_{32} = 0$, що є достоїнством кулісних механізмів. Для забезпечення найменших кутів тиску при передачі зусилля від ланки 4 до веденого повзуна 5 доцільно положення осі *xx* вибирати так, щоб вона ділила висоту сегмента f навпіл. Тоді з прямокутного *ΔNDE* довжина ланки 4

$$l_4 = l_{DE} \geq f/(2 \cdot sin\,\vartheta_{доп}),$$

де $f = l_3 - l_3\,cos(\beta / 2)$; в цьому випадку буде забезпечено співвідношення $\upsilon_{max} \leq \upsilon_{доп}$.

Відстань між віссю обертання куліси й віссю направляючої повзуна 5 визначають за формулою

$$b = l_3 - f/2.$$

Використовують і другий варіант двоповодкової групи ланок 4, 5 з двома поступальними та одною обертальною парами. За кутами тиску цей варіант краще попереднього : $\upsilon_{54} = 0$.

Механізм з обертальною кулісою. Схема найбільш часто зустрічаючого варіанту такого механізму зображена на рис.2.6.

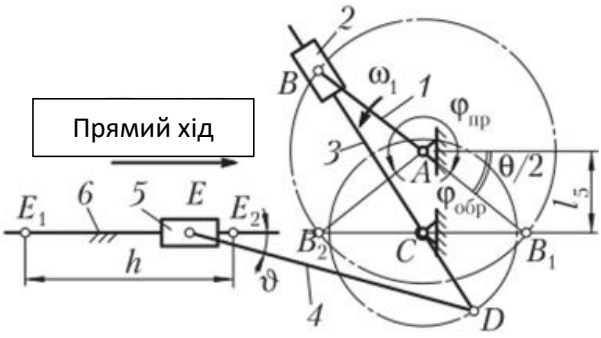


Рисунок 2.6

Вхідні дані: довжина $l_1 = l_{AB}$ кривошипа, хід h повзуна 5 та коефіцієнт зміни його середньої швидкості $K_v = v_{звор} / v_{пр} > 1$.

Прямий хід повзуна 5 здійснюється при повороті кривошипа 1 на кут $\varphi_{пр} = 180^0 + \theta$, зворотний – при повороті кривошипа на кут $\varphi_{звор} = 180^0 - \theta$. Тому при $\omega_1 = const$

$$K_v = \frac{\frac{h}{t_{звор}}}{\frac{h}{t_{пр}}} = \frac{180 + \theta}{180 - \theta},$$

звідки

$$\theta = 180^0 \cdot \frac{K_v - 1}{K_v + 1}.$$

Відстань $l_6 = l_{AC}$ між осями обертання кривошипа 1 і куліси 3 з ΔAB_1C визначається за формулою $l_6 = l_1 \sin(\theta / 2)$; для механізмів даного типу $l_1 / l_6 \geq 2$.

Крайні положення точки E повзуна (E_1 і E_2) визначаються положеннями точки B (B_1 і B_2), коли напрямки куліси 3 і шатуна 4 співпадають, тому довжина кривошипа CD ; $l_{CD} = h / 2$.

Довжина шатуна 4 повинна бути такою, щоб максимальна величина кута тиску $\nu = \nu_{54}$ не перевищувала припустимого значення $\nu_{доп}$, тому $l_4 \geq h / (2 \sin \upsilon_{доп})$.

Подовжувати шатун 4 вище отриманої межі не слід, тому що це збільшить габарити усього механізму. Для отримання найменших зусиль в кулісній парі 2-3 бажано вибирати довжину кривошипа 1 якомога більшою, однак слід враховувати, що при цьому збільшуються габарити механізму.

2.3 Синтез чотириланкових механізмів за двома положеннями ланок

Кривошипно-повзунний механізм. Для центрального кривошипно-повзунного механізму ($e = 0$, Рис.2.7,*а*) хід повзуна 3 (його максимальне переміщення) дорівнює подвійній довжині кривошипа: $h = 2 l_1$. Крайні положення повзуна відповідають кутовим координатам кривошипа $\varphi = 0$ і 180^0.

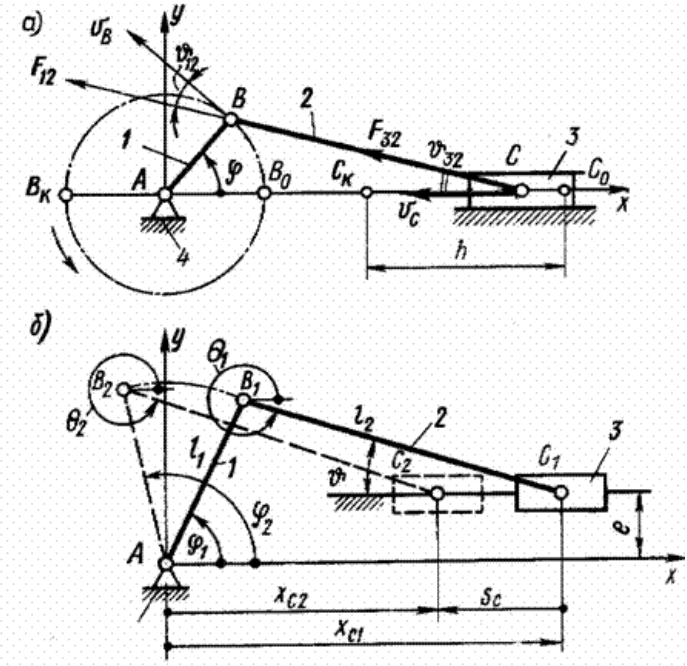


Рисунок 2.7

При проектуванні механізмів треба враховувати вельми важливий параметр, який характеризує умови передачі сил і працездатність механізму, - кут тиску $\boldsymbol{\upsilon}$ (кут між вектором сили, прикладеної до веденої ланки, і вектором швидкості точки прикладення рушійної сили; тертя і прискорений рух мас при цьому поки що не враховуються). Кут тиску не повинен перевищувати припустимого значення: $\boldsymbol{\upsilon_{max} \leq \upsilon_{доп}}$. Кут $\boldsymbol{\upsilon}$ при передачі сили на ведену ланку показують на схемі механізму в залежності від того, яка його ланка є веденою. Якщо нею буде повзун 3, то сила $\bar{F}_{32}$ передається на нього з кутом $\boldsymbol{\upsilon_{32}}$, а якщо кривошип 1, то сила $\bar{F}_{12}$ складе кут $\boldsymbol{\upsilon_{12}}$ з вектором швидкості $\bar{V}_B$.

При веденому кривошипі кут тиску $\boldsymbol{\upsilon_{12}}$ два рази за цикл (коли шатун і кривошип розташовуються по одній прямій) набуває максимального значення, рівного 90^0. Ці положення кривошип проходить тільки завдяки інерції обертальних мас деталей, жорстко зв'язаних з кривошипом 1.

Найбільший кут тиску $\boldsymbol{\upsilon_{32max}}$ визначають шляхом дослідження функції $\boldsymbol{\upsilon_{32} = \upsilon_{32}(\varphi)}$ на максимум. Для центрального механізму ($e = 0$) максимальне значення кута тиску $\boldsymbol{\vartheta_{32\,max}} = arcsin(\boldsymbol{l_1/l_2})$ буде при $\varphi = 90$ або 270^0. Таким чином, чим менше значення $\lambda_2 = l_2 / l_1$, тим менше розміри механізму (по відношенню до довжини кривошипа), але більше кути тиску. Зі зростанням величини $\boldsymbol{\upsilon_{32max}}$, незалежно від того, яка ланка є ведучою, збільшується зусилля між повзуном та направляючою (між поршнем і стінкою циліндра поршневої машини). Тому, наприклад, для механізмів двигунів внутрішнього згоряння відношення λ_2 прийнято вибирати в межах $\lambda_2 = 3…5$, що відповідає значенню $\boldsymbol{\upsilon_{32max}} = 19…11^0$.

Якщо $e \neq 0$,хід повзуна (його максимальне переміщення) з $\Delta AC_1C'_1$ й $\Delta AC_2C'_2$

$$h = l_{C1C2} = \sqrt{(l_1 + l_2)^2 - e^2} - \sqrt{(l_2 - l_1)^2 - e^2}, \qquad (2.6)$$

звідки при заданих h, e і $\lambda_2 = l_2 / l_1$ можна знайти l_1 (наприклад, **методом інтерполяційного наближення** – задаючись рядом значень l_1, близьких до $h/2$, і перевіряючи рівність лівої та правої частин рівняння). Максимальний кут тиску $\boldsymbol{\upsilon_{32max}}$ при $e > 0$ буде в положенні, коли $\varphi_1 = 270^0$; якщо $e < 0$, то при $\varphi_1 = 90^0$.

Метод інтерполяційного наближення (метод інтерполяції) – найпростіший вид наближення функції, при якій значення заданої функції $y = F(x)$ і наближеної функції $y = P(x)$ на відрізку (x_0, x_m) збігаються в κ точках, які називаються вузлами інтерполяції.

Якщо задані два положення кривошипа (Рис.2.6,*б*), які позначені координатами φ_1 та φ_2, переміщення повзуна s_C (з урахуванням знаку: на рис.2.6,*б* $s_C < 0$) і відношення $\lambda_2 = l_2 / l_1$ й $\lambda_e = e / l_1$, то довжини ланок l_2 і l_1 визначають таким чином.

Проектуємо векторне рівняння $\bar{l}_1 + \bar{l}_2 = \bar{e} + \bar{x}_{C12}$ на вісь y , маємо для будь-якого положення $l_1 \cdot sin\,\phi + l_2 \cdot sin\,\theta = e$, звідки кутова координата ланки 2 в положеннях 1 і 2:

$$\theta_{1,2} = arcsin\left[\left(\lambda_e - sin\,\phi_{1,2}\right)/\lambda_2\right].$$

Проектуючи теж векторне рівняння на вісь x, маємо

$$s_C = x_{C2} - x_{C1} = (l_1 \cos\phi_2 + l_2 \cos\theta_2) - (l_1 \cos\phi_1 + l_2 \cos\theta_1),$$

звідки, після підставляння $l_2 = \lambda_2 l_1$, отримаємо

$$l_1 = s_C/[\cos\phi_2 - \cos\phi_1 + \lambda_2(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)].$$

Потім за величиною λ_2 визначають l_2.

Кривошипно - коромисловий механізм (Рис.2.8).

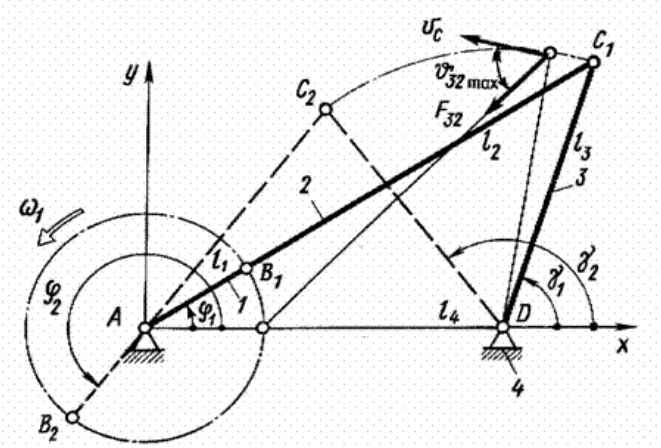


Рисунок 2.8

За заданою довжиною стійки l_4 , довжині веденої ланки – коромисла l_3 з її координатами γ_1 і γ_2 у крайніх положеннях невідомі довжини ланок l_1 і l_2 визначають так. З'єднуючи прямими лініями точки C_1 і C_2 з точкою A, маємо

$$l_{AC_1} = l_1 + l_2; \quad l_{AC_2} = l_2 - l_1,$$

звідки $$l_1 = \frac{(l_{AC_1} - l_{AC_2})}{2}; \qquad l_2 = \left(l_{AC_1} + l_{AC_2}\right)/2. \qquad (2.7)$$

Максимальний кут тиску υ_{32max} буде при $\varphi = 90$ або 180^0.

Механізм з коливальним циліндром (Рис.2.9).

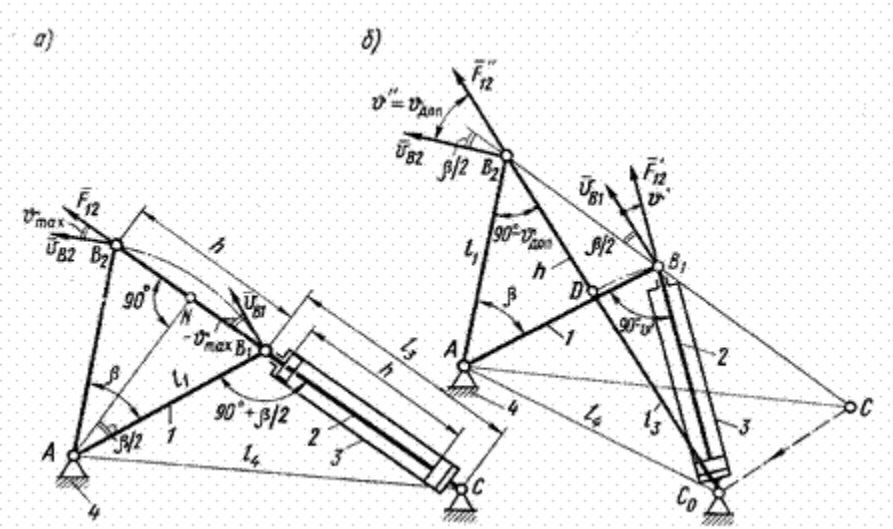


Рисунок 2.9

Цей механізм використовується в гідроприводах. На рис.2.9 він показаний в крайніх положеннях AB_1C і AB_2C. При переході з одного крайнього положення в інше поршень 2 переміщується на відстань h (хід поршня), а ведене коромисло 1 довжиною l_1 повертається на необхідний кут β. Щоб повністю використати циліндр при переміщенні поршня, задаються відношенням довжини циліндра $l_3 \approx l_{B1C}$ до ходу поршня h у вигляді коефіцієнта $k = l_3 / h > 1$, що визначається конструктивно; наприклад, $k = 1.3; 1.4$ і т. д.

Треба також враховувати кут тиску υ як кут між віссю циліндра, по напрямку якої передається зусилля $\bar{F}_{12}$, і вектором швидкості $\bar{V}_B$ точки прикладення сили. Цей кут змінний, тому при проектуванні задаються припустимим кутом тиску $\upsilon_{доп}$, з тим щоб при роботі механізму не перебільшувати його.

Синтез **оптимальної за кутами тиску** схеми такого механізму при заданих l_1, k, β проводиться так (Рис.2.9).

Побудувавши два положення AB_1 і AB_2 веденої ланки 1, приймаємо хід поршня $h = l_{B1B2}$. Відкладемо на продовженні прямої B_2B_1 відрізок $l_3 = l_{B1C} = kh$, і отримаємо точку C. В крайніх положеннях механізму, як це видно з ΔAB_1N й ΔANB_2 , кут тиску за величиною буде максимальним $\upsilon_{max} = \beta/2$.

У всіх інших положеннях кут тиску буде меншим, оскільки при переході точки B з положення B_1 в положення B_2 він змінює свій знак й проходить через нульове значення.

З ΔAB_1N $h = 2l\,sin(\beta/2)$.

З ΔAB_1C довжина стійки

$$l_4 = l_{AC} = \sqrt{l_1^2 + l_3^2 + 2l_1 l_3\,sin\,\beta\,/2}.$$

При невеликих кутах β υ_{max} може бути в даній схемі значно меншим $\upsilon_{доп}$, і цей варіант кінематичної схеми можна поліпшити з точки зору габаритів механізму шляхом зменшення довжини стійки l_4. **Оптимальну за габаритами** схему механізму за умовою $\upsilon_{max} = \upsilon_{доп}$ отримаємо так (Рис.2.9,*б*). Хай задані l_1, k, β, $\upsilon_{доп}$. Креслимо перший варіант схеми. Зміщуємо точку C у нове положення C_0 , для якого кут тиску в положенні 2 механізму збільшиться й досягне значення $\upsilon^{"} = \upsilon_{доп}$. При переміщенні точки C кут тиску в положенні 1 також змінюється: він спочатку зменшується, а потім може, пройшовши через нульове значення, змінити знак і знову збільшитись.

Хід поршня тепер буде $h = l_{B2D} < l_{B1B2}$; його можна знайти, розв'язавши квадратне рівняння, що отримане з $\Delta C_0B_1B_2$ за теоремою косинусів:

$$(B_1C_0)^2 = (B_1B_2)^2 + (C_0B_2)^2 - 2 \cdot B_1B_2 \cdot C_0B_2 \cdot cos(\upsilon_{доп} - \beta/2),$$

де $B_1C_0 = kh$, $B_1B_2 = 2l_1sin(\beta/2)$, $C_0B_2 = kh + h = (k + 1)\,h$.

Розв'язок дає таку формулу

$$h = -b/2 + \sqrt{b^2/4 - c},$$

де $$b = -4l_1(k+1)\,sin(\beta/2)\,cos(\upsilon_{доп} - \beta/2)\,/(2k+1);$$
$$c = [2l_1\,sin(\beta/2)]^2/(2k+1)$$

Після цього визначають $l_3 = kh$ і довжину стійки з ΔAC_0B_2

$$l_4 = \sqrt{l_1^2 + (l_3 + h)^2 - 2l_1(l_3 + h)\,sin\,\vartheta_{доп}}\,.$$

Цей варіант кінематичної схеми є дуже доцільним для випадку, коли треба долати велике навантаження на веденій ланці на початку руху, оскільки кут тиску $\upsilon' < \upsilon'' < \upsilon_{доп}$, в результаті чого збільшується момент рушійної сили $F_{12}^{'}$ відносно вісі А і зменшуються втрати на тертя в кінематичних парах.

Кінематичні пари слід підбирати так, щоб механізм був статично визначеним, або ж, якщо це важко, звести до мінімуму число надлишкових в'язей. В даному випадку механізм буде статично визначеним (без надлишкових в'язей), якщо пара А обертальна, пари В і С сферичні, пара поршень—циліндр циліндрична.

Тоді, враховуючи, що число степенів волі механізму $W = W_0 + W_M = 1 + 2 = 3$ (дві місцеві рухомості — незалежні обертання поршня зі штоком й циліндра відносно власних осей), за формулою Малишева маємо $q = 0$.

2.4 Синтез чотириланкових механізмів за трьома положеннями ланок

Шарнірний чотириланковик. Пусть задані (Рис.2.10,*а*) довжина стійки l_4 , кутові координати ланки 1 у трьох положеннях $\varphi = \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ й відповідні кутові координати вихідної ланки 3 $\gamma = \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Треба визначити довжини ланок l_1 , l_2 , l_3.

Розглянемо векторний контур *ABCDA*, для якого у будь—якому положенні механізму $\bar{l}_1 + \bar{l}_2 = \bar{l}_4 + \bar{l}_3$. Проектуючи цей контур на координатні осі *x* та *y* , маємо

$$l_1 \cos\phi + l_2 \cos\theta = l_4 + l_3 \cos\gamma\,; \qquad (2.8)$$

$$l_1 \sin\phi + l_2 \sin\theta = l_3 \sin\gamma\,. \qquad (2.9)$$

Виключимо кут θ , розв'язавши рівняння (2.8) і (2.9) відносно складових, що мають θ, підносячи отримані рівняння до другої степені і склавши їх:

$$l_2^2 = l_1^2 + l_3^2 + l_4^2 + 2l_3l_4 \cos\gamma - 2l_1l_4 \cos\phi - 2l_1l_3 \cos(\phi - \gamma).$$

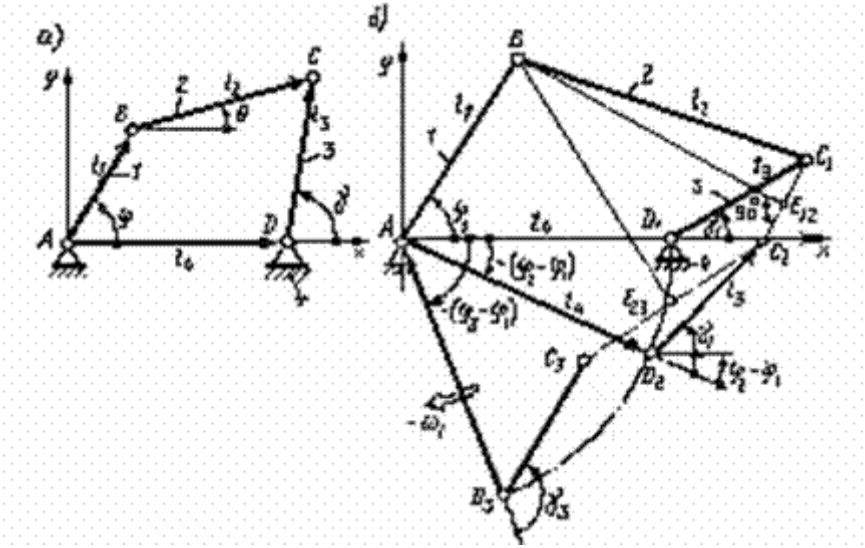


Рисунок 2.10

Після ділення на $2l_3l_4$ і заміни поточних значень кутів φ і γ на задані φ_i і γ_i (індекс i = 2, 2, 3) отримаємо систему трьох лінійних рівнянь

$$\frac{l_1}{l_4}cos(\phi_i - \gamma_i) + \frac{l_1}{l_3}cos\,\phi_i + \frac{l_2^2 - l_1^2 - l_3^2 - l_4^2}{2l_3l_4} = cos\,\gamma_i\,,$$

або

$$p_1\,cos(\phi_i - \gamma_i) + p_2\,cos\,\phi_i + p_3 = cos\,\gamma_i\,, (i = 1{,}2{,}3). \quad (2.10)$$

де невідомими є безрозмірні параметри

$$p_1 = \frac{l_1}{l_4}; \qquad p_2 = \frac{l_1}{l_3}; \qquad p_3 = \frac{l_2^2 - l_1^2 - l_3^2 - l_4^2}{2l_3l_4} \qquad (2.11)$$

З системи (2.10) визначаємо p_1 , p_2 , p_3 , а потім згідно (2.11) визначаємо довжини ланок за формулами

$$l_1 = p_1 l_4; \quad l_3 = \frac{l_1}{p_2}; \quad l_2 = \sqrt{2l_3 l_4 + l_1^2 + l_3^2 + l_4^2}.$$

Задачу синтезу шарнірного чотириланковика за трьома положеннями вихідної ланки і відповідними кутам повороту вхідної ланки розв‘язують методом оберненого руху.

Метод оберненого руху – метод при якому усьому механізмові задаємо обертальний рух з кутовою швидкістю однієї з його ланок. Інші ланки механізму набувають при цьому інших кутових швидкостей, а деякі з них мають нульову кутову швидкість (зупиняються). Це і є метою метода. Використовується при синтезі:

- важільних механізмів при заданих трьох положеннях вихідної ланки;
- багатоланкових зубчатих (планетарних та диференціальних) механізмів;
- кулачкових механізмів, тощо.

В цьому випадку задані довжини ланок l_4 , l_3 , координати вихідної ланки 3 у трьох положеннях γ_1 , γ_2 , γ_3 й кути повороту вхідної ланки ($\varphi_2 — \varphi_1$) і ($\varphi_3 — \varphi_1$). Треба знайти довжини ланок l_1 , l_2 і початкову кутову координату (в положенні 1) φ_1 .

Положення шарніра B за заданими умовами визначають шляхом надання всьому механізмові відносно центра A кутової швидкості (— ω_1). В результаті ланка AB в системі координат Axy стане нерухомою, а замість нього у протилежному напрямку буде обертатись стійка AD_1 (Рис.2.10,*б*). Для другого й третього положень механізму кутовими координатами стійки відносно осі абсцис будуть — ($\varphi_2 — \varphi_1$) та — ($\varphi_3 — \varphi_1$). Положення шарніра C є визначеним відносно стійки і знайдеться шляхом побудови кутів γ_1 , γ_2 , γ_3 (точки C_1 , C_2 , C_3). Довжина шатуна BC для трьох заданих положень одна і та ж ($BC = BC_i$, $i=1, 2, 3$), тому точки C_i повинні находитись на колі, описаному з центра B. Таким чином, положення невідомої точки B визначиться, якщо точки C_i з‘єднати двома прямими C_1C_2 і C_3C_2 , провести через їх середини E_{12} , E_{23} перпендикуляри й знайти точку пересічення останніх. При аналітичному розв‘язку для отримання формул координат x_i, y_i точок C_i кінематичний ланцюг AD_iC_s представлений у вигляді суми двох векторів $\bar{l}_4$ і $\bar{l}_3$. Координати точок C_i визначаються проекціями вказаного векторного ланцюга на координатні осі:

$$x_i = l_4\,cos(\phi_i - \phi_1) + l_3\,cos[\gamma_i - (\phi_i - \phi_1)];$$
$$y_i = -l_4\,sin(\phi_i - \phi_1) + l_3\,sin[\gamma_i - (\phi_i - \phi_1)].$$

Координати точки *B* знайдемо з системи рівнянь кола, яке описане з центра *B* радіусом l_2 :

$$(x_i - x_B)^2 + (y_i - y_B)^2 = l_2^2; \qquad i = 1,2,3. \qquad (2.12)$$

Система (2.12) трьох рівнянь з трьома невідомими x_B, y_B і l_2 після деяких перетворень для виключення x_B^2 і y_B^2 зводиться до лінійної.

По координатах x_B і y_B визначають шукані параметри кінематичної схеми механізму:

довжину вхідної ланки 1

$$l_{AB} = l_1 = \sqrt{x_B^2 + y_B^2}; \qquad (2.13)$$

довжину шатуна *BC*

$$l_{BC} = l_2 = \sqrt{(x_1 - x_B)^2 + (y_1 - y_B)^2} \qquad (2.14)$$

(як відстань між точками $B(x_B, y_B)$ і $C_1(x_1, y_1)$;

початкову кутову координату вхідної ланки

$$\phi_1 = arctg\left(\frac{y_B}{x_B}\right). \qquad (2.15)$$

Кривошипно—повзунний механізм. Проектування схеми даного механізму за трьома положеннями вхідної та вихідної ланок проводять в системі координат *Axy* (Рис.2.11) аналогічно синтезу механізму шарнірного чотириланковика.

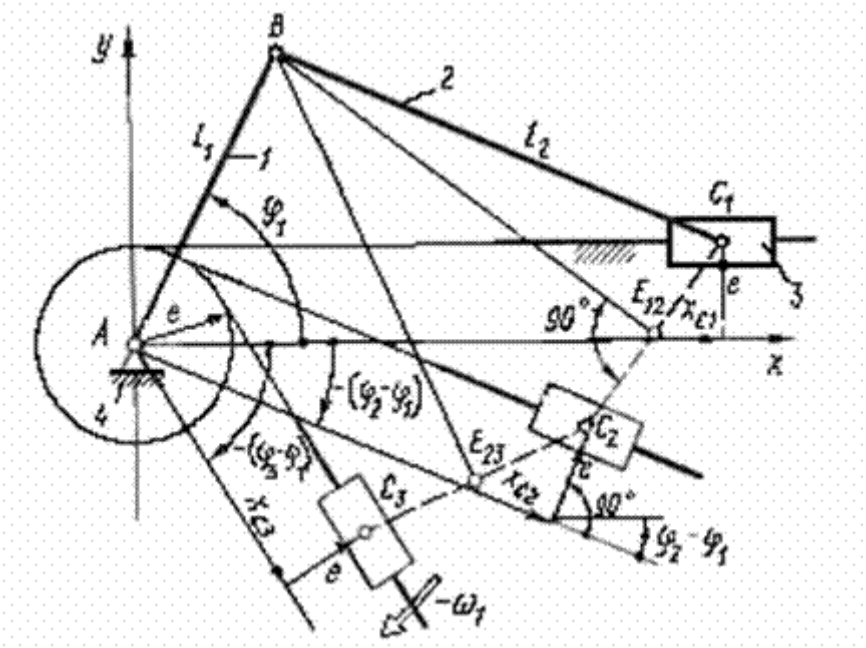


Рисунок 2.11

Задача зводиться до визначення невідомих довжин ланок l_1 і l_2 , а також початкової кутової координати φ_1 ланки 1 при заданих позавісності (ексцентриситеті) e , трьох лінійних координатах точки C повзуна x_{C1}, x_{C2}, x_{C3} і кутах повороту ланки 1 відносно його початкового (першого) положення $(\varphi_2 — \varphi_1)$ і $(\varphi_3 — \varphi_1)$.

Щоб визначити положення шарніра B за цими умовами, застосуємо **метод оберненого руху**, надаючи всьому механізмові відносно центра A кутову швидкість $(—\omega_1)$. В результаті ланка AB стане нерухомою, а замість неї у протилежному напрямку буде обертатись стійка і вісь направляючої повзуна. Якщо $e \neq 0$, то ця вісь у всіх положеннях є дотичною кола радіусом e.

Графічно центр шарніра B находять як точку пересічення перпендикулярів BE_{12} і BE_{23} до середин відрізків C_1C_2 і C_2C_3 .

При аналітичному розв‘язку визначають координати x_i, y_i точок повзуна C_i (індекс $i = 1, 2, 3$) з рівнянь проекцій на координатні осі суми векторів $\bar{x}_{Ci} + \bar{e}$:

$$x_i = x_{Ci}\, cos[-(\phi_i - \phi_1)] + e\, cos[90^0 - (\phi_i - \phi_1)]\,;$$

$$y_i = x_{Ci}\, sin[-(\phi_i - \phi_1)] + e\, sin[90^0 - (\phi_i - \phi_1)],$$

або після перетворень

$$x_i = x_{Ci}\, cos(\phi_i - \phi_1) + e\, sin(\phi_i - \phi_1);$$
$$y_i = x_{Ci}\, sin(\phi_i - \phi_1) + e\, cos(\phi_i - \phi_1).$$

Подальший розв‘язок аналогічний розв‘язку чотири ланкового механізму за формулами (2.12) — (2.15).

3. АНАЛІТИЧНА КІНЕМАТИКА. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ

Аналітичний метод кінематичного дослідження ґрунтується на методі **В.Я.Зинов'єва**[7], згідно якого механізм, складений із замкненого кінематичного ланцюга з нижчими кінематичними парами, зображається як замкнений векторний контур або система векторних контурів.

$$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \cdots + \vec{L}_n = 0, або \quad L_1 \cdot \vec{e}_1 + L_2 \cdot \vec{e}_2 + \cdots + L_n \cdot \vec{e}_n = 0, (3.1)$$

де $\vec{e}_i$ одиничні орти векторів $\vec{L}_i$, які також можна визначити через орти $\vec{\imath}$ і $\vec{\jmath}$ прямокутної системи координат.

Кожен вектор має своїм початком і кінцем кінематичні пари, до яких надходить кожна ланка. Таким чином величина (розмір) ланки може бути як постійною так і змінною. Напрямок кожного вектора визначається кутом, відрахованим від додатного напрямку вісі *x* обраної системи координат до додатного напрямку вектора проти руху годинникової стрілки. **Умова замкненості контуру** записується:

$$\vec{e}_m = \vec{\imath} \cdot Cos\alpha_m + \vec{\jmath} \cdot Sin\alpha_m$$

Диференціюючи це рівняння по узагальненій координаті α_1, маємо:

$$\vec{e}_m' = \frac{d\vec{e}_m}{d\alpha_1} = -\vec{\imath} \cdot Sin\alpha_m \cdot \frac{d\alpha_m}{d\alpha_1} + \vec{\jmath} \cdot Cos\alpha_m \cdot \frac{d\alpha_m}{d\alpha_1},$$

або

$$\vec{e}_m' = (-\vec{\imath} \cdot Sin\alpha_m \cdot + \vec{\jmath} \cdot Cos\alpha_m) \cdot \frac{d\alpha_m}{d\alpha_1} \qquad (3.2)$$

Вираз $\dfrac{d\alpha_m}{d\alpha_1} = \dfrac{d\alpha_m}{d\alpha_1} \cdot \dfrac{dt}{dt} = \dfrac{\omega_m}{\omega_1}, або \dfrac{ds_m}{d\alpha_1} = \dfrac{ds_m}{d\alpha_1} \cdot \dfrac{dt}{dt} = \dfrac{V_m}{\omega_1}$

[7] Вяч.А.Зінов'єв (1899-1975) запропонував метод замкнутого векторного контуру – метод кінематичного аналізу, при якому положення кожної ланки визначається зв'язаним з ним вектором так, що послідовність цих векторів утворює один або декілька замкнутих векторів. Умова замкнутості векторних контурів для плоского механізму дає можливість визначати його кінематичні характеристики.

зветься **передаточною функцією** або аналогом кутової (лінійної) швидкості.

Передаточною функцією називається відношення кутової швидкості будь-якої ланки, лінійної швидкості будь-якої точки або її проекції на вісь координат, до швидкості ланки зведення (узагальненої швидкості).

Передаточні функції, які є відношенням кутових швидкостей, або лінійних швидкостей (якщо узагальнена координата лінійна) – **безрозмірні** і позначаються як U_{m1} або U_m, де m – номер ланки для якої визначається передаточна функція.

Передаточні функції, які є відношенням лінійних швидкостей до кутових, або навпаки (якщо узагальнена координата лінійна) –**розмірні** і позначаються як V_{m1} або V_m. Розмірність таких передаточних функцій – метр, або метр$^{-1}$.

Визначимо скалярний добуток одиничних векторів або їх похідних:

$$\vec{e}_m' \cdot \vec{e}_n = (-\vec{\imath} \cdot Sin\alpha_m + \vec{\jmath} \cdot Cos\alpha_n) \cdot U_{m1} \cdot (\vec{\imath} \cdot Cos\alpha_m + \vec{\jmath} \cdot Sin\alpha_n) = \\ = Sin(\alpha_m - \alpha_n) \cdot U_{m1} \quad (3.3)$$

$$\vec{e}_m \cdot \vec{e}_n = (\vec{\imath} \cdot Cos\alpha_m + \vec{\jmath} \cdot Sin\alpha_n) \cdot (\vec{\imath} \cdot Cos\alpha_m + \vec{\jmath} \cdot Sin\alpha_n) = \\ = Cos(\alpha_m - \alpha_n) \quad (3.4)$$

Ці залежності використовуються для визначення передаточних функцій різних механізмів.

$$\vec{e}_m' \cdot \vec{e}_n' = (-\vec{\imath} \cdot Sin\alpha_m + \vec{\jmath} \cdot Cos\alpha_m) \cdot U_{m1} \cdot \\ \cdot (-\vec{\imath} \cdot Sin\alpha_n + \vec{\jmath} \cdot Cos\alpha_n) \cdot U_{n1} = \\ Cos(\alpha_m - \alpha_n) \cdot U_{m1} \cdot U_{n1} \quad (3.5)$$

Крім передаточних функцій є ще **функції положення**. Функції положення це відношення координати, що визначає положення будь-якої ланки або точки будь-якої ланки, до узагальненої координати.Це дуже важливі функції, тому що з них можна отримати також і передаточні функції.

Метою аналітичної кінематики є здобуття функцій положення і передаточних функцій.

3.1 Аналітична кінематика шарнірного чотириланковика

Шарнірний чотириланковик (Рис.3.1) є дуже поширеним механізмом. За цією схемою побудовані механізми пресів, конвеєрів, верстатів, тощо.

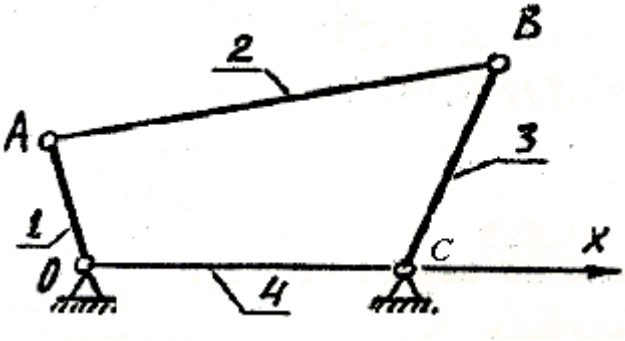


Рисунок 3.1

Перетворимо механізм чотириланковика на векторний чотирикутник (Рис. 3.2). Координатну вісь *x* проведемо через нерухомі кінематичні пари O і O_1. Позначимо на малюнку вектори. Початком і кінцем кожного вектора є кінематичні пари, якими ланка приєднується до інших ланок. Напрямки векторів треба показувати таким чином, щоб сума одних векторів дорівнювала сумі інших у замкнутому векторному многокутнику.

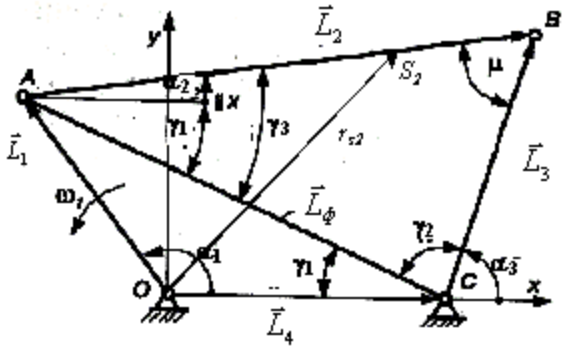


Рисунок 3.2

Положення кожного вектора визначається кутом α_i , який вимірюється від осі *x* до відповідного вектора проти руху годинникової стрілки.

Розіб'ємо чотириланковий контур на два векторних трикутника додатковим фіктивним вектором $\vec{L}_\phi = \overrightarrow{CA}$. Крім кутів α_1, α_2 і α_3 уведемо додатково кути γ_1, γ_2 і γ_3.

За теоремою косинусів визначимо:

$$L_\phi = \sqrt{L_4^2 + L_1^2 - 2L_4L_1Cos\alpha_1};$$

$$\gamma_i = arcCos\left(\frac{L_j^2 + L_\phi^2 - L_1^2}{2L_jL_\phi}\right)$$

де i = 1, 2, 3; j = 5 – 1.

Тоді для значення кута $\pi > \alpha_1 > 0$: $\alpha_2 = \gamma_3 - \gamma_1$ і $\alpha_3 = \pi - \gamma_1 - \gamma_2$.

Для значення кута $2\pi > \alpha_1 > \pi$: $\alpha_2 = \gamma_3 + \gamma_1$ і $\alpha_3 = \pi + \gamma_1 - \gamma_2$.

Див. Рис.3.3.

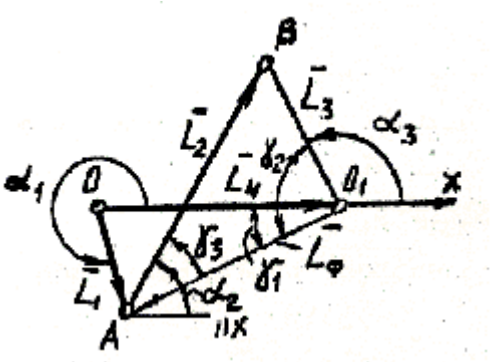


Рисунок 3.3

Таким чином ми бачимо, що треба уважно ставитись до визначення кутів α_2 і α_3 при різних значеннях кута α_1, тобто при різних положеннях механізму.

Для визначення передаточних функцій використаємо залежності :

$$L_1 \cdot \vec{e}_1 + L_2 \cdot \vec{e}_2 = L_4 \cdot \vec{e}_4 + L_3 \cdot \vec{e}_3, \qquad (3.6)$$

Диференціюючи це рівняння по узагальненій координаті α_1, маємо:

$$L_1 \cdot \vec{e}_1^{'} + L_2 \cdot \vec{e}_2^{'} = L_3 \cdot \vec{e}_3^{'}. \quad (3.7)$$

Помножимо це рівняння скалярно на вектор-орт $\vec{e}_3$. Маємо:

$L_1 \cdot \vec{e}_1^{'} \cdot \vec{e}_3 + L_2 \cdot \vec{e}_2^{'} \cdot \vec{e}_3 = L_3 \cdot \vec{e}_3^{'} \cdot \vec{e}_3 = 0$, тому що $\vec{e}_3^{'} \cdot \vec{e}_3 = 0$ (див.(1.3)).

Підставимо значення скалярних добутків.

$L_1 Sin(\alpha_1 - \alpha_3) \cdot U_{11} + L_2 Sin(\alpha_{1\backslash 2} - \alpha_3) \cdot U_{21} = 0.$ Тут $U_{11} = 1.$

Тоді

$$U_{21} = -\frac{L_1 Sin(\alpha_1 - \alpha_3)}{L_2 Sin(\alpha_2 - \alpha_3)} \quad (3.8)$$

Помножимо рівняння (3.7) скалярно на вектор-орт $\vec{e}_2$.

$L_1 \cdot \vec{e}_1^{'} \cdot \vec{e}_2 + L_2 \cdot \vec{e}_2^{'} \cdot \vec{e}_2 = L_3 \cdot \vec{e}_3^{'} \cdot \vec{e}_2$, або $L_1 \cdot \vec{e}_1^{'} \cdot \vec{e}_2 = L_3 \cdot \vec{e}_3^{'} \cdot \vec{e}_2$.

Підставимо значення скалярних добутків.

$$L_1 Sin(\alpha_1 - \alpha_2) = L_3 Sin(\alpha_3 - \alpha_2) \cdot U_{31}$$

$$U_{31} = \frac{L_1 Sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{L_3 Sin(\alpha_3 - \alpha_2)} \quad (3.9)$$

Для будь-якої точки, наприклад для точки S_2, можна записати:

$$\vec{r}_{s2} = L_1 \cdot \vec{e}_1 + L_{AS2} \cdot \vec{e}_2 \, . \quad (3.10)$$

Проектуючи це рівняння на осі координат, визначимо положення для цієї точки:

$X_{S2} = L_1 \cdot Cos\alpha_1 + L_2 \cdot Cos\alpha_2, \;\; Y_{S2} = L_1 \cdot Sin\alpha_1 + L_2 \cdot Sin\alpha_2$

Диференціюємо рівняння (3.10) по узагальненій координаті α_1:

$$\frac{d\vec{r}_{S2}}{d\alpha_1} = \vec{V}_{qS2} = L_1 \cdot \vec{e}_1^{'} + L_{AS2} \cdot \vec{e}_2^{'}$$

Передаточні функції для точки S_2 в проекціях на осі координат:

$$V_{qS2x} = -L_1 \cdot Sin\alpha_1 - L_{AS2} \cdot Sin\alpha_2 \cdot U_{21},$$
$$V_{qS2y} = L_1 \cdot Cos\alpha_1 + L_{AS2} \cdot Cos\alpha_2 \cdot U_{21}. \quad (3.11)$$

Повна передаточна функція:

$$V_{qS2} = \sqrt{V_{qS2x}^2 + V_{qS2y}^2} \qquad (3.12)$$

Аналогічно можна визначити передаточні функції для будь-якої іншої точки механізму.

3.2 Аналітична кінематика кривошипно–повзунного механізму

Кривошипно-повзунний механізм показано на Рис. 3.4.

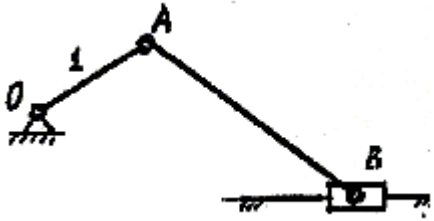


Рисунок 3.4

Перетворимо його на векторний многокутник (Рис.3.5) і запишемо умову замкнутості контуру:

$$L_1 \cdot \vec{e}_1 + L_2 \cdot \vec{e}_2 + L_4 \cdot \vec{e}_4 = L_3 \cdot \vec{e}_3 \qquad (3.13)$$

Тут треба зазначити, що у добутку $L_3 \cdot \vec{e}_3$- обидва параметри є змінними.

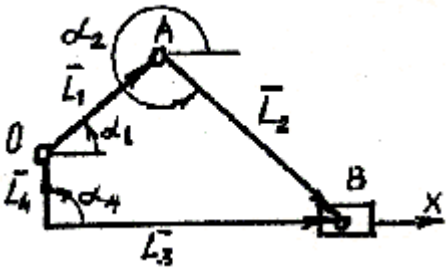


Рисунок 3.5

Для визначення функцій положення проектуємо рівняння (1.13) на осі прямокутної системи координат. Врахуємо також те, що $\alpha_4 = \pi/2$ і $\alpha_3 = 0$. Тоді:

$$L_1 \cdot Cos\alpha_1 + L_2 \cdot Cos\alpha_2 = L_3, \qquad L_1 \cdot Sin\alpha_1 + L_2 \cdot Sin\alpha_2 + L_4 = 0$$

Звідси:

$$X_3 = L_3 \qquad \text{і} \qquad \alpha_2 = arcSin\left(-\frac{L_1 \cdot Sin\alpha_1 + L_4}{L_2}\right). \quad (3.14)$$

Диференціюємо рівняння (3.13) по узагальненій координаті α_1:

$$L_1 \cdot \vec{e}_1' + L_2 \cdot \vec{e}_2' = L_3' \cdot \vec{e}_3. \quad (3.15)$$

Врахуємо рівняня (3.2) і запишемо рівняння (3.15) у проекціях на осі координат:

$$L_3' = V_{q3x} = V_{q3} = -L_1 \cdot Sin\alpha_1 - L_2 \cdot Sin\alpha_2 \cdot U_{21} \quad (3.16)$$
$$L_1 \cdot Cos\alpha_1 + L_2 \cdot Cos\alpha_2 \cdot U_{21} = 0.$$

$$U_{21} = -\frac{L_1 \cdot Cos\alpha_1}{L_2 \cdot Cos\alpha_2}. \quad (3.17)$$

3.3 Аналітична кінематика кулісного механізму

Кулісний механізм має у своєму складі повзун (ланка 2), який знаходиться у складному русі – переносному разом з ланкою 3 і відносному по відношенню до тієї ж ланки (див. рис. 3.6). Одночасно, враховуючи її нульовий розмір, абсолютний рух повністю співпадає з рухом точки А ланки 1.

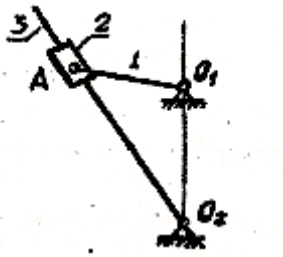


Рисунок 3.6

Перетворимо механізм на векторний трикутник (див. рис.3.7) і запишемо умову замкненості контуру:

$$L_1 \cdot \vec{e}_1 + L_4 \cdot \vec{e}_4 = L_2 \cdot \vec{e}_2$$

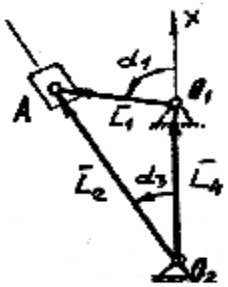


Рисунок 3.7

Проектуємо це рівнянн я на осі координат:

$$L_4 + L_1 \cdot Cos\alpha_1 = L_2 \cdot Cos\alpha_2,\ \ L_1 \cdot Sin\alpha_1 = L_2 \cdot Sin\alpha_2.$$

З цих рівнянь визначаємо:

$$L_2 = \sqrt{L_1^2 + L_4^2 + 2L_1L_4Cos\alpha_1},$$

$$\alpha_2 = arcSin\left(L_1 \cdot \frac{Sin\alpha_1}{L_2}\right). \qquad (3.18)$$

Диференціюємо рівняння замкненості контуру по узагальненій координаті α_1. Маємо:

$$L_1 \cdot \vec{e}_1^{'} = L_2^{'} \cdot \vec{e}_3 + L_2 \cdot \vec{e}_3^{'} \qquad (3.19)$$

Помножимо це рівняння скалярно на вектор-орт $\vec{e}_3$.

$$L_1 \cdot \vec{e}_1^{'} \cdot \vec{e}_3 = L_2^{'} \cdot \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 + L_2 \cdot \vec{e}_3^{'} \cdot \vec{e}_3 = L_2^{'} = V_{q2}$$

Помножимо рівняння (1.19) скалярно на вектор-орт $\vec{e}_3^{'}$.

$$L_1 \cdot \vec{e}_1^{'} \cdot \vec{e}_3^{'} = L_2^{'} \cdot \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3^{'} + L_2 \cdot \vec{e}_3^{'} \cdot \vec{e}_3^{'} = L_2^{'} \cdot U_{31}^2$$

Звідси:

$$U_{31} = \frac{L_1 \cdot Cos\alpha_1}{L_2}.$$

4. ГРАФІЧНІ МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕДАТОЧНИХ ФУНКЦІЙ

План швидкостей це векторний многокутник, в якому усі абсолютні швидкості виходять з однієї точки (полюса), а кінці їх з'єднані відносними швидкостями.

План прискорень**,** це векторний многокутник, в якому усі абсолютні прискорення виходять з однієї точки (полюса), а кінці їх з'єднані відносними прискореннями (або їх складовими).

Нормальне прискорення це проекція повного прискорення точки на головну нормаль. Нормальне прискорення визначає зміну вектора швидкості за напрямком, тому воно завжди направлене до центра абсолютного або відносного обертання. Величина нормального прискорення визначається за формулою: $a_{BA}^{n} = \omega_{BA}^{2} \cdot l_{BA} = V_{BA}^{2}/l_{BA}$.

Тангенціальне прискорення це проекція повного прискорення на дотичну. Тангенціальне прискорення визначає зміну вектора швидкості за величиною. Тангенціальне прискорення направлене по дотичній до траєкторії руху точки. Величина тангенціального прискорення визначається за формулою: $a_{BA}^{t} = \varepsilon_{BA} \cdot l_{BA}$

Масштабний коефіцієнт це відношення будь-якої фізичної величини, яку ми хочемо зобразити на кресленні, до величини відрізка у мм, яким ми зображаємо цю фізичну величину.

Теорема подібності**:** відрізки прямих ліній, що з'єднують точки однієї і тієї ж ланки на плані механізму і відрізки прямих ліній, що з'єднують кінці векторів абсолютних швидкостей або прискорень на планах швидкостей або прискорень, утворюють подібні та стосовно розташовані фігури.

Переносний рух це:

- рух твердого тіла, відносно якого рухається ще одне тіло не відриваючись від нього;
- рух, який здійснює рухома система з усіма незмінно зв'язаними з нею точками простору по відношенню до нерухомої системи.

Відносний рух це:

- рух твердого тіла по будь-якому іншому тілу не відриваючись від нього;

- рух, який здійснює точка, по відношенню до рухомої системи координат.

-

4.1 Механізм шарнірного чотириланковика

Побудуємо **план швидкостей** для механізму (Рис. 4.1) повернутий на 90^0 з масштабним коефіцієнтом $\mu_V = \omega_1$. Тоді $pa \cdot \mu_V = V_A = \omega_1 \cdot OA \;\; i \;\; pa = OA$.

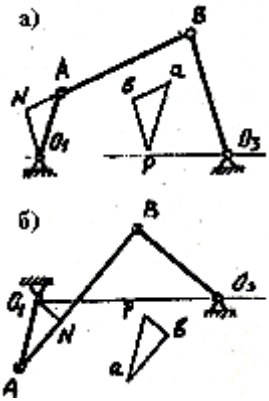


Рисунок 4.1

Поєднаємо план швидкостей з планом механізму. Передаточні функції:

$$U_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{ab \cdot \mu_V}{AB} \cdot \frac{O_1A}{pa \cdot \mu_V} = \frac{ab}{AB} = \pm\frac{AN}{AB}.$$

$$U_{31} = \frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{pb \cdot \mu_V}{O_3B} \cdot \frac{O_1A}{pa \cdot \mu_V} = \pm\frac{O_1N}{O_3B}$$

Знак “+” ставимо у разі збігу напрямків відрізків O_1N і O_3B, та коли відрізок AN є продовженням ланки AB.

4.2 Кривошипно-повзунний механізм

Для кривошипно-повзунного механізму будуємо план швидкостей сумісний з планом механізму тільки повернутий на 90^0 (Рис. 4.2).

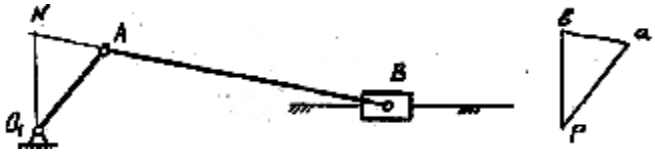


Рисунок 4.2

Передаточні функції

$$U_{21} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{ab \cdot \mu_V}{AB} \cdot \frac{O_1A}{pa \cdot \mu_V} = \frac{ab}{AB} = \pm\frac{AN}{AB}.$$

$$V_{q31} = \frac{pb \cdot \mu_V \cdot O_1A}{pa \cdot \mu_V} = pb = \pm O_1N$$

Як у прикладі 4.1, $\mu_V = \omega_1$. Правило знаків таке ж.

4.3 Кулісний механізм

Аналогічно попереднім прикладам будуємо повернутий на 90^0 план швидкостей (Рис. 4.3), доповнюємо його до прямокутника (дивись пунктирними лініями).

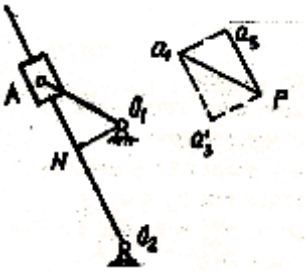


Рисунок 4.3

Масштабний коефіцієнт $\mu_V = \omega_1$. Тоді

$$pa \cdot \mu_V = V_A = \omega_1 \cdot OA \text{ і } \quad pa = OA$$

Накладаємо трикутник pa_1a_3' на план механізму і визначаємо передаточні функції:

$$U_{21} = U_{31} = \frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{pa_3 \cdot \mu_V}{O_2A} \cdot \frac{O_1A}{pa_1 \cdot \mu_V} = \pm\frac{AN}{O_2A};$$

$$V_{q21} = \frac{pa_3' \cdot \mu_V \cdot O_1A}{pa_1 \cdot \mu_V} = \pm O_1N$$

Правило знаків таке ж, як і у попередніх прикладах.

4.4 Формули переходу при визначенні передаточних функцій складних механізмів

На рисунку 4.4 показано механізм, який складається з двох простих механізмів – шарнірного чотириланковика і кривошипно-повзунного.

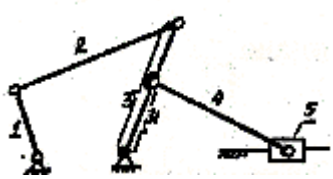


Рисунок 4.4

Для визначення передаточних функцій запишемо

$$U_{43} = \frac{\omega_4}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_1}{\omega_1} = \frac{\omega_4}{\omega_1} \cdot \frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{U_{41}}{U_{31}}, \text{ або } U_{41} = U_{43} \cdot U_{31}$$

$$V_{q53} = \frac{V_5}{\omega_3} \cdot \frac{\omega_1}{\omega_1} = \frac{V_5}{\omega_1} \cdot \frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{V_{q51}}{U_{31}}, \quad V_{q51} = V_{q53} \cdot U_{31}$$

Таким чином ми бачимо, що передаточні функції складних механізмів дорівнюють добутку передаточних функцій простих механізмів. Це правило стосується не тільки стержневих механізмів, а і зубчатих і інших.

4.5 Визначення швидкостей і прискорень точок та ланок механізмів

Для обчислення усіх швидкостей і прискорень, як кутових так і лінійних, складемо матрицю передаточних функцій:

$$PF(I,J,K) = \begin{Vmatrix} U_{11} & V_{qS1X} & V_{qS1Y}. \\ U_{21} & V_{qS2X} & V_{qS2Y}. \\ U_{31} & V_{qS3X} & V_{qS3Y}. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_{n1} & V_{qSnX} & V_{qSnY}. \end{Vmatrix} \quad (4.1)$$

Цю матрицю можна отримати прямим внесенням до неї передаточних функцій, або диференціюючи матрицю функцій положення:

$$FP(I,J,K) = \begin{Vmatrix} \alpha_1 & X_{S1} & Y_{S1}. \\ \alpha_2 & X_{S2} & Y_{S2}. \\ \alpha_3 & X_{S3} & Y_{S3}. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n & X_{Sn} & Y_{Sn}. \end{Vmatrix} \quad (4.2)$$

Диференціювання можна проводити за формулою:

$$Z' = \frac{Z(\alpha_1 + \Delta\alpha) - Z(\alpha_1 - \Delta\alpha)}{2 \cdot \Delta\alpha}, \text{де} \quad Z = FP(I,J,K) \quad (4.3)$$

$$Z' = \frac{d[FP(I,J,K)]}{d\alpha_1} = PF(I,J,K) \quad (4.4)$$

Похідна передаточної функції, або друга похідна функції положення може бути розрахована за формулою:

$$Z'' = \frac{Z(\alpha_1 + \Delta\alpha) - 2 \cdot Z(\alpha_1) + Z(\alpha_1 - \Delta\alpha)}{\Delta\alpha^2} = PF1(I,J,K) \quad (4.5)$$

Для нормальної точності розрахунків значення $\Delta\alpha$ приймається рівним одному градусу, або $\pi/180$ рад.

Усі швидкості визначаються за формулою:

$$V(I,J,K) = PF(I,J,K) \cdot \omega_1 = \begin{Vmatrix} \omega_1 & V_{S1X} & V_{S1Y}. \\ \omega_2 & V_{S2X} & V_{S2Y}. \\ \omega_3 & V_{S3X} & V_{S3Y}. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \omega_n & V_{SnX} & V_{SnY}. \end{Vmatrix} \quad (4.6)$$

Прискорення точок і ланок механізму визначаються формулою:

$$A(I,J,K) = PF1(I,J,K) \cdot \omega_1^2 + PF(I,J,K) \cdot \varepsilon_1 \qquad (4.7)$$

Матриця прискорень має вигляд:

$$A(I,J,K) = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1 & a_{S1X} & a_{S1Y}. \\ \varepsilon_2 & a_{S2X} & a_{S2Y}. \\ \varepsilon_3 & a_{S3X} & a_{S3Y}. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon_n & a_{SnX} & a_{SnY}. \end{Vmatrix} \qquad (4.8)$$

5. ГРАФОАНАЛІТИЧНА КІНЕМАТИКА СТЕРЖНЕВИХ МЕХАНІЗМІВ

Графоаналітичний метод базується на теоремах кінематики про швидкість та прискорення точок твердого тіла у плоскому або складному русі і на теоремі подібності.

З структурного аналізу знаємо, що механізми можуть бути другого або третього класів в залежності від того, які групи Ассура входять до його складу. Від цього залежать і методи вирішення задач кінематики. Тому ми будемо розглядати окремо кінематику механізмів другого і третього класів

5.1 Графоаналітична кінематика механізмів другого класу

Графоаналітичний метод буде розглянуто на конкретних прикладах шарнірного чотириланкового, кривошипно-повзунного та кулісного механізмів.

5.1.1 Графоаналітична кінематика кривошипно-повзунного механізму. Графоаналітичне дослідження проводиться для фіксованого положення механізму, визначеного кутом α_1 ведучої ланки Рис.5.1.

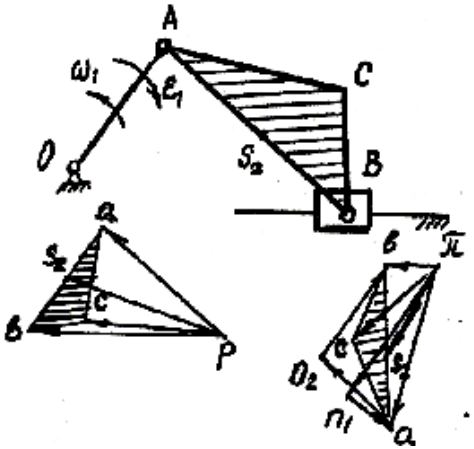


Рисунок 5.1

Вважаємо відомими розміри ланок, їх положення, кутові швидкість і прискорення ведучої ланки (узагальнені швидкість і прискорення).

Лінійна швидкість точки А визначається за формулою:

$$V_A = \omega_1 \cdot l_{OA}.$$

Вектор $\vec{V}_A$ діє у напрямку кутової швидкості ω_1 перпендикулярно ланці ОА (дотично до траєкторії точки А).

Для визначення швидкості точки В запишемо векторне рівняння відповідно до теореми про складання швидкостей точок твердого тіла у його плоскому русі:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} \qquad (5.1)$$

Вектор $\vec{V}_B$ направлений вздовж напрямляючої руху повзуна 3, а вектор $\vec{V}_{BA}$ - перпендикулярно ланці АВ. Величини цих векторів невідомі. Розв'яжемо рівняння (5.1) графічно. З довільно обраного полюса p проведемо промінь у напрямку вектора $\vec{V}_A$ на якому відкладемо відрізок $pa = V_A/\mu_V$, де μ_V - **масштабний коефіцієнт** побудови **плану швидкостей**. З точки *a* проведемо лінію паралельну вектору $\vec{V}_{BA}$ до пересічення з лінією, проведеною з точки *p* паралельно вектору $\vec{V}_B$. Точку пересічення позначаємо літерою *в*.

Для визначення швидкості точки С запишемо рівняння:

$$\vec{V}_C = \vec{V}_A + \vec{V}_{CA} = \vec{V}_B + \vec{V}_{CB} \qquad (5.2)$$

З точки *a* плану швидкостей проводимо лінію перпендикулярну відрізку АС плану механізму (вектор $\vec{V}_{CA} \perp$ СА) до пересічення з лінією, проведеною з точки *в* перпендикулярно до вілрізка ВС (вектор $\vec{V}_{CB} \perp$ СВ). Точку пересічення позначимо літерою *c* і з'єднаємо її з полюсом *p* (дивись рис. 5.1).

Можна використати теорему подібності згідно якої:

$$\frac{ac}{ab} = \frac{AC}{AB}; \quad \frac{bc}{ab} = \frac{BC}{AB}$$

Звідси визначити відрізки *ac* і *вс* плану швидкостей і побудувати на ньому трикутник $\Delta abc \infty \Delta ABC$. Букви трикутника на плані механізму і на плані швидкостей повинні читатись в одній послідовності.

Лінійні швидкості визначимо за формулами:

$$V_{BA} = ab \cdot \mu_V, \quad V_B = pb \cdot \mu_V, \quad V_C = pc \cdot \mu_V.$$

Кутова швидкість ланки 2: $\omega_2 = V_{BA}/l_{BA}$

Напрямок кутової швидкості визначається так: вектор $\vec{V}_{BA}$ умовно переносимо у точку В ланки 2 плана механізму і дивимось куди він буде обертати ланку відносно точки А. Це і є напрямок кутової швидкості ланки 2.

Прискорення точки А ведучої ланки 1 визначимо за формулою:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{AO} = \vec{a}^n_{AO} + \vec{a}^t_{AO}, \qquad (5.3)$$

де $\vec{a}^n_{AO}$ - **нормальне прискорення** точки А в обертальному русі навколо точки О, $\vec{a}^t_{AO}$ - **тангенціальне прискорення** точки А в обертальному русі навколо точки О.

Як відомо з теоретичної механіки, нормальне прискорення завжди направлене до центра обертання або до прийнятого полюса. Тому напрямок нормального прискорення завжди відомий. Тут вектор $\vec{a}^n_{AO}$ направлений від точки А до точки О. Тангенціальне прискорення направлене перпендикулярно нормальному у бік кутового прискорення.

Величина нормального прискорення визначається за формулою:

$$a^n_{AO} = \omega_1^2 \cdot l_{OA} = V^2_{AO}/l_{AO}.$$

Величина дотичного прискорення визначається за формулою:

$$a^t_{AO} = \varepsilon_1 \cdot l_{OA}.$$

Рівняння (5.3) розв'язуємо графічно – побудовою **плану прискорень**. Для цього з точки π - полюса плану прискорень, проводимо промінь у напрямку вектора $\vec{a}^n_{AO}$ і на ньому відкладаємо відрізок $\pi n_1 = a^n_{AO}/\mu_a$, де μ_a – **масштабний коефіцієнт** побудови

плану прискорень. З точки n_1 у напрямку вектора $\vec{a}_{AO}^{t}$ відкладаємо відрізок $n_1 a = a_{AO}^{t}/\mu_a$. Точку a з'єднуємо з полюсом π. Повне прискорення точки А на плані прискорень виражається відрізком πa: $a_{AO} = a_A = \pi a \cdot \mu_a$.

Прискорення точки В визначимо згідно з теоремою про складання прискорень точок твердого тіла у плоскому русі:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{n} + \vec{a}_{BA}^{t}. \qquad (5.4)$$

У цьому рівнянні невідомими є величини векторів $\vec{a}_B$ і $\vec{a}_{BA}^{t}$. Розв'язуємо рівняння (5.4) графічно. З точки a у напрямку вектора $\vec{a}_{BA}^{n}$, тобто від точки В до точки А, проводимо промінь, на якому відкладаємо відрізок $an_2 = \vec{a}_{BA}^{n}/\mu_a = \omega_2^2 \cdot l_{AB}/\mu_a$. З точки n_2 проведемо лінію перпендикулярну ланці АВ ($\vec{a}_{BA}^{t} \perp AB$) до пересічення з лінією проведеною з полюса π паралельно напрямку руху повзуна 3 – вектора $\vec{a}_B$. Точку пересічення позначимо літерою $в$ і з'єднаємо її з полюсом.

З плану прискорень визначаємо:

$$a_{BA}^{t} = n_2 b \cdot \mu_a = \varepsilon_2 \cdot l_{AB}, \quad a_B = \pi b \cdot \mu_a.$$

Кутове прискорення ланки 2: $\varepsilon_2 = a_{BA}^{t}/l_{AB}$.

Для визначення напрямку кутового прискорення вектор $\vec{a}_{BA}^{t}$ з плану прискорень умовно переносимо у точку В плану механізму і дивимось куди цей вектор обертає ланку АВ відносно точки А. Це і буде напрямком кутового прискорення.

Прискорення точки С знайдемо за допомогою **теореми подібності**.

Теорема подібності: Відрізки прямих ліній, що з'єднують точки однієї і тієї ж ланки на плані механізму і відрізки прямих ліній, що з'єднують кінці векторів абсолютних швидкостей або прискорень на планах швидкостей або прискорень, утворюють подібні та стосовно розташовані фігури.

Таким чином. На відрізку $ав$ плана прискорень будуємо трикутник $\Delta авс$ подібний трикутнику ΔАВС плана механізму. Точку $с$ з'єднаємо з полюсом π.

$$a_C = \pi c \cdot \mu_a.$$

Аналогічно визначаються прискорення і інших точок, наприклад точки S_2.

Виходячи з побудованих планів швидкостей та прискорень, визначимо, що ж таке план швидкостей і план прискорень.

План швидкостей, це векторний многокутник, в якому усі абсолютні швидкості виходять з однієї точки (полюса), а кінці їх з'єднані відносними швидкостями.

План прискорень, це векторний многокутник, в якому усі абсолютні прискорення виходять з однієї точки (полюса), а кінці їх з'єднані відносними прискореннями (або їх складовими).

5.1.2 Графоаналітична кінематика механізму шарнірного чотириланковика. Побудову плана швидкостей почнемо з визначення швидкості точки А ведучої ланки 1:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_O + \vec{V}_{AO}; \qquad V_{AO} = \omega_1 \cdot l_{AO}.$$

Напрямок вектора $\vec{V}_{AO}$ визначається перпендикуляром до ланки АО у бік кутової швидкості ω_1 (Рис. 5.2).

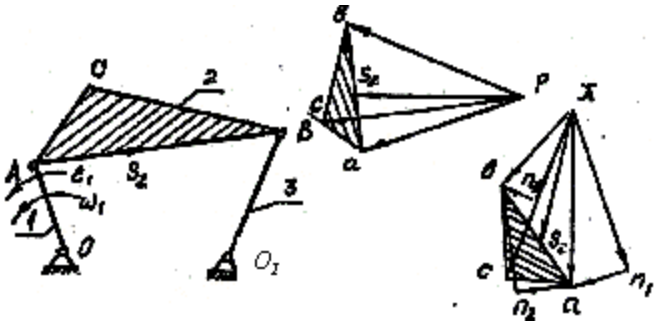


Рисунок 5.2

Для визначення швидкості точки В запишемо векторні рівняння

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}; \qquad \vec{V}_B = \vec{V}_{O1} + \vec{V}_{BO1}.$$

Враховуючи, що $\vec{V}_{O1} = 0$, можна записати:

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA} = \vec{V}_{BO1}.$$

З полюса побудови p проведемо відрізок pa у напрямку вектора $\vec{V}_{AO}$. З точки a проведемо лінію у напрямку вектора $\vec{V}_{BA}$ (перпендикулярну ланці АВ) до пересічення з лінією, проведеною з полюса p у напрямку вектора $\vec{V}_{BO1}$, в точці $в$. Швидкість точки С визначимо аналогічно попередньому прикладу. З плану швидкостей визначимо:

$$V_{BA} = ab \cdot \mu_V, \quad V_B = pb \cdot \mu_V, \quad V_C = pc \cdot \mu_V.$$

Кутова швидкість ланки 2: $\omega_2 = V_{BA}/l_{BA}$.

Кутова швидкість ланки 2: $\omega_3 = V_{BO1}/l_{BO1}$.

Прискорення точки А ведучої ланки 1 визначимо за формулою:

$$\vec{a}_A = \vec{a}_{AO} = \vec{a}^n_{AO} + \vec{a}^t_{AO}, \tag{5.5}$$

де $\vec{a}^n_{AO}$- нормальне прискорення точки А в обертальному русі навколо точки О, $\vec{a}^t_{AO}$ - тангенціальне прискорення точки А в обертальному русі навколо точки О.Визначення величин та напрямків цих векторів дивись попередній приклад.

Для визначення прискорення точки В запишемо векторне рівняння:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}^n_{BA} + \vec{a}^t_{BA} = \vec{a}^n_{BO1} + \vec{a}^t_{BO1}.$$

Розв'яжемо це рівняння графічно. Для цього з точки π - полюса плана прискорень, проводимо промінь у напрямку вектора $\vec{a}^n_{AO}$ і на ньому відкладаємо відрізок $\pi n_1 = a^n_{AO}/\mu_a$, де μ_a – масштабний коефіцієнт побудови плана прискорень. З точки n_1 у напрямку вектора $\vec{a}^t_{AO}$ відкладаємо відрізок $n_1 a = a^t_{AO}/\mu_a$. Точку a з'єднуємо з полюсом π. Повне прискорення точки А на плані прискорень виражається відрізком πa: $a_{AO} = a_A = \pi a \cdot \mu_a$.

З точки а проведемо промінь у напрямку вектора $\vec{a}^n_{BA}$ на якому відкладемо відрізок $an_2 = a^n_{BA}/\mu_a$. З полюса π проведемо промінь у напрямку вектора $\vec{a}^n_{BO1}$ на якому відкладемо відрізок $\pi n_2 = a^n_{BO1}/\mu_a$. З точки n_2 проведемо лінію у напрямку вектора $\vec{a}^t_{BA}$ до пересічення з лінією, проведеною з точки n_3 , у напрямку вектора $\vec{a}^t_{BO1}$. Точку пересічення позначимо літерою $в$ і з'єднаємо її з полюсом.

Визначення величин лінійних і кутових прискорень ланок і точок, а також прискорення точки С, дивись п. 5.1.1

5.1.3 Графоаналітична кінематика кулісного механізму. Швидкість точки А, як і у попередніх прикладах, визначимо, виходячи з того, що ланка 1 обертається з кутовою швидкістю ω_1 навколо нерухомої точки О: $V_A = V_{AO} = \omega_1 \cdot l_{AO}$.

Повзун 2 (Рис.5.3) здійснює складний рух, який ми можемо, розкласти на два прості рухи: **переносний** і **відносний**.

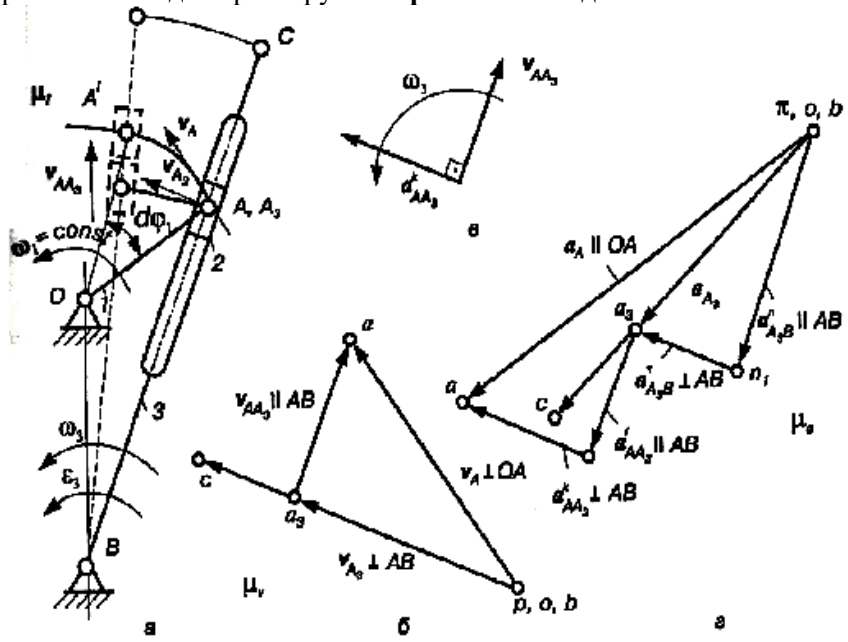


Рисунок 5.3

Переносний рух це рух повзуна 2 разом з точкою A_3 **куліси** 3 навколо нерухомої точки В. Відносний рух це рух повзуна 2 відносно куліси 3. Переносний рух у нашому прикладі це рух **обертальний**, а відносний – **поступальний**. **Абсолютний** рух точки 2 це рух разом з ланкою 1.

Швидкість точки A_1 і A_2 визначимо за формулою:

$$\vec{V}_{A2} = \vec{V}_{A1} = \vec{V}_e + \vec{V}_r = \vec{V}_{A3B} + \vec{V}_{A2-A3}. \qquad (5.6)$$

Це векторне рівняння вирішуємо графічно – побудовою плану швидкостей. Для цього з полюса p у напрямку вектора $\vec{V}_{A1}$ проведемо промінь на якому відкладемо відрізок $pa = V_{A1}/\mu_V$. З точки a проведемо лінію паралельно вектору $\vec{V}_{A2-A3}$ (паралельно ланці 3) до пересічення з лінією, проведеною з полюса p паралельно вектору $\vec{V}_{A3B}$ (перпендикулярно ланці 3). Точку пересічення позначимо літерою a_3 . Напрямки векторів на плані швидкостей проставляємо згідно векторного рівняння (5.6). З плану швидкостей визначимо

$$V_{A3B} = pa_3 \cdot \mu_V;\ V_{A2-A3} = a_{1,2}a_3 \cdot \mu_V;\ \omega_3 = \frac{V_{A3B}}{l_{AB}} \quad \omega_2 = \omega_3.$$

Напрямок кутової швидкості ω_3 можна визначити, якщо вектор швидкості точки A_3 (Рис.5.3,*а*) прикласти у точці A_3 і розглянути обертання ланки 3 навколо точки В. У даному випадку ω_3 направлена проти руху годинникової стрілки.

Швидкість точки С, яка належить кулісі 3, можна визначити, скориставшись теоремою подібності, склавши пропорцію:

$$\frac{pc}{pa_3} = \frac{BC}{BA_3}; \quad pc = pa_3 \cdot \frac{BC}{BA_3}$$

Тоді швидкість точки С: $V_C = pc \cdot \mu_V$.

З тієї ж точки A_1 почнемо визначення прискорень.

$$\vec{a}_{A1} = \vec{a}_{A1O} = \vec{a}^{\,n}_{A1O} + \vec{a}^{\,t}_{A1O} \qquad (5.7)$$

В нашому прикладі, коли $\omega_1 = Const$, $\vec{a}^{\,t}_{A1O} = 0$;

$$a_{A1} = a^n_{A1O} = \omega_1^2 \cdot l_{OA} = V^2_{A1O}/l_{OA}.$$

Вибравши полюс плану прискорень π (Рис.5.3,*г*), відкладаємо від нього відрізок πa, який відповідає прискоренню точки A_1 з масштабним коефіцієнтом μ_a. Прискорення точки A_1 спрямоване по лінії ОА від точки А до точки О.

Для визначення прискорення точки A_2 повзуна 2 використаємо **теорему Коріоліса**[8], Згідно з якою, якщо переносний рух тіла обертальний, то абсолютне прискорення точки дорівнює векторній сумі трьох прискорень: переносного, відносного і коріолісового (поворотного).

$$\vec{a}_{A2} = \vec{a}_{A1} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c = \vec{a}^{\,n}_{A3B} + \vec{a}^{\,t}_{A3B} + \vec{a}_{A2-A3} + \vec{a}_c \quad (5.6)$$

Теорема Коріоліса: абсолютне прискорення точки дорівнює геометричній сумі трьох прискорень: відносного, яке характеризує зміну відносної швидкості точки у відносному русі, переносного, яке характеризує зміну переносної швидкості точки у переносному русі, і коріолісового, яке характеризує зміну відносної швидкості у переносному русі і переносній швидкості точки у відносному русі.

Визначення нормального прискорення (дивись попередні приклади).

Прискорення Коріоліса: $\vec{a}_c = 2 \cdot \vec{\omega}_e \times \vec{V}_r$.

Величина цього прискорення

$$a_c = 2 \cdot \omega_3 \cdot V_{A2-A3} \cdot Sin\left(\vec{\omega}_3, \vec{V}_{A2-A3}\right).$$

Враховуючи те, що $\vec{\omega}_3 \perp \vec{V}_{A2-A3}$, напрямок вектора прискорення Коріоліса визначаємо за **правилом Жуковського:** вектор $\vec{V}_{A2-A3}$ повертаємо на 90^0 у бік ω_3, це і буде напрямком прискорення Коріоліса (Рис.5.3, *в*).

Правило Жуковського[9]: модуль прискорення Коріоліса дорівнює подвійному добутку кутової швидкості переносного обертання на модуль проекції відносної швидкості на площину, що перпендикулярна сої переносного обертання; щоб отримати напрямок прискорення

---

[8] Г.Коріоліс (G.Coriolis)– французький математик і механік (1792-1843). Вперше вивів аналітичну залежність між прискореннями точки в рухомій і нерухомій системах координат.

[8] М.Є.Жуковський (1847-1921) – "батько російської авіації", вніс значний вклад у динаміку машин. Він був автором цілого ряду робіт з прикладної механіки й теорії регулювання ходу машин. Характерною рисою у творчості М.Є.Жуковського було застосування методів механіки до розв'язку актуальних технічних питань. Великий вплив ідеї М.Є.Жуковського зробили і на викладання теоретичної механіки у вищих технічних закладах.

Коріоліса, треба вектор проекції відносної швидкості $\vec{V}_{A2-A3}(\vec{V}_r)$ повернути на 90^0 навколо вісі, паралельній вісі переносного обертання у напрямку цього обертання.

З полюса π у напрямку вектора $\vec{a}^n_{A1O}$ проведемо промінь, на якому відкладемо відрізок $\pi a = a^n_{A1O}/\mu_a$. З точки π у напрямку вектора $\vec{a}^n_{A3B}$ проведемо промінь, на якому відкладемо відрізок $\pi n_1 = a^n_{A3B}/\mu_a$. З точки a у напрямку протилежному напрямку прискорення $\vec{a}_C$ проведемо промінь, на якому відкладемо відрізок $ak = a_C/\mu_a$. З точки n_1 проведемо лінію паралельну вектору $\vec{a}^t_{A3B}$ до пересічення з лінією, проведеною з точки $к$ паралельно вектору $\vec{a}_{A2-A3}$, тобто вздовж ланки 3. Точку пересічення позначимо літерою a_3, яку з'єднаємо з полюсом π. З плану прискорень визначимо:

$$a^t_{A3B} = n_1 a_3 \cdot \mu_a; \qquad a_{A2-A3} = a_3 k \cdot \mu_a; \qquad \varepsilon_3 = \varepsilon_2 = a^t_{A3B}/l_{AB}.$$

Щоб встановити напрямок кутового прискорення ланки 3, вектор a^t_{A3B} перенесемо у точку A_3 і будемо спостерігати обертання ланки 3 навколо точки В. У даному випадку кутове прискорення ε_3 буде направлене проти руху годинникової стрілки. Тобто ланка 3 буде рухатись з прискоренням.

5.2 Графоаналітична кінематика механізму III класу

Для вирішення цієї задачі застосуємо метод особливих точок, або **точок Ассура**.

Точки Ассура це точки пересічення ліній, проведених через кінематичні пари **поводків**, або перпендикулярів до них, якщо повідки уявляють собою повзуни.

Повідки це ланки, за допомогою яких група приєднується до інших груп або стійок.

Розлянемо кінематику однієї групи Ассура III класу 3-го порядку. Якщо ми визначимось з однією групою, то впораємось і з цілим механізмом.

Хай будуть задані швидкості і прискорення точок B, C і D за величинами і напрямками. Треба визначити швидкості і прискорення усіх ланок та точок групи.

Точки Ассура це точки пересічення ліній, проведених через кінематичні пари **поводків**, або перпендикулярів до них, якщо повідки уявляють собою повзуни.

Для групи Ассура третього порядку таких точок буде три. З цих трьох точок S_1, S_2 і S_3 вибираємо для розгляду тільки одну, наприклад S_1. Вважаємо її незмінно приналежною ланці 7 (див. рис.5.4).

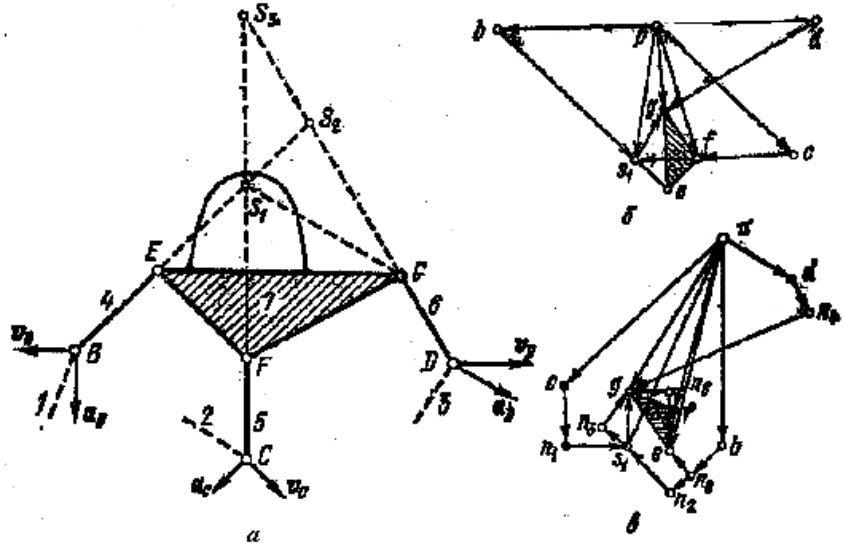


Рисунок 5.4

Визначимо швидкість точок E, F і G, а також точки S_1.

$$\vec{V}_E = \vec{V}_B + \vec{V}_{EB}, \tag{5.7}$$

$$\vec{V}_F = \vec{V}_C + \vec{V}_{CF}, \tag{5.8}$$

$$\vec{V}_G = \vec{V}_D + \vec{V}_{GD}, \tag{5.9}$$

$$\vec{V}_{S1} = \vec{V}_E + \vec{V}_{S1E} = \vec{V}_F + \vec{V}_{S1F}, \tag{5.10}$$

В рівняння (5.10) підкладемо значення швидкостей з рівнянь (5.7) і (5.8). Маємо

$$\vec{V}_{S1} = \vec{V}_B + \vec{V}_{EB} + \vec{V}_{S1E} = \vec{V}_C + \vec{V}_{CF} + \vec{V}_{S1F}, \tag{5.11}$$

В цьому рівнянні вектори $\vec{V}_{EB}$ і $\vec{V}_{S1E}$ паралельні, тому що обидва перпендикулярні до лінії *S₁EB*. Так саме і вектори $\vec{V}_{FC}$ і $\vec{V}_{S1F}$ перпендикулярні до лінії *S₁FC*. Ці вектори умовно об'єднаємо у вигляді векторів:

$$\vec{V}_{S1B} = \overrightarrow{\vec{V}_{EB} + \vec{V}_{S1E}} \quad i \quad \vec{V}_{S1C} = \overrightarrow{\vec{V}_{FC} + \vec{V}_{S1F}}$$

Тоді рівняння (5.11) буде мати вигляд:

$$\vec{V}_{S1} = \vec{V}_B + \vec{V}_{S1B} = \vec{V}_C + \vec{V}_{S1C}, \tag{5.12}$$

Рівняння (5.12) вирішуємо графічно, тобто будуємо план швидкостей. З точки *p* з масштабним коефіцієнтом μ_V відкладаємо швидкості точок B, C і D у вигляді відрізків *pb, pc і pd*. З точки *b* проведемо лінію паралельну вектору $\vec{V}_{S1B}$ до пересічення з лінією, проведеною з точки *c* паралельно вектору $\vec{V}_{S1C}$. Точку пересічення позначимо літерою *S₁*.

Тепер запишемо векторні рівняння для визначення швидкості точки *G*, приймаючи за полюси точки *S₁* і *D* (див.(5.9)).

$$\vec{V}_G = \vec{V}_{S1} + \vec{V}_{GS1} = \vec{V}_D + \vec{V}_{GD}, \tag{5.13}$$

З точки s_1 проведемо лінію перпендикулярну до *S₁G* до пересічення з лінією, проведеною з точки *d* перпендикулярно до *CD*. Точку пересічення позначимо літерою *g*. З'єднаємо її з полюсом *p*.

Використовуючи рівняння (5.8), запишемо рівняння для визначення швидкості точки *F*:

$$\vec{V}_F = \vec{V}_C + \vec{V}_{FC} = \vec{V}_G + \vec{V}_{FG} \tag{5.14}$$

З точки *c* проведемо лінію перпендикулярну до *PC* до пересічення з лінією, проведеною з точки *g* перпендикулярно до *PG*. Точку пересічення позначимо літерою *f*. З'єднаємо її з полюсом *p*. Положення точки *e* на плані швидкостей можна визначити вирішуючи рівняння $\vec{V}_E = \vec{V}_F + \vec{V}_{EF} = \vec{V}_G + \vec{V}_{EG}$, або використовуючи теорему подібності. В разі останнього на відрізку *gf* будуємо трикутник *gfe*

подібний трикутнику *GFE* плану механізму і стосовно відносно нього розташований. Точку *e* з'єднаємо з полюсом *p*.

Примітка: **точка e повинна лежати на лінії bs_1.**

Розглянемо тепер задачу побудови плану прискорень. Почнемо з визначення прискорень точок *E, F і G*:

$$\vec{a}_E = \vec{a}_B + \vec{a}^n_{EB} + \vec{a}^t_{EB} \quad (5.15)$$

$$\vec{a}_F = \vec{a}_C + \vec{a}^n_{FC} + \vec{a}^t_{FC} \quad (5.16)$$

$$\vec{a}_G = \vec{a}_D + \vec{a}^n_{GD} + \vec{a}^t_{GD} \quad (5.17)$$

Для точки S_1, вибираючи за полюси точки E і F, а також враховуючи рівняння (5.15) і (5.16) , можемо записати:

$$\vec{a}_{S1} = \vec{a}_E + \vec{a}^n_{S1E} + \vec{a}^t_{S1E} = \vec{a}_B + \vec{a}^n_{EB} + \vec{a}^n_{S1E} + \vec{a}^t_{EB} + \vec{a}^t_{S1E} = \vec{a}_B + \\ + \vec{a}^n_{S1B} + \vec{a}^t_{S1B}, \quad (5.18)$$

де $\vec{a}^n_{S1B} = \overrightarrow{\vec{a}^n_{EB} + \vec{a}^n_{S1E}}$; $\quad i \quad \vec{a}^t_{S1E} = \overrightarrow{\vec{a}^t_{EB} + \vec{a}^t_{S1E}}$.

Напрямки векторів $\vec{a}^n_{EB}$ і $\vec{a}^n_{S1E}$ співпадають і лінії дії векторів $\vec{a}^t_{EB}$ і $\vec{a}^t_{S1E}$ перпендикулярні до лінії *EB* і S_1E, які є подовженням одна одної.

Аналогічно запишемо рівняння для визначення прискорення точки S_1, приймаючи за полюс точку *F*:

$$\vec{a}_{S1} = \vec{a}_F + \vec{a}^n_{S1F} + \vec{a}^t_{S1F} = \vec{a}_C + \vec{a}^n_{FC} + \vec{a}^n_{S1F} + \vec{a}^t_{FC} + \vec{a}^t_{S1F} = \\ = \vec{a}_C + \vec{a}^n_{S1C} + \vec{a}^t_{S1C}, \quad (5.19)$$

де $\vec{a}^n_{S1C} = \overrightarrow{\vec{a}^n_{EC} + \vec{a}^n_{S1F}}$; $\quad i \quad \vec{a}^t_{S1C} = \overrightarrow{\vec{a}^t_{EC} + \vec{a}^t_{S1F}}$.

Об'єднаємо рівняння (5.19) і (5.18).

$$\vec{a}_{S1} = \vec{a}_B + \vec{a}^n_{S1B} + \vec{a}^t_{S1B} = \vec{a}_C + \vec{a}^n_{S1C} + \vec{a}^t_{S1C} \quad (5.20)$$

Розв'язуємо це рівняння графічно – побудовою плану прискорень.

З полюса π у напрямках векторів $\vec{a}_B, \vec{a}_C$ i $\vec{a}_D$ відкладемо відрізки $\pi b, \pi c$ і πd з масштабним коефіцієнтом побудови μ_a. З точки *b*

у напрямку вектора $\vec{a}^n_{EB}$ відкладемо відрізок bn_6 на подовженні якого у напрямку вектора $\vec{a}^n_{S1E}$, відкладаємо відрізок n_6n_2. З точки c у напрямку вектора $\overrightarrow{\vec{a}^n_{FC} + \vec{a}^n_{S1F}}$ відкладемо відрізок cn_1. З точки n_2 проводимо лінію паралельно вектору $\vec{a}^t_{S1B}$ до пересічення з лінією, проведеною з точки n_1, паралельно вектору $\vec{a}^t_{S1C}$ до взаємного пересічення в точці s_1.

Для визначення прискорення точки G, враховуючи рівняння (5.17), запишемо векторне рівняння:

$$\vec{a}_C = \vec{a}_{S1} + \vec{a}^n_{CS1} + \vec{a}^t_{CS1} = \vec{a}_G + \vec{a}^n_{GD} + \vec{a}^t_{GD} \qquad (5.21)$$

З точки d у напрямку вектора $\vec{a}^n_{GD}$ відкладемо відрізок dn_4, а з точки s_1 у напрямку вектора $\vec{a}^n_{GS1}$ відкладемо відрізок s_1n_3. З точки n_4 проводимо лінію паралельну вектору $\vec{a}^t_{GD}$ до пересічення з лінією, проведеною з точки n_3 паралельно вектору $\vec{a}^t_{S1G}$. Точку пересічення позначимо літерою g. З'єднаємо її з полюсом π.

Приймаючи точку G за полюс, запишемо векторне рівняння для прискорення точки E:

$$\vec{a}_E = \vec{a}_B + \vec{a}^n_{EB} + \vec{a}^t_{EB} = \vec{a}_G + \vec{a}^n_{EG} + \vec{a}^t_{EG} \qquad (5.22)$$

З точки g у напрямку вектора $\vec{a}^n_{EG}$ відкладемо відрізок gn_5. З точки n_5 проведемо лінію паралельну вектору $\vec{a}^t_{EG}$ до пересічення з лінією, проведеною з точки n_6, паралельно вектору $\vec{a}^t_{EB}$ до взаємного пересічення в точці e. З'єднаємо її з полюсом π.

Для визначення прискорення точки F запишемо і графічно розв'яжемо рівняння $\vec{a}_F = \vec{a}_G + \vec{a}^n_{FG} + \vec{a}^t_{FG} = \vec{a}_E + \vec{a}^n_{FE} + \vec{a}^t_{FE}$, або використовуємо **теорему подібності**.

5.3 Графічний метод кінематичного дослідження механізму

Графічний метод є одним з найбільш поширених методів при дослідженні кінематики точки за **цикл**, тобто за час повного виконання технологічного процесу на даному обладнанні. В більшості випадків циклом є час одного повного оберту кривошипа. Цей метод має таку перевагу як наочність, але він все ж таки не абсолютно точний.

Цикл це час повного виконання технологічного процесу на даному обладнанні. Якщо на даному обладнанні технологічний процес буде виконуватись за один оберт кривошипа, наприклад для преса, то цикл це час одного оберту кривошипа, якщо за два, наприклад для двигуна внутрішнього згоряння, то це час двох обертів кривошипа.

Для дослідження кінематики точки треба викреслити механізм у декількох (краще якомога більшої кількості) положеннях кривошипа (Рис.5.5).

Креслення робиться при рівній зміні кута повороту кривошипа. Можна користуватися аналітичними розрахунками положення вихідної ланки (дивись функції положення з розділу аналітичної кінематики). На підставі креслення або розрахунків креслимо діаграму переміщень вихідної точки механізму (Рис.5.6).

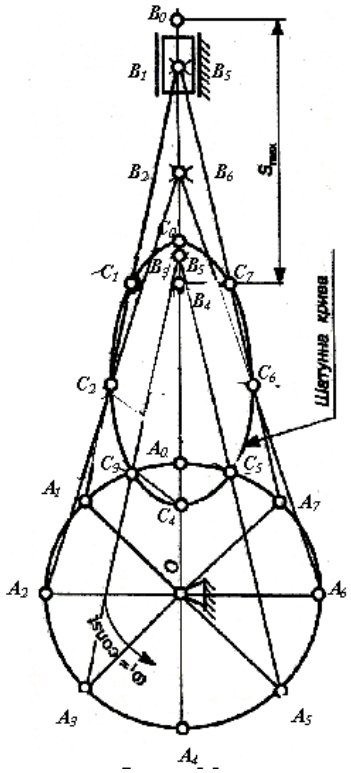


Рисунок 5.5

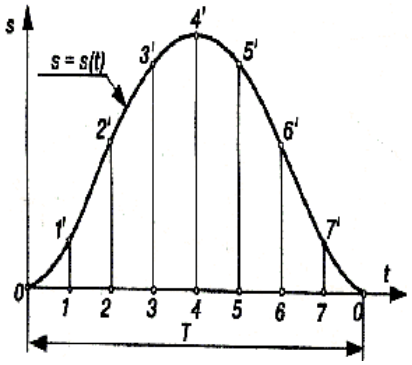


Рисунок 5.6

Положення механізму при якому вихідна ланка займає крайнє положення (наприклад, положення початку робочого ходу) називається крайнім положенням.

Початком підрахунку переміщень приймається саме положення початку робочого ходу. На рис.5.5 показана схема двигуна внутрішнього згоряння, тому початком робочого ходу прийнята верхня мертва точка B_0. Усі переміщення повзуна 3 відраховуються від цього положення.

Якщо кривошип робить n обертів на хвилину (об/хв), то час одного оберту $T = 60 / n$, сек.

Масштабний коефіцієнт діаграми переміщень по осі t

$$\mu_t = T/L = 60/nL \text{ (сек./мм)},$$

де L – відрізок у мм по осі t, пропорційний часу T.

Масштабний коефіцієнт переміщень

$$\mu_S = H/S_{max}, \text{ (м/мм)},$$

де H – повний хід вихідної ланки, виміряний в метрах,

S_{max} – максимальна величина переміщення на кресленні в міліметрах.

Для визначення швидкості точки графічно диференціюємо діаграму [S,t] (Рис.5.7).

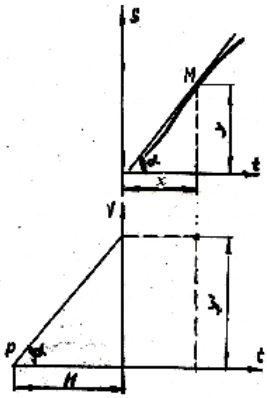


Рисунок 5.7

Проведемо дотичну в будь-якій точці діаграми [*S*,*t*], наприклад в точці *M(t,y)*. Кут нахилу її позначимо літерою α. На новій системі координат (на рис.5.7 це нижня система координат) з полюса *p* проведемо промінь під тим же кутом α до пересічення з віссю ординат. Точку пересічення знесемо на вертикаль з координатою *t* положення точки М.

Візьмемо похідні від виразів$S_i = y \cdot \mu_S$ і $t_i = x \cdot \mu_t$.

Маємо: $dS = dy \cdot \mu_S$ і $dt = dx \cdot \mu_t$.

Відношення цих похідних

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dy \cdot \mu_S}{dx \cdot \mu_t}; tg\alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{dS \cdot \mu_t}{dt \cdot \mu_S} = \frac{y'}{H} = V_i \cdot \frac{\mu_t}{\mu_S}.$$

Звідки

$$y' \cdot \mu_V = V_i, \qquad (5.23)$$

де $\mu_V = \frac{\mu_S}{H \cdot \mu_t}$- масштабний коефіцієнт побудови діаграми швидкості точки. Тут *H* - полюсна відстань, мм.

Графічне диференціювання методом дотичних має недоліки, які полягають у неточності графічних побудов з-за неможливості точного проведення дотичної до кривої у даній точці. Тому на практиці використовують **метод хорд**, який базується на тому, що хорда, яка стягує кінці дуги, паралельна дотичній до цієї дуги у середині розглядуваного інтервалу, якщо величина інтервалу наближається до нуля.

Для використання метода хорд відрізок L на осі t поділяємо на якомога більшу кількість рівних інтервалів (на рис.5.8 ця кількість рівна 8, як і кут повороту кривошипа на рис.5.5). Кінці дуг на інтервалах *0-1, 1-2* і т.д. проводимо дуги *0-1', 1'-2'* і т д (Рис.5.8, *а*), а на діаграмі $V = V(t)$ (Рис.5.8, *б*) із точки P_1 – промені $P_1 1'', P_1 2''$ і т д, які паралельні відповідним хордам, до перетину з віссю ординат *V*. Відрізки *0 – 1'', 0 – 2'', 0 – 3''* і т д з масштабним коефіцієнтом μ_V, отриманого зо формулою (5.23), визначають значення швидкостей посередині відповідних інтервалів часу.

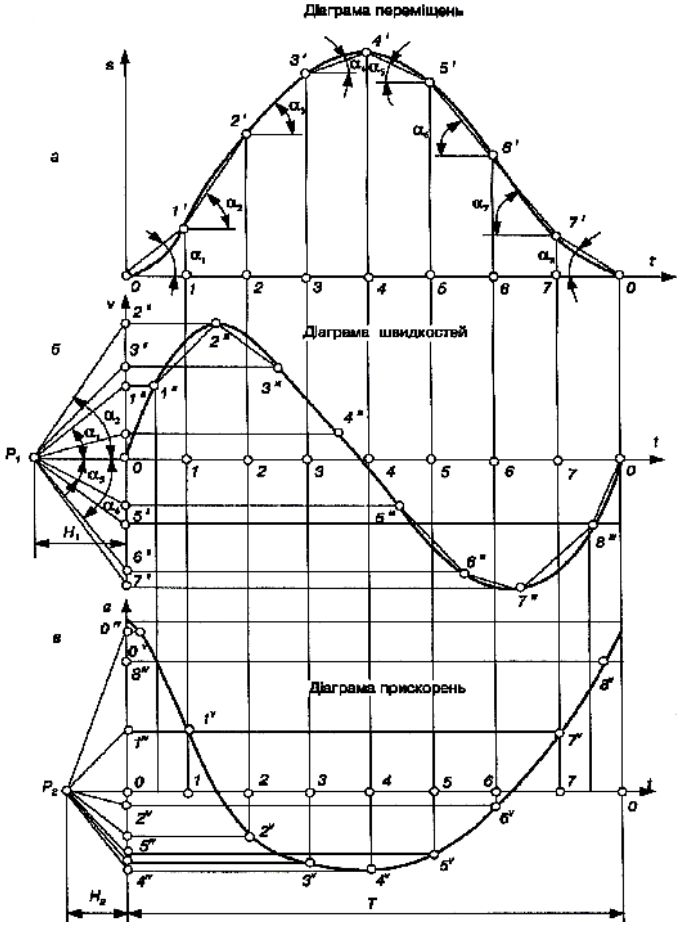


Рисунок 5.8

Для спрощення побудови діаграм відрізки *0 – 1’’, 0 – 2’’, 0 – 3’’*...відкладають посередині відповідних інтервалів часу. Точки *0 , 1’’, 2’’, 3’’*... з’єднують плавною кривою і одержують з певною точністю діаграму швидкостей $V = V(t)$.

Чим менший інтервал часу розглядається, тобто чим більше проведено хорд, тим більше наближаються до заданої кривої. Особливу увагу треба звернути на ділянку, де крива, яку диференціюють, має екстремум. У цьому місці криву треба розділити на менші ділянки (проміжки часу).

Аналогічно методом хорд будують діаграму прискорень $a = a(t)$ (Рис. 5.8, *в*). Порівнюючи побудовані графіки переміщень, швидкостей і прискорень, між ними можна встановити такі залежності:

- зростанню ординат кривої, що диференціюється, відповідають додатні значення ординат диференціальної кривої, а зменшенню – від’ємні значення;

- при максимумі кривої, що диференціюється, диференціальна крива переходить через нуль від додатних значень ординат до від’ємних, а при мінімумі – від від’ємних значень ординат до додатних;

- точці перетину кривої, що диференціюється, відповідає максимум або мінімум на диференціальній кривій.

6. ДИНАМІКА МАШИН

6.1 Загальні відомості

Однією з основних задач **динаміки машин** є дослідження руху машинного агрегату з жорсткими ланками, які находяться під дією прикладених до них сил, з врахуванням їх мас.

Розрізняють дві основні задачі динаміки механізмів машин:

- заданий закон руху початкової ланки механізму - **треба визначити зовнішні сили, які забезпечують цей рух,**
- задані зовнішні сили, що діють на ланках механізму - **треба визначити закон руху початкової ланки.**

Перша задача носить назву **силового аналізу механізму**, а друга - **динаміки механізмів (машин)**. Крім цього, як і в інших розділах теорії механізмів і машин, у динаміці можна виділити два класи задач - аналіз і синтез механізмів за даними динамічними умовами. З цієї причини у розділ динаміки включають ряд інших задач, які мають важливе технічне значення, а саме: розрахунок маховика, регуляторів швидкості, зрівноваження мас у механізмі, визначення його коефіцієнта корисної дії, дослідження коливань у машин, їх віброзахист.

Але перш за все треба ознайомитись з силами, що діють на ланках механізмів і машин.

6.2 Сили, що діють у механізмах

Усі сили, що діють на механізм, можна поділити на дві групи: зовнішні і внутрішні. До зовнішніх сил відносяться сили ваги ланок, сили рушійні, сили опору, сили інерції, тощо. До внутрішніх сил відносяться сили взаємодії ланок між собою, тобто реакції у кінематичних парах.

Рушійні сили $\vec{F}_P$ завжди діють у бік руху тіла намагаючись прискорити цей рух. Ці сили намагаються привести механізм або машину в рух. Рушійними силами можуть бути тиск пару або газу, тиск води або повітря, електромагнітні сили, сили пружності пружини, сили тяжіння, тощо. Напрями рушійної сили та швидкості точки, до якої вона прикладена, або збігаються, або складають гострий кут. Тому

проекція вектора сили на напрям руху тіла завжди додатна, що і визначає **додатну роботу рушійних сил**.

Сили опору $\vec{F}_O$ завжди діють проти руху тіла, намагаючись уповільнити рух. Сили опору у свою чергу поділяються на сили корисного опору та сили шкідливого (невиробничого) опору

До сит корисного опору відносяться технологічні опори руху, на подолання яких при виконанні технологічного процесу витрачається робота, тобто для здійснення якого і служить машина Прикладом може служити опір матеріалу при деформуванні його у штампах або пресах. Сила корисного опору завжди діє проти руху тіла, або складає з ним тупий кут. Тому **робота сил корисного опору завжди від'ємна**.

До сил шкідливого опору відносяться сили тертя у кінематичних парах, а також опір середовища. Правда іноді сила тертя виступає як корисна сила, наприклад у гальмах, або МІЖ колесами автомобіля і шляхом, тощо.

Сили тяжіння $\vec{G}$ є результат взаємодії ланок із Землею. Вона завжди напрямлена у один бік, а у машинах траєкторії точок, як правило замкнуті, то **робота сил тяжіння** за період руху механізму **дорівнює нулю**. У середині періоду руху ця робота відрізняється від нуля.

Сили інерції $\vec{F}^i$ з'являються при зміні швидкості за величиною або напрямком. При періодичному русі робота сил інерції за період руху також дорівнює нулю тому що швидкості та прискорення ланок за період руху також міняються періодично тобто набувають одних і тих же значень на замкнутих траєкторіях центрів ваги ланок.

До внутрішніх сил належать реакції у кінематичних парах, як результат взаємодії ланок між собою. Вони є внутрішніми дія усього механізму в цілому, але для кожної ланки окремо вони є силами зовнішніми. Робота сил реакцій у кінематичних парах для механізму в цілому дорівнює нулю, якщо не зважати на сили тертя, тобто у ідеальному стані

6.3 Зведені сили та маси

В динаміці будь-який механізм замінюється однією ланкою, яка називається ланкою зведення і до якої прикладається сила (або момент сили), яка називається зведеною силою (зведеним моментом сили), і яка

має масу або момент інерції, яка називається зведеною масою (зведеним моментом інерції)

Дамо визначення ланки зведення, зведеної маси (зведеного моменту інерції).

Ланка зведення це:

1 ланка, яка замінює собою увесь механізм і до якої зводять сили (момент сил), маси (момент інерції) і яка має простий рух;

2 ланка механізму, що утворює кінематичну пару із стояком і рухається так, що її узагальнена координата співпадає з узагальненою координатою механізму.

Зведена сила *(*момент сили*)* це сила (момент сили), прикладена до ланки зведення, робота або потужність якої дорівнює роботі або потужності усіх сил і пар сил, що діють на механізм.

Зведена маса (момент інерції) це маса поступально рухаючої, або момент інерції обертаючої ланки зведення, кінетична енергія якої дорівнює кінетичній енергії усіх ланок механізму.

У основі зведення сил і моментів пар сил лежить **принцип можливих переміщень**, який ґрунтується на рівності елементарних робіт або потужностей, які розвиваються силами та моментами сил, прикладеними до ланок механізму.

Принцип можливих переміщень, або принцип Лагранжа[10], формулюється так: для рівноваги механічної системи, яка підкоряється ідеальним, стаціонарним та незвільненим в'язям, необхідно і достатньо, щоб сума елементарних робіт усіх активних сил, прикладених до точок системи, дорівнювала нулю на будь-якому можливому переміщенні системи, якщо швидкості точок системи у розглядуваний момент часу рівні нулю.

Загальне рівняння динаміки (принцип Д'Аламбера[11] - Лагранжа): при русі системи і ідеальними в'язями у кожний момент часу сума елементарних робіт усіх прикладених активних сил і усіх сил інерції на будь-якому можливому переміщенні буде рівною нулю.

---

[10] Лагранж Жозеф Луї (1736-1813) – французький вчений, який разом з другим французьким вченим Даламбером Ж. (1717-1783), розробили і запропонували загальний аналітичний метод розв'язку задач динаміки на підставі принципу Даламбера і принципу можливих переміщень.

[11]

$$P_{зв} = \sum_{i=1}^{n} P_i \ , \qquad (6.1)$$

тут $P_{зв}$ - потужність, яку розвиває зведена сила $F_{зв}$, або зведений момент $M_{зв}$; P_i - потужність, яку розвивають сили та моменти пар сил, які прикладені до ланки і мають бути зведені.

Якщо сила $\vec{F}_{зв}$ прикладена до точки ланки зведення, то

$$P_{зв} = F_{зв} \cdot V_1 = \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot V_i \cdot Cos\alpha_i + \sum_{i=1}^{k} M_i \cdot \omega_i \qquad (6.2)$$

$$\text{або } M_{зв} \cdot \omega_1 = \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot V_i \cdot Cos\alpha_i + \sum_{i=1}^{k} M_i \cdot \omega_i \ . \qquad (6.3)$$

З цих рівнянь маємо:

$$F_{зв} = \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \frac{V_i}{V_в} \cdot Cos\alpha_1 + \sum M_i \cdot \frac{\omega_i}{V_в} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot U_{iв} \cdot Cos\alpha_1 + \sum M_i \cdot V_{qiв} \qquad (6.4)$$

$$M_{зв} = \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot \frac{V_i}{\omega_1} \cdot Cos\alpha_1 +$$
$$+ \sum M_i \cdot \frac{\omega_i}{\omega_1} = \sum_{i=1}^{n} F_i \cdot V_{qiв} \cdot Cos\alpha_1 + \sum M_i \cdot U_{i1} \qquad (6.5)$$

З рівнянь (1.4) і (1.5) видно, що при заданих силах і моментах пар сил визначити зведені силу або момент сили неважко, достатньо тільки визначити **передаточні функції** (дивись розділ кінематики). Треба зауважити також, що зведена сила (зведений момент сили) не залежить від узагальненої швидкості, а залежить тільки від передаточних функцій.

Для визначення зведеної маси (зведеного моменту інерції) запишемо рівняння для кінетичної енергії механізму:

$$T_{зв} = \sum_{i=1}^{n} T_i \qquad (6.6)$$

де $T_{зв}$ - кінетична енергія ланки зведення, T_i - кінетична енергія і-тої ланки.

Для ланки, яка має поступальний рух можна записати:

$$T_{зв} = 0.5 \cdot m_{зв} \cdot V_1^2 = 0.5 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left[\left(I_{Si} \cdot \omega_i^2 \right) + \left(m_i \cdot V_{Si}^2 \right) \right] \qquad (6.7)$$

Для ланки, яка має обертальний рух можна записати:

$$T_{зв} = 0.5 \cdot I_{зв} \cdot \omega_1^2 = 0.5 \cdot \sum_{i=1}^{n}\left[\left(I_{Si} \cdot \omega_i^2\right) + \left(m_i \cdot V_{Si}^2\right)\right] \quad (6.8)$$

$$m_{зв} = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(I_{Si} \cdot \frac{\omega_i^2}{V_1^2}\right) + \left(m_i \cdot \frac{V_{Si}^2}{V_1^2}\right)\right] = \\ = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(I_{Si} \cdot V_{qSi1}^2\right) + \left(m_i \cdot U_{i1}^2\right)\right] \quad (6.9)$$

$$I_{зв} = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(I_{Si} \cdot \frac{\omega_i^2}{\omega_1^2}\right) + \left(m_i \cdot \frac{V_{Si}^2}{\omega_1^2}\right)\right] = \\ = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(I_{Si} \cdot U_{i1}^2\right) + \left(m_i \cdot V_{qSi1}^2\right)\right] \quad (6.10)$$

Як видно з цих формул зведена маса або зведений момент інерції теж залежать тільки від передаточних функцій і не залежать від швидкості ланки зведення.

6.4 Рівняння руху машини в енергетичній формі

Вивчаючи рух механізму, ми звичайно припускали, що початкова ланка (головний вал машини) обертається зі сталою кутовою швидкістю $\omega_1 = Const$. Цей закон руху можна одержати тільки в тих випадках, коли структура механізму проста, наприклад у механізмах, що складаються тільки з обертових ланок. Для здійснення такого руху потрібні цілком певні співвідношення між силами, що діють на механізм, і масами його ланок. Але закон зміни сил залежить від їх фізичної природи і до структури механізму відношення не має. Тому, взагалі кажучи, не можна встановити між силами, що діють на механізм, таке співвідношення, яке забезпечило б заданий закон його руху.

Закон руху будь-якої ланки механізму може бути визначений лише тоді, коли відомі усі сили або залежність цих сил від різних параметрів. Рушійні сили та сили виробничих опорів можуть одночасно або окремо залежати від положення ланки зведення, або від її кутової швидкості. Зведені моменти інерції механізму чи машини можуть бути або постійними, або залежати від положення ланки зведення.

Визначення закону руху механізму, що перебуває під дією прикладених до його ланок сил, і є задачею динамічного аналізу.

Для механізму, що має один **ступінь волі**, цю задачу можна вважати розв'язаною, коли буде встановлено закон руху однієї ланки.

За таку ланку, як ми вже знаємо, приймається початкова ланка, яка і є ланкою зведення. На цю ланку діє зведений момент пари сил і вона має зведений момент інерції.

Основою для складання рівняння руху механізму служить теорема про зміну кінетичної енергії, згідно з якою зміна кінетичної енергії механічної системи за будь-якому переміщені дорівнює сумі робіт усіх прикладених сил, що діють на цю систему на тому ж переміщенні, тобто

$$\Delta T = T_i - T_0 = \sum_{i=1}^{n} A_i \qquad (6.11)$$

де $T_1 = I_{\text{зві}} \cdot \omega_{\text{зві}}^2/2$, $T_0 = I_{зв0} \cdot \omega_{зв0}^2/2$- кінетична енергія ланки зведення відповідно в кінці та на початку переміщення, який розглядаємо;

$\sum_{i=1}^{n} A_i$- сума робіт усіх прикладених до ланки зведення сил.

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = A_{звр} - A_{звко} - A_{звшо} = A_P - A_{KO} - A_{ШО} \qquad (6.12)$$

де $\text{А}_{\text{звр}} = \text{А}_{\text{Р}}$- робота зведеної рушійної сили, $\text{А}_{\text{звко}} = \text{А}_{\text{К0}}$- робота зведених сил корисного опору, $A_{звшо} = A_{ШО}$- робота зведених шкідливих сил опору.

Підставимо усі ці вирази у формулу (6.11).

$$\frac{I_{звi} \cdot \omega_{звi}^2}{2} - \frac{I_{зв0} \cdot \omega_{зв0}^2}{2} = A_P - A_{KO} - A_{ШО} \qquad (6.13)$$

Враховуючи, що роботу зведених рушійних сил і сил опору можна виразити через зведений момент $M_{зв}$ рушійних сил і сил опору, який прикладемо до ланки зведення,

$$\Delta T_i = \sum_{i=1}^{n} A_i = \int M_{звi} \cdot d\alpha_1. \qquad (6.14)$$

З рівняння (6.13), беручи до уваги рівняння (6.11), запишемо:

$$\omega_{звi} = \omega_i = \sqrt{\frac{2 \cdot \Delta T_i + I_{зв0} \cdot \omega_0^2}{I_{звi}}} = \omega_i(\alpha_1). \qquad (6.15)$$

6.5 Рівняння руху машини у диференціальній формі

Запишемо рівняння **Лагранжа** 2-го роду:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega}\right) - \frac{\partial T}{\partial \alpha_1} = M_{зв} \qquad (6.16)$$

Враховуючи, що $I_{зв}$ залежить тільки від α_i, запишемо

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha_1} = \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{\partial I_{зв}}{\partial \alpha_1} = \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dI_{зв}}{d\alpha_1}, \frac{\partial T}{\partial \omega} = I_{зв} \cdot \omega; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \omega}\right) = I_{зв} \cdot \varepsilon + \omega^2 \cdot \frac{dI_{зв}}{d\alpha_1}.$$

Підставляючи ці вирази у формулу (6.16), маємо

$$M_{зв} = I_{зв} \cdot \varepsilon + \omega^2 \cdot \frac{dI_{зв}}{d\alpha_1} - \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dI_{зв}}{d\alpha_1} = I_{зв} \cdot \varepsilon + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dI_{зв}}{d\alpha_1} \qquad (6.17)$$

Аналогічно можна записати і для поступального руху ланки зведення:

$$\boldsymbol{F_{зв} = m_{зв} \cdot a + \frac{V^2}{2} \cdot \frac{dm_{зв}}{dS_1}} \qquad (6.18)$$

Рівняння (6.17) і (6.I8) можна отримати з рівняння кінетичної енергії у диференціальній формі:

$$dT = dA \qquad (6.19)$$

Для обертального руху ланки зведення маємо

$$dT = d(I_{зв} \cdot \omega^2/2); \qquad dA = M_{зв} \cdot d\alpha_1$$

Підставимо ці вирази у рівняння (6,19).

$$M_{зв} = \frac{d}{d\alpha_1}\left(\frac{I_{зв} \cdot \omega^2}{2}\right) = I_{зв} \cdot \frac{2\omega}{2} \cdot \frac{d\omega}{d\alpha_1} \cdot \frac{dt}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dI_{зв}}{d\alpha_1} = I_{зв} \cdot \varepsilon + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dI_{зв}}{d\alpha_1} \qquad (6.20)$$

де $\varepsilon = d\omega/dt$ - кутове прискорення ланки зведення, $\omega = d\alpha_1/dt$ - кутова швидкість ланки зведення.

Аналогічно можна записати і для поступального руху ланки зведення (див.(6.18)).

6.6 Режими руху механізму

У роботі механізму (або машини) розрізняють три характерні періоди (режими) руху: а) **розгін;** б) **усталений** рух; в) **вибіг** або **гальмування.**

У період розгону (пуску машини) швидкість руху початкової ланки (ланки зведення) зростає від нуля до деякої середньої (робочої) швидкості. Рівняння руху механізму (6.13) набуває вигляду

$$\frac{I_{зві} \cdot \omega_{зві}^2}{2} = A_P - A_{KO} - A_{ШО}$$

Враховуючи, що $I_{зв} \cdot \omega^2 > 0$, для періоду пуску механізму є справедливою така нерівність:

$$A_P > A_{KO} - A_{ШО} \tag{6.21}$$

Таким чином у період пуску робота рушійних сил повинна бути більша за суму робіт сил опору (корисних і шкідливих). Надлишок роботи A_p витрачається на збільшення кінетичної енергії механізму, тобто на збільшення швидкостей рухомих мас. Для скорочення часу пуску машини часто знімають з неї корисне навантаження A_{KO} = О.

Рух машини без корисного навантаження називається холостим ходом машини

При усталеному русі машини швидкість початкової ланки механізму коливається навколо середнього значення, яка відповідає робочій швидкості цієї ланки.

Проміжок часу, по закінченні якого положення, швидкості та прискорення початкової ланки набувають початкового значення, називають періодом зміни кінетичної енергії механізму, або циклом $t_ц$ усталеного руху.

Циклом tц усталеного руху або періодом зміни кінетичної енергії механізму називають проміжок часу, по закінченні якого положення, швидкості та прискорення початкової ланки набувають початкового значення.

Швидкості початкової ланки на початку та в кінці циклу усталеного руху рівні між собою($\omega_0 = \omega = \omega_К$). Тоді рівняння руху набирає вигляду

$$A_р=A_{ко}+A_{шо} \tag{6.22}$$

При усталеному русі механізму робота рушійних сил за один цикл дорівнює сумі робіт сил корисного та шкідливого опору.

Усередині циклу ця рівність може не зберігатись, тому маємо коливання швидкості ланки зведення.

При вибігу машини перш за все треба припинити подавання рушійної енергії машини, тобто $A_р=0$ (вимкнути двигун). Кінцевим станом машини буде спокій, $\omega_к=0$. Для цього випадку рівняння руху набирає вигляду

$$\frac{I_{зв0} \cdot \omega_{зв0}^2}{2} = A_{КО} - A_{ШО}. \tag{6.23}$$

З цього рівняння видно, що зупинка машини буде досягнута лише тоді, коли вся нагромаджена машиною кінетична енергія рухомих мас буде поглинута роботою сил корисного та шкідливого опору. Для скорочення часу зупинки машини часто штучно збільшують роботу сил шкідливого опору за допомогою установлення гальм.

На рис. 6.1 показано приклад залежності швидкості руху ланки зведення від часу *t*. Час усталеного руху залежить від часу одного циклу та від кількості циклів ($t_{ур} = t_ц \cdot к$). Кількість циклів визначається технологічним процесом, який виконує машина.

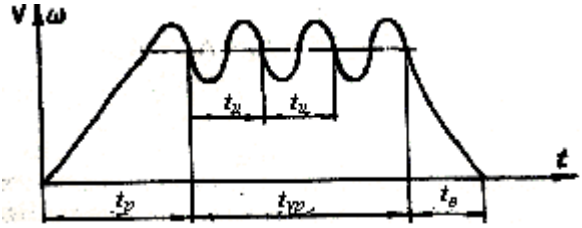


Рисунок 6.1

Слід зауважити, що є багато машин, які не працюють у режимі усталеного руху, їх рух, як правило, складається з розбігу і вибігу. Також слід зауважити, що є машини, в яких цикл роботи не завжди відповідає одному оберту ланки зведення, тобто цикл укладається у два і більше обертів її.

6.7 Загальні методи дослідження руху механізму

Для визначення закону руху ланки зведення, яка визначає рух усіх інших ланок, використовують рівняння руху (6.15), або (6.17). Розв'язуючи їх відносно швидкості руху ланки зведення, встановлюємо характер зміни її руху залежно від часу. Для цієї мети найчастіше використовують диференціальне рівняння (6.17), у яке входить зведений момент сил $M_{зв}$, що є сумою моментів рушійних сил і сил опору тобто $M_{зв}=M_p-M_o$. Як було показано, ці моменти є функціями узагальненої координати α_1, або її першої похідної - ω, або, нарешті, часу t. Можна встановити також, що ці моменти є функціями однієї і тієї ж змінної

$$M_P(\alpha_1) - M_O(\alpha_1) = I_{зв} \cdot \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dI_{зв}}{d\alpha_1} \tag{6.24}$$

$$M_P(\omega) - M_O(\omega) = I_{зв} \cdot \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dI_{зв}}{d\alpha_1} \tag{6.25}$$

$$M_P(t) - M_O(t) = I_{зв} \cdot \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dI_{зв}}{d\alpha_1} \tag{6.26}$$

Але нерідко трапляється і таке, що зведені моменти є функціями різних змінних. Тоді одержуємо рівняння іншого роду:

$$M_P(\alpha_1) - M_O(t) = I_{зв} \cdot \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dI_{зв}}{d\alpha_1} \tag{6.27}$$

$$M_P(\omega) - M_O(\alpha_1) = I_{зв} \cdot \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dI_{зв}}{d\alpha_1} \tag{6.28}$$

$$M_P(t) - M_O(\omega) = I_{зв} \cdot \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dI_{зв}}{d\alpha_1} \tag{6.29}$$

Рівняння (6.24)-(6.29) у загальному випадку є нелінійними диференціальними, розв'язати які можна тільки наближеними методами. Наприклад методом **Г.Г.Баранова**[12], який полягає у тому, що кут повороту α_1 ланки зведення розбивається на досить малі інтервали $\Delta\alpha_1$, що беруться за крок інтегрування. У кожному інтервалі $\Delta\alpha_1$ задані функції зведених моментів рушійних сил M_p і сил опору M_o вважаються сталими, а зведений момент інерції $I_{зв}$ змінюється лінійно. Якщо врахувати, що зведені моменти M_p і M_o можуть бути функціями і кута α_1, і кутової швидкості ω, і часу t, то можна узагальнено позначити ці моменти $M(\alpha_1, \omega\, t)$. Тоді ці рівняння записуються у вигляді:

$$M(\alpha_1, \omega, t) = I_{зв} \cdot \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dI_{зв}}{d\alpha_1}. \qquad (6.30)$$

Поміняємо змінну у відношенні

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\alpha_1} \cdot \frac{d\alpha_1}{dt} = \omega \cdot \frac{d\omega}{d\alpha_1}.$$

Рівняння (6.30) тепер має вигляд :

$$M(\alpha_1, \omega, t) = I_{зв} \cdot \omega \frac{d\omega}{d\alpha_1} + \frac{\omega^2}{2} \cdot \frac{dI_{зв}}{d\alpha_1}$$

або

$$\frac{2 \cdot M(\alpha_1, \omega, t) \cdot d\alpha_1}{\omega} = 2 \cdot I_{зв} \cdot d\omega + \omega \cdot dI_{зв} \qquad (6.31)$$

Замінюємо у цьому рівнянні $d\alpha_1$ кроком інтегрування $\Delta\alpha_1$. Тоді величина $d\omega$ приросту швидкості може бути замінена різницею (ω_{i+1}-ω_i), а величина $dI_{зв}$ приросту зведеного моменту інерції - різницею ($I_{зв(i+1)}$-

[12] (1899-1968) Видатний радянський вчений. Найбільш значущою з довоєнних робіт Г.Г. Баранова була його докторська дисертація "Кінематика просторових механізмів". До відомих робіт Г.Г. Баранова належать переважно наукові дослідження нового виду зачеплення (1954), названого ім'ям його автора - М.Л. Новікова, та оригінальних зубчастих передач з принципово новими робочими поверхнями зубів сполучених коліс.

$I_{зві}$), де i та $i+1$ - два положення ланки зведення, що відповідають початку і кінцю інтервалу $\Delta\alpha_i = \alpha_{i+}i - \alpha_i$.

З врахуванням викладеного рівняння (6.31) набуває вигляду

$$\frac{2\cdot M(\alpha_1,\omega,t)}{\omega}\Delta\alpha_1 = 2\cdot I_{зв}\cdot(\omega_{i+1}-\omega) + \omega_i\cdot\left(I_{зв(i+1)} - I_{звi}\right) \qquad (6.32)$$

Розв'язуючи це рівняння відносно кутової швидкості ω_{i+1}, одержуємо

$$\omega_{i+1} = \frac{M(\alpha_1,\omega,t)}{I_{звi}\cdot\omega_i} + \frac{3\cdot I_{звi} - I_{зв(i+1)}}{2I_{звi}} \qquad (6.33)$$

Знаючи значення для $M(\alpha_1,\omega,t), I_{\text{зві}}, \text{I}_{\text{зв(i+1)}}$ і ω_1, з формули (6.33) при вибраному кроці інтегрування $\Delta\alpha_1$ можна визначити кутову швидкість $\omega_{\text{i+1}}$. Виконуючи крок за кроком обчислення кутової швидкості одержимо функцію $\omega = \omega(\alpha_1)$.

Для визначення часу t руху ланки зведення можна використати умову $dt = d\alpha_1/\omega$.

Замінимо в цьому рівнянні dt на різницю $t_{i+1} - t_i$, $d\alpha_1$-на крок інтервалу $\Delta\alpha_i$ і кутову швидкість ω - на її середнє значення $(\omega_i + \omega_{i+1})$ / 2. У такому випадку можна записати

$$t_{i+1} - t_i = \frac{2\cdot\Delta\alpha_1}{\omega_i + \omega_{i+1}}. \qquad (6.34)$$

звідки визначимо час у положенні $i + 1$:

$$t_{i+1} = t_i + \frac{2\cdot\Delta\alpha_1}{\omega_i + \omega_{i+1}} \qquad (6.35)$$

Такий метод наближеного інтегрування можна використовувати як при аналітичному, так і при графічному зображені всіх функцій.

6.8 Регулювання руху машини

Нерівномірність руху ланок механізму є істотно важливою умовою найвигіднішого його використання. Розрізняють два типи коливання швидкостей механізму - **періодичне і неперіодичне**, що зумовлено переважно зміною навантаження механізму. У

електродвигунах робочий процес відбувається безперервно і при усталеному русі характеризується сталістю рушійного моменту; отже у них періодичних коливань швидкості не буде і головний вал при усталеному русі рухається рівномірно.

У поршневих машинах, наприклад преси, штампи, тощо, в основі яких лежить стержневий механізм, орган, що сприймає роботу сил опору, робить зворотно-поступальні рухи. Це ускладнює регулювання кутової швидкості обертання головного вала машини.

Робочий процес цих машин характеризується замкнутими **циклами**, які при усталеному русі безперервно йдуть один за одним. Корисний опір в основному залежить від технологічного процесу. Таким чином, корисний опір становить змінну величину. За цих умов усталений рух механізму супроводжується періодичною зміною швидкості головного вала машини - кривошипа. Така нерівномірність називається періодичною.

Великі періодичні коливання швидкості неприпустимі, бо вони спричиняють у кінематичних парах додаткові (динамічні) тиски, які знижують загальний **ККД** механізму та надійність його роботи.

ККД (коефіцієнт корисної дії) – відношення корисної роботи сили до її повної величини.

Крім того, великі коливання швидкостей можуть спричинити небажані явища в технологічному процесі (розрив матеріалу в пресах і штампах, вібрації, коливання на виконавчому органі машини спричиняє появу браку, тощо). Через те задача про сталість швидкості обертання в даному разі полягає в тому, щоб неминучі періодичні коливання швидкості усталеного руху довести до такого мінімуму, за яким зазначені явища були б мало відчутними.

Нерівномірність руху механізму характеризується відношенням абсолютної нерівномірності руху механізму, яка визначається різницею ($\omega min_{max}()$), до його середньої швидкості ω_0:

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_C}; \qquad \omega_C = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2} \tag{6.36}$$

де $\omega_{max}, \omega_{min}$ і ω_C - відповідно найбільша, найменша і середня швидкості обертання ланки зведення.

Величина δ називається **коефіцієнтом нерівномірності руху** машини i уявляє собою відношення різниці між найбільшою і найменшою швидкостями за **цикл** до середньої швидкості. Значення коефіцієнтів нерівномірності руху для різних машин наводяться у технічних довідниках. Звичайно при проектуванні механізму задаються наперед бажаним для механізму значенням коефіцієнта δ нерівномірності руху і середньої швидкості ω_C обертання головного вала. Середня швидкість береться рівною номінальній кутовій швидкості.

Задача регулювання руху машини у період її усталеного руху зводиться до підбору такого співвідношення між масами ланок механізму і діючими на них силами, за якого коефіцієнт нерівномірності руху δ не перевищував би наперед заданого значення.

Крім періодичних коливань, при яких швидкості усіх ланок механізму в усіх його положеннях мають певні цикли, у механізмах можливі коливання швидкості, що не мають певного циклу, так звані **неперіодичні коливання швидкості**. Вони можуть виникати з різних причин, як-от: раптова зміна навантаження механізму, включення в механізм додаткових мас, поява нерівномірності у щільності матеріалу, що оброблюється на даному обладнанні, тощо. При раптовому збільшенні навантаження на механізм станеться раптове зменшення або збільшення швидкості ведучого вала механізму, і він вийде із сталого режиму. Задача полягає в тому, щоб автоматично привести потужність двигуна у відповідність з новим навантаженням і відновити усталений рух механізму при новому навантаженні з попередньою або близькою до неї швидкістю.

Ця задача відома під назвою задачі про **регулювання швидкості**.

Спеціальні механізми, що їх застосовують для вирівнювання різниці між рушійними силами і силами опору за допомогою автоматичної дії на відповідні органи механізму, мають назву **регуляторів швидкості**. В таких механізмах, як преси , штампи , молоти, тощо, регулювання руху здійснюється за допомогою додаткової маси – **маховика**, який встановлюється на одному з валів механізму.

Маховик – тверде (круглої форми) тіло, яке додається до ланки зведення, або до інших ланок, механізму для збільшення його кінетичної енергії з метою забезпечення наперед заданого коефіцієнта нерівномірності ходу машини.

6.9 Визначення закону руху машини під дією сил, що залежать від положення ланки зведення

Роздивляючи існуючі технологічні машини, бачимо, що вони, в основному, мають два періоди в роботі - робочий та холостий хід. Під час робочого ходу відбувається технологічний процес де сили опору (корисного) залежать від положення ланки зведення, або постійні.

Зведені моменти рушійних сил і сил корисного опору визначаються формулою (6.3). Робота цих сил

$$A_{зр} = \int_0^{\alpha_1} M_{звр} \cdot d\alpha_1, \qquad A_{зо} = \int_0^{\alpha_1} M_{зво} \cdot d\alpha_1. \qquad (6.37)$$

Згідно з теоремою про зміну кінетичної енергії запишемо:

$$\Delta T = T_1 - T_0 = A_{зр} - A_{зо} = \int_0^{\alpha_1} M_{звр} \cdot d\alpha_1 - \int_0^{\alpha_1} M_{зво} \cdot d\alpha_1. \quad (6.38)$$

З другого боку: $\Delta T = \frac{I_{звi} \cdot \omega_i^2}{2} - \frac{I_{зво} \cdot \omega_0^2}{2}$.

Пропускаючи поки що $\omega_0 = \omega_i$, будемо мати

$$\Delta T = \frac{(I_{звi} - I_{зво}) \cdot \omega_1^2}{2} = f(\alpha_1). \qquad (6.39)$$

Побудуємо фазову діаграму у осях ΔТ і $I_{зв}$ (Рис.6.2).

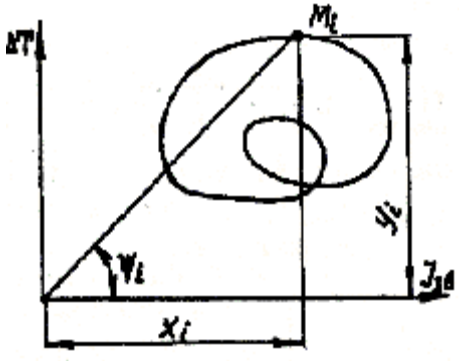


Рисунок 6.2

Ця діаграма має назву **діаграми Віттенбауера**[13] **або діаграми енергомас** для усталеного руху. Ця діаграма на фазі усталеного руху буде замкненою, тому що усі процеси повторюються. Візьмемо на цій діаграмі довільну точку M_i з координатами x_i, та y_i і з'єднаємо її з початком системи координат.

Кут нахилу лінії OM_i позначимо ψ_i.

Зведений момент інерції і кінетична енергія машини у положенні ***i*** визначається формулами:

$$y_i \cdot \mu_T = T_i; \qquad x_i \cdot \mu_I = I_{зві}.$$

Тоді, враховуючи, що: $T_i = I_{зві} \cdot \omega_i^2/2$, маємо:

$$\boldsymbol{tg\psi_i = \frac{y_i}{x_i} = \frac{T_i \cdot \mu_I}{I_{зві} \cdot \mu_T} = \frac{\omega_i^2}{2} \cdot \frac{\mu_I}{\mu_I}} \tag{6.40}$$

$$\text{Звідси } \omega_i = \sqrt{\frac{2 \cdot tg\psi_i \cdot \mu_T}{\mu_I}} = f(\alpha_i) \tag{6.41}$$

З другого боку: $\omega_i = \frac{d\alpha_1}{dt}$; $\quad i \quad dt = d\alpha_1/\omega_i$

Враховуючи значення ω_i за формулою (6.41), визначаємо значення $1/\omega_i$. Чисельно інтегруючи ці значення з параметром $\Delta\alpha_i$, отримаємо залежність $t = t(\alpha_i)$, звідки можемо отримати і залежність $\alpha_i = f(t)$ - тобто закон руху ланки зведення.

6.10 Маховик та його роль

Як було зазначено раніше, регулювання руху механізму можна здійснити за допомогою додаткової маси – **маховика**, який розташований на одному валу з ланкою зведення.

Дія маховика полягає в тому, що при перевищенні роботи рушійних сил над силами опору маховик сприймає на себе надлишок кінетичної енергії механізму і, завдяки своєму великому моменту інерції, не дає швидкості надмірно зростати; коли ж робота сил опору перевищує роботу рушійних сил, маховик віддає нагромаджену кінетичну енергію, протидіючи зменшенню швидкості.

---

[13] Віттенбауер Ф. (1857-1922) – австрійський вчений, який заклав основи графічної динаміки.

В середині циклу усталеного руху кутова швидкість ланки зведення набуває максимального і мінімального значень.

З формули (6.40) можна записати

$$tg\psi_{\max} = \frac{\omega_{\max}^2}{2} \cdot \frac{\mu_I}{\mu_T} = \frac{\omega_{cp}^2}{2} \cdot \frac{\mu_I}{\mu_T} \cdot (1+\delta); \qquad tg\psi_{\min} = \frac{\omega_{\min}^2}{2} \cdot \frac{\mu_I}{\mu_T} = \frac{\omega_{cp}^2}{2} \cdot \frac{\mu_I}{\mu_T} \cdot (1-\delta) \tag{6.42}$$

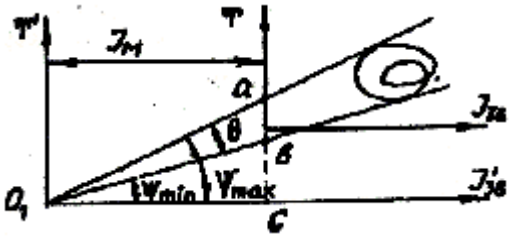


Рисунок 6.3

Повертаючись до діаграми **Віттенбауера**, неважко помітити, що, проводячи дотичні до неї під кутами ψ_{max} і ψ_{min}, отримаємо точку перетину їх десь за межами старої системи координат (див.рис.6.3).

Таким чином, щоб забезпечити задані кути ψ_{max} і ψ_{min} (тобто задане δ) слід збільшити значення $I_{зв}$ на величину $I_м$ (див.рис.6.3), тобто збільшити масу ланки зведення.

З цього можна зробити деякі висновки:

- чим менше δ тим менше різниця між ψ_{max} і ψ_{min}, тобто менше кут θ і тим більше буде $I_м$;
- Зі збільшенням середньої кутової швидкості ланки зведення $I_м$ зменшується.

Таким чином маховик в період, коли $A_{ЗВР} > A_{звo}$ накопичує кінетичну енергію, збільшує свою кутову швидкість, а в період , коли $A_{ЗВР} < A_{ззо}$ віддає свою кінетичну енергію, зменшуючи при цьому свою кутову швидкість. Звідси видно, що **маховик є акумулятором кінетичної енергії.**

6.11 Визначення момента інерції маховика

6.11.1 Визначення момента інерції маховика методом Гут'яра[14]

Представимо кінетичну енергію машини у вигляді суми:

$$T = T_м + T_c\ , \tag{6.43}$$

де T- повна кінетична енергія машини, - кінетична енергія маховика, T_c - кінетична енергія машини без маховика.

Звідси кінетична енергія маховика

$$T_м = T - T_c. \tag{6.44}$$

Якщо зважити на те, що кутова швидкість ланки зведення умовно може бути тільки ω_{max} або ω_{min}, то можливим буде запис:

$$T_C' = I_{зві} \cdot \omega_{max}^2 \quad \text{та} \quad {}^{''}C_{зві}{}^{2}{}_{min}$$

Тоді рівняння (6.44) набувають вигляду:

$$T_M' = T - T_C' \qquad \text{і} \qquad T_M'' = T - T_C''. \tag{1.45}$$

Порівнюючи праві частини цього рівняння, зауважимо що, коли $\omega = \omega_{max}$, то і $T=T'$ а при $\omega = \omega_{min}$,$T=T''$. Приріст кінетичної енергії $\Delta T = T' - T''$. Приріст кінетичної енергії машини без маховика $\Delta T'c = T'c - T'co$ і $\Delta T'c = T'c - T''co$, або

$$\Delta T_C' = T_C' - T_{CO}' = (I_{зві} - I_{зво}) \cdot \omega_{max}^{2_{зві}{}^{2}{}_{max}} \quad \Delta T_C'' = T_C' - T_{CO}'' = (I_{зві} - I_{зво}) \cdot \omega_{min}^{2_{зві}{}^{2}{}_{min}}$$

Приріст кінетичної енергії маховика:

$$\Delta T_M' = \Delta T - \Delta T_C' \qquad i \qquad \Delta T_M'' = \Delta T - \Delta T_C''. \tag{6.46}$$

[14] Є.М. Гут'яр (1895 - 1968) – один із зачинателів наукового машинобудування.

Для кращого розуміння цих формул викреслимо графіки (Рис. 6.4):

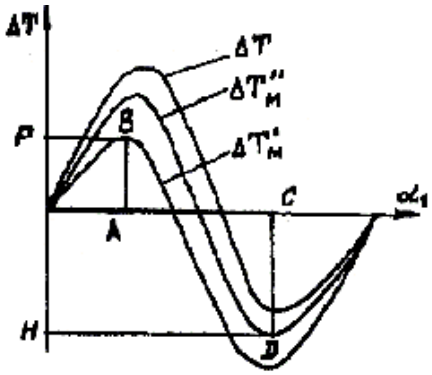


Рисунок 6.4

1 Знаючи діаграму зовнішнього навантаження, визначимо приріст кінетичної енергії машини і побудуємо діаграму $[\Delta T,\ \alpha_1]$, (див.рис.6.4).

2 Розраховуючи за вище наведеними формулами приріст кінетичної енергії машини без маховика, будуємо діаграми $[\Delta T'_M, \alpha_1]$ і $\left[\Delta T''_M, \alpha_1\right]$.

3.Визначимо максимальне і мінімальне значення на діаграмах $[\Delta T'_M, \alpha_1]$ і $\left[\Delta T''_M, \alpha_1\right]$.

$$\Delta T'_{M_{MAX}} = AB \cdot \mu_T, \qquad \Delta T''_{M_{MIN}} = CD \cdot \mu_T.$$

Звідси $\Delta T'_{M_{MAX}} - \Delta T''_{M_{MIN}} = FH \cdot \mu_T$.

Інакше: $\Delta T'_{M_{MAX}} = T'_{M_{MAX}} - T'_{MO}; \quad \Delta T''_{M_{MIN}} = T''_{M_{MIN}} - T''_{MO}$

$$T'_{M_{MAX}} - T''_{M_{MIN}} = I_M\left(\frac{\omega^{2^2_{min}}_{max}}{2};\quad T'_{MO} - T''_{MO} = I_{MO}\left(\omega^{2^2_{min}}_{max}/2.\right)\right)$$

Тоді

$$\Delta T'_{M_{MAX}} - \Delta T''_{M_{MIN}} = \left(T'_{M_{MAX}} - T''_{M_{MIN}}\right) + \left(T'_{MO} - T''_{MO}\right)$$
$$= (I_M + I_{MO}) \cdot \left(\frac{\omega^{2^2_{min}}_{max}}{2} = FH \cdot \mu_T.\right)$$

$$I_M = \frac{FH \cdot \mu_T}{\delta \cdot \omega^2_{cep}} - I_{MC}, \quad \text{де} \quad \delta \cdot \omega^2_{cep} = \frac{\omega}{max^2_{2^2_{min}}}.$$

6.11.2 Визначення момента інерції маховика методом Віттенбауера. Будуємо діаграму **Віттенбауера**, тобто діаграму енерго-мас (Рис.6.2).

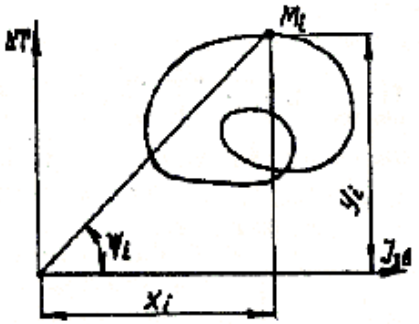


Рисунок 6.5

За формулами (6.42) розраховуємо кути ψ_{max} і ψ_{min}. Проводимо дотичні до діаграми енерго-мас під кутами ψ_{max} і ψ_{min} до їх пересічення і визначити *Iм*. Але знайти на кресленні точку O_1 перетину дотичних, тобто нової системи координат, важко, тому, що різниця між кутами ψ_{max} і ψ_{min} невелика. Тому визначимо *Iм* через відрізок *aЬ,* який утворюється перетином дотичних з віссю *ΔТ*.

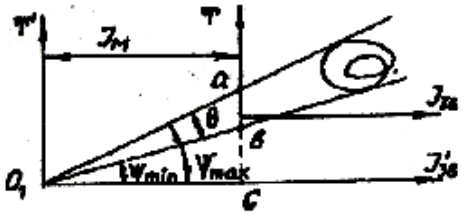


Рисунок 6.6

Запишемо $I_M = O_1C \cdot \mu_I$,

$$O_1C = \frac{ac}{tg\psi_{max}\dfrac{bc}{tg\psi_{min}}}.$$

Тоді: $ab = ac - bc = O_1C \cdot (tg\psi min_{max})$

Звідси: $$O_1C = \frac{I_M}{\mu_I} = \frac{ab}{tg\psi min_{max}} \qquad (6.47)$$

Визначимо різницю тангенсів

$$tg\psi \frac{\omega_{cep}^2}{2}\frac{\mu_T}{\mu_I}(1+\delta-1+\delta)\frac{\omega_{cep}^2 \cdot \mu_T \cdot \delta}{\mu_I} min_{max}$$

Підставимо це значення у формулу (6.47). Маємо

$$I_M = \frac{ab \cdot \mu_T}{\omega_{cep}^2 \cdot \delta}. \qquad (6.48)$$

За такою формулою визначається момент інерції маховика, якщо він розташований на ланці зведення. Взагалі ж його можна розташовувати і на інших ланках (валах), які обертаються з іншою кутовою швидкістю ω_i. При цьому треба дотримуватись рівності кінетичних енергій.

$$\frac{I_M \cdot \omega_1^2}{2} = \frac{I_M^{'} \cdot \omega_i^2}{2}, \qquad \text{Звідки} \qquad I_M^{'} = I_M \cdot \left(\frac{\omega_1^2}{\omega_i^2}\right) = \frac{I_M}{U_{i1}^2}. \qquad (6.49)$$

З цієї формули видно, що із збільшенням кутової швидкості вала розташування маховика відносно ланки зведення, момент інерції зменшується на величину квадрата передаточної функції.

7. КІНЕТОСТАТИЧНИЙ (СИЛОВИЙ) АНАЛІЗ МЕХАНІЗМУ

Визначення сил, що діють на ланки механізму , має велике практичне значення для розрахунків ланок на міцність, жорсткість, вібростійкість, зносостійкість, для визначення втрат енергії на тертя, а також для підрахунку енергетичного балансу машини на виконання інших подібних розрахунків.

Основними задачами силового розрахунку механізмів є:

- визначення зовнішніх невідомих сил, що діють на ланках механізмів;

- визначення сил взаємодії ланок у місцях їх стикання, тобто реакції у кінематичних парах;

- визначення зрівноважуючої сипи або зрівноважуючого моменту сил.

Розв’язуючи задачі силового розрахунку механізмів, припускають, що закон руху початкової ланки задано, а також, що маси і моменти інерції ланок відомі. Отже завжди можна визначити ті сили інерції, які необхідні для розв'язання задач силового розрахунку. В першому наближенні силовий розрахунок проводять без врахування сил тертя у кінематичних парах.

Найпростішим випадком силового розрахунку механізмів є рівновага, тобто коли ланки механізму знаходяться у стані спокою або поступального рівномірного руху. У цих випадках не виникають динамічні сили (сили інерції). Тому для розв'язання такої задачі досить рівнянь статики. У загальному випадку, якщо є прискорення, виникають сили і моменти сил інерції і рівнянь статики тут замало. Щоб розв'язати таку задачу про знаходження сил, використовують **принцип Д’Аламбера,** згідно з яким рухома система тіл перебуває у кожний момент часу в рівновазі під дією зовнішніх сил, включаючи і сили і моменти сил інерції.

Таким чином, користуючись принципом Д’Аламбера, можна задачу динаміки розв'язати методами статики, якщо умовно віднести до зовнішніх сил і сили (моменти сил) інерції, які виникають при русі ланок з прискоренням і діють на елементи кінетичних пар як додаткові сили. Проте треба твердо пам'ятати, що сили і моменти сил інерції, які

прикладаємо до ланки, умовні. Вони діють на іншу ланку, яка спричиняє прискорений рух даної ланки. У такому контексті і розуміють характер сил і моментів сил інерції.

Розв'язання задачі динаміки методами статики називають **кінетостатичним розрахунком**.

7.1 Статична визначенність кінематичного ланцюга

Як відомо з курсів теоретичної механіки та опору матеріалів, задача про визначення сил легко розв'язується для статично визначених систем. Нагадаємо, **що статично визначеною системою називають таку систему, в якій кількість невідомих сил дорівнює числу рівнянь рівноваги, які можна скласти для їх визначення**.

У розділі [1.2] ми розглядали сили, що діють у механізмах. Можна їх умовно поділити на ті, які ми можемо визначити до силового розрахунку, і сили невідомі, до яких ми можемо віднести реакції в кінематичних парах. Відомими силами є зовнішні сили (сили корисного опору, сили ваги, сили і моменти сил інерції, які ми можемо визначити після кінематичного аналізу, тощо). Невідомими силами є тільки сили реакцій у кінематичних парах. Саме їх кількість і визначає, яка є система - статично визначеною чи ні. Тому розглянемо визначеність кінематичних пар плоских механізмів.

7.2 Реакції в кінематичних парах

Кінематичні пари плоских механізмів бувають 4 та 5 класів. У вищій парі 4-го класу (Рис.7.1,а) реакція R_{21} напрямлена вздовж спільної нормалі *n-n* (без врахування тертя) і прикладена у точці дотику С. Тому в такій кінематичній парі відомими є точка прикладення та напрям сили реакції. Невідомим є її величина. Таким чином **кінематична пара 4-го класу є статично невизначеною один раз.**

Рисунок 7.1

Кінематичні пари 5-го класу бувають обертальні (Рис.7.1, б) і поступальні (Рис.7.1,в).

Сили реакцій (сили взаємодії) між двома тілами (ланками), які стикаються, при відсутності тертя завжди напрямлені вздовж спільної нормалі до поверхонь дотику. В обертальній кінематичній парі поверхня дотику є замкнутою циліндричною поверхнею. Тому реакція R_{21}, яка прикладена до ланки 2 з боку 1, буде завжди проходити через центр шарніра О. Величина і напрям дії цієї сили невідомі. У поступальній кінематичній парі результуюча реакція R_{21} буде напрямлена перпендикулярно до осі руху *x-x* ланок цієї пари, при цьому невідомими лишаються її величина та точка прикладення С.

Таким чином **кінематичні пари 5-го класу є статично невизначеними двічі.**

Висновок: кожна кінематична пара 4-го класу дає одну невідому величину, а кожна кінематична пара 5-го класу дає дві невідомі величини.

Якщо в кінематичному ланцюзі буде p_4 кінематичних пар 4-го класу, то загальна кількість невідомих величин буде p_4, а якщо в кінематичному ланцюзі буде p_5 кінематичних пар 5-го класу, то вони дадуть $2p_5$ невідомих величин. Всього ж кінематичні пари плоских механізмів дають $S = (p_4+2p_5)$ невідомих.

7.3 Умова статичної визначеності кінематичного ланцюга

Якщо кінематичний ланцюг складається з n - ланок і для кожної з них ми можемо скласти 3 рівняння рівноваги, то для усього кінематичного ланцюга можна скласти $3n$ рівнянь рівноваги. Умовою статичної визначеності є рівність

$$3n = S = p_4 + 2 \cdot p_5.$$

Якщо перенести праву частину у лівий бік рівняння, отримаємо

$$3n - p_4 - 2p_5 = 0. \qquad (7.1)$$

Вираз, який знаходиться ліворуч у рівності (7,1), показує, що такий кінематичний ланцюг, як механізм, є статично визначеним, тому

що для механізму ця різниця є більшою нуля, тому що ступінь волі механізму завжди більше нуля (W>0).

Таким чином **механізм є статично визначеною системою**.

Однак, розглядаючи **групу Ассура** і враховуючи, що в групі Ассура є тільки кінематичні пари 5-го класу, тобто $p_4 = 0$, маємо

$$3n - 2\,p_5 = 0.$$

Для групи Ассура ця різниця теж рівна нулю. Таким чином **група Ассура є статично визначеною системою**

Від того, як ми проводитимемо кінетостатичний розрахунок, для механізму в цілому або по групах Ассура, і методи кінетостатичного розрахунку поділяються на аналітичний і графоаналітичний.

7.4 Аналітичний метод кінетостатичного розрахунку механізму

Як ми вже зазначали, на механізм діють зовнішні і внутрішні сили. До зовнішніх сил можна віднести і сили та моменти сил інерції, тому що вони залежать від зовнішніх умов руху ланок механізму. В аналітичному методі ці сили визначаються за допомогою матриці прискорення та масової матриці.

В аналітичному методі (Рис. 7.2) сили інерції прикладаються вздовж осей координат тільки у зворотному напрямку, припускаючи, що прискорення центрів ваги будуть додатними.

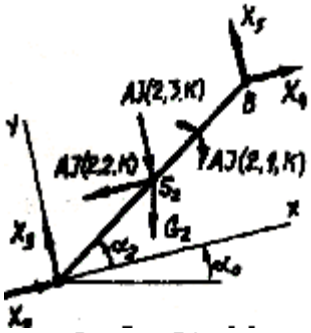


Рисунок 7.2

Якщо прискорення за кінематичними розрахунками будуть мати від'ємні значення, то ці знаки увійдуть у відповідні рівняння до сил

інерції міняючи їх значення. Реакції в кінематичних парах також показуємо у додатному напрямку осей координат, якщо ця реакція проставляється вперше. І сили інерції, і реакції в кінематичних парах проставляються у вигляді проекцій на осі координат. При переході до другої ланки реакції в одній і тій же кінематичній парі показуються у зворотному напрямку. Величини сил інерції визначаються за допомогою ЕОМ у матричному вигляді. Для цього складається матриця моментів інерцій і мас ланок:

$$M(I,J) = \begin{Vmatrix} I_{S1} & m_1 \\ I_{S2} & m_2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ I_{Sn} & m_n \end{Vmatrix}.$$

З розділу кінематики прискорення всіх точок та ланок механізму визначаються матрицею:

$$A(I,J,K) = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1 & a_{S1x} & a_{S1y} \\ \varepsilon_2 & a_{S2x} & a_{S2y} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \varepsilon_n & a_{Snx} & a_{Sny} \end{Vmatrix}.$$

Перемножуючи ці дві матриці між собою, отримаємо матрицю інерційних навантажень, в яку будуть занесені всі значення моментів сил інерції і проекції сил інерції:

$$AI(I,J,K) = A(I,J,K) \cdot M(I,J) = \begin{Vmatrix} M_1^i & F_{1x}^i & F_{1y}^i \\ M_2^i & F_{2x}^i & F_{2y}^i \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ M_n^i & F_{nx}^i & F_{ny}^i \end{Vmatrix}.$$

В цих матрицях *I* - номер ланки, тобто номер рядка, *J* - номер стовпця в яких за номером 1 вказуються кутові прискорення, або моменти інерції ланок, або моменти сил інерції, за номером 2 - проекції прискорення центра ваги на вісь *X*, або маси ланок, або проекції сил інерції на вісь *X*, за номером 3 - проекції прискорення центра ваги на

вісь *У*, *К* - номер положення механізму, який визначається кутом α_1 ведучої ланки від осі координат *Х*.

В аналітичному методі увесь механізм умовно розділяється на окремі ланки, до яких прикладаються всі зовнішні сили і сили реакцій, а потім складаються рівняння рівноваги.

$$4) \quad X_2 + X_4 - AJ(2,2,K) - G_2 \cdot Sin\alpha_2 = 0;$$
$$5). \quad X_3 + X_5 - AJ(2,3,K) - G_2 \cdot Cos\alpha_2 = 0;$$
$$6) \ -X_4 \cdot L_2 \cdot Sin\alpha_2 + X_5 \cdot L_2 \cdot Cos\alpha_2 +$$
$$+0.5 \cdot L_2(AJ(2,2,K) \cdot Sin\alpha_2 - AJ(2,3,K) \cdot Cos\alpha_2) - AJ(2,1,K) = 0.$$

Для ланки 3 складемо рівняння рівноваги:

$$7) -X_4 + X_6 - AJ(3,2,K) - G_3 \cdot Sin\alpha_3 = 0;$$
$$8) -X_6 + X_7 - AJ(3,3,K) - G_3 \cdot Cos\alpha_3 = 0;$$
$$9) \ X_6 \cdot L_3 \cdot Sin(2\pi - \alpha_3) + X_7 \cdot L_3 \cdot Cos(2\pi - \alpha_3) +$$
$$+0.5 \cdot L_3\big(AJ(3,2,K) \cdot Sin(2\pi - \alpha_3) - AJ(3,3,K) \cdot Cos(2\pi - \alpha_3)\big) -$$
$$-AJ(3,1,K) = 0.$$

Рівняння, складені для усього механізму, а їх буде 3n, переписуються у такому вигляді, щоб у лівій частині були всі невідомі сили, а в правій - всі відомі сили. Для вирішення системи 3n лінійних рівнянь рівноваги за допомогою ЕОМ. складаються матриці А - матриця коефіцієнтів при невідомих силах і матриця В - стовпцева матриця правих частин рівнянь.

Таким чином наші рівняння мають вигляд: **A • X = B.**

Вводячи значення коефіцієнтів матриць А і В до програми розв'язку системи 3n рівнянь рівноваги GAUSS визначають невідомі сили Х - тобто реакції в кінематичних парах.

7.5 Графоаналітичний метод кінетостатичного розрахунку механізму

Раніше ми говорили про те, що **групи Ассура** є статично визначеною системою. Це використовується у графоаналітичному методі силового розрахунку механізму,

Для визначення сил і моментів сил інерції будується план прискорень на якому показуємо прискорення центрів ваги ланок. Покажемо цей метод на прикладі механізму преса (Рис.7.3)

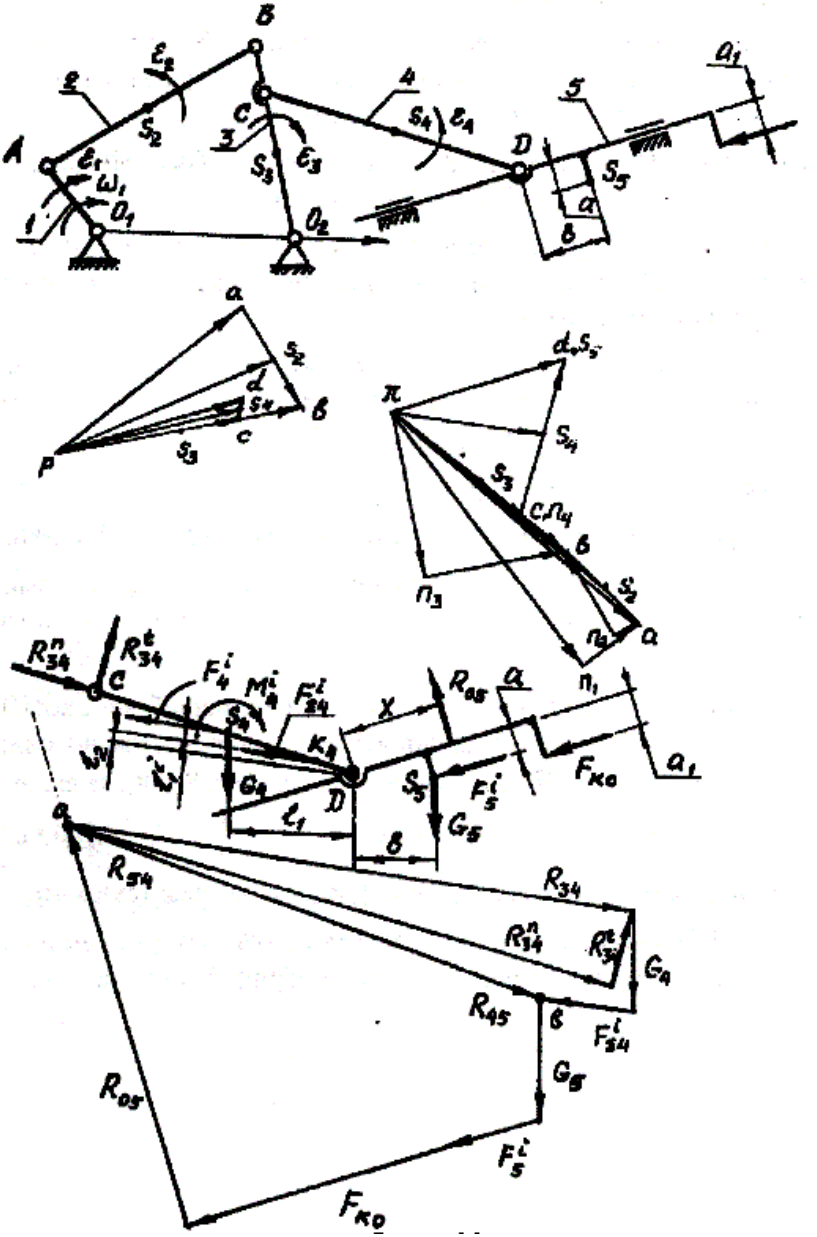

B
A
C
D
O_1
O_2
S_2
S_3
S_4
S_5
ε_1
ε_2
ε_3
ε_4
ω_1
a_1
a
b
c
d
P
π
n_1
n_2
n_3
n_4
R^n_{34}
R^t_{34}
F^i_4
M^i_4
F^i_{34}
K_4
G_4
G_5
F^i_5
$F_{ко}$
R_{05}
R_{54}
R_{34}
R_{45}
F^i_{54}
l_1
X

Рисунок 7.3

Порядок розрахунків такий:

1. Креслимо механізм у заданому положенні ведучої ланки.

2. Будуємо для нього плани швидкостей та прискорень, з яких визначаємо повні прискорення центрів ваги ланок і кутові прискорення ланок.

3. Визначаємо сили інерції і моменти сил інерції, які діють на кожну ланку окремо. Для більшої зручності силу інерції і момент сили інерції заміняємо рівнодіючою F_n^i, яка прикладається в точці K_i, за величиною дорівнює силі інерції і розташована на відстані $l_n^i = M_n^i/F_n^i$ від центра ваги ланки (див.рис.7.3 і рис.7.4).Плече l_n^i відкладається таким чином, щоб дія рівнодіючої відносно центра ваги співпадала з напрямком дії моменту сили інерції (див. розділ зведення сили до обраного центра з курсу теоретичної механіки).

4. Креслимо останню з приєднаних до ведучої ланки групу Ассура і прикладаємо до неї усі зовнішні сили, що діють на цю групу.

5. В елементах кінематичних пар, в яких ми звільнились від в'язів, прикладаємо реакції в'язів. Реакції в обертальних парах замінюємо двома її складовими напрямленими вздовж ланок і перпендикулярно до них. Реакції в поступальній парі напрямляємо перпендикулярно до напрямку руху повзуна.

6. Складаємо рівняння рівноваги.

Для плоскої системи довільно розташованих сил умовою рівноваги є рівність нулю головного вектора і головного моменту сил:$\vec{R}_0 = 0; \vec{M}_0 = 0.$ Рівність нулю головного моменту $\vec{M}_0$ означає, що головні моменти сил, складені окремо для кожної ланки групи Ассура, теж повинні бути рівними нулю, тобто

$$\vec{M}_{04} = 0; \vec{M}_{05} = 0,$$
$$\text{або } M_{04} = \sum m_D(F_4) = 0; M_{05} = \sum m_D(F_5) = 0. \quad (7.2)$$

За точку, відносно якої беруться моменти сил, приймається точка, яка є кінематичною парою, що з'єднує ланки між собою у групі Ассура.

Для групи Ассура, складеної з ланок 4 і 5, рівняння (7.2) мають вигляд:

$$M_{04} = \sum m_D(F_4) = -R_{34}^t \cdot CD + F_4^i \cdot l_2 + G_4 \cdot l_1 = 0; \quad (7.3)$$
$$M_{05} = \sum m_D(F_5) = R_{05} \cdot x - F_5^i \cdot a - G_5 \cdot b - F_{ko} \cdot a_1 = 0; \quad (7.4)$$

З рівняння (7.3) визначаємо реакцію R_{34}^{t}. Рівняння (7.4) використовується для визначення координати *x* положення реакції R_{05} після визначення самої реакції.

Головний вектор розписуємо як векторну суму сил, що діють на групу Ассура в цілому:

$$\vec{R}_0 = \sum \vec{F}_i = \vec{R}_{05} + \vec{G}_5 + \vec{F}_5^i + \vec{F}_{ko} + \vec{R}_{45} + \vec{R}_{54} + \\ +\vec{G}_4 + \vec{F}_4^i + \vec{R}_{34}^t + \vec{R}_{34}^n = 0. \qquad (7.5)$$

* ** ***

В цьому рівнянні позначено:

* - реакції дії і протидії ланок 4 і 5 між собою, які, при розгляданні сил, діючих на кожну ланку окремо, виступають як зовнішні сили;

**- векторна сума сил, що діє на ланку 5 окремо;

$$\vec{R}_5 = \sum \vec{F}_5 = \vec{R}_{05} + \vec{G}_5 + \vec{F}_5^i + \vec{F}_{ko} + \vec{R}_{45} = 0 \qquad (7.6)$$

*** - векторна сума сил, що діє на ланку 4 окремо

$$\vec{R}_4 = \sum \vec{F}_4 = \vec{R}_{54} + \vec{G}_4 + \vec{F}_4^i + \vec{R}_{34}^t + \vec{R}_{34}^n = 0 \qquad (7.7)$$

В рівнянні (2.5) невідомими с величини реакцій $\vec{R}_{05}$ і $\vec{R}_{34}^n$, які ми визначаємо з векторного силового многокутника (див. рис. 7.3). В цьому многокутнику початок побудови сил для ланки 5 позначено літерою ***a***, а кінець їх - літерою ***b***. З'єднавши ці літери на плані сил, визначимо реакції $\vec{R}_{45}$ і $\vec{R}_{54}$ за величинами (з урахуванням масштабного коефіцієнта) і за напрямками.

Переходимо до групи Ассура, складеної з ланок 2 і 3 (див. рис. 7.4). Для цієї групи складаємо рівняння рівноваги окремо для ланок 2 і 3.

$$M_{02} = \sum m_B\left(\vec{F}_2\right) = R_{12}^t \cdot AB - F_2^i \cdot l_{10} + G_2 \cdot l_8 = 0; \qquad (7.8)$$

$$M_{03} = \sum m_B(F_3) = R_{03}^t \cdot BO_2 - G_3 \cdot l_5 - F_3^i \cdot l_6 - R_{43} \cdot l_7 = 0 \qquad (7.9)$$

З цих рівнянь визначаємо тангенціальні складові реакцій, R_{12}^t і R_{03}^t.

Складаємо векторне рівняння суми сил, що діють на групу Ассура в цілому:

$$\vec{R}_0 = \sum \vec{F}_i = \vec{R}_{12}^n + \vec{R}_{12}^t + \vec{G}_2 + \vec{F}_2^i + \vec{R}_{32} + \vec{R}_{23} + \\ = \vec{R}_{45} + \vec{F}_3^i + \vec{G}_3 + \vec{R}_{03}^t + \vec{R}_{03}^n = 0$$

Відповідно до цього рівняння будуємо силовий многокутник, з якого визначаємо реакції $\vec{R}_{12}^n, \vec{R}_{03}^n, \vec{R}_{12}, \vec{R}_{03}, \vec{R}_{32}$ або $\vec{R}_{23}$ за величинами і напрямками.

Переходимо до силового розрахунку ведучої ланки-кривошипа ОА. Ця ланка жорстко з'єднана з зубчатим колесом Z_2 якому рух передається від зубчатого колеса Z_1. Рушійна сила передається від колеса 1 до колеса 2 і відповідно до кривошипа ОА, Ця сила діє по лінії зачеплення, яка напрямлена під кутом зачеплення α_W до дотичній до початкових кіл зубчатих коліс.

Знаючи лінії дії сил R_{21} і F_P показуємо лінію дії реакції R_{01}. За теоремою про рівновагу трьох сил лінії їх дії перетинаються в одній точці. Треба зважити на те, що напрямок сили F_P приймається по лінії зачеплення, але так щоб сила F_P діяла від колеса I на колесо 2 і одночасно створювала момент відносно точки О у протилежному напрямку дії моменту від сили R_{21} відносно того ж центра О.

Запишемо рівняння рівноваги кривошипа ОА:

$$\vec{R}_{21} + \vec{F}_P + \vec{R}_{01} = 0 \qquad (7.10)$$

Будуємо векторний многокутник за рівнянням (7.10), з якого визначаємо сили F_P і R_{01} за величинами і напрямками (див.рис.7.4).

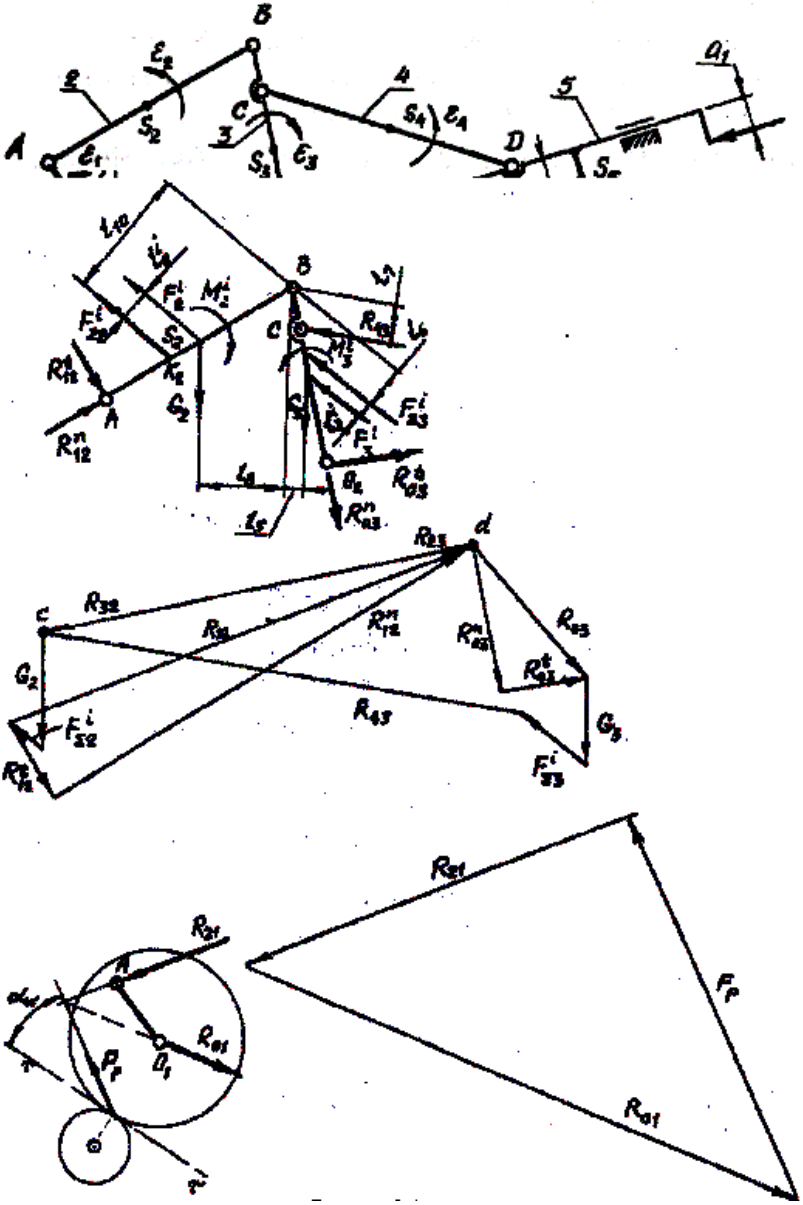

B
A
C
D
2
3
4
5
S_2
S_3
S_4
ε_1
ε_2
ε_3
ε_4
a_1
l_{10}
l_4
l_5
F^i_{20}
F^i_2
M^i_2
M^i_3
R^t_{12}
R^n_{12}
R^t_{03}
R^n_{03}
F^i_{23}
F^i_3
G_2
G_3
R_{32}
R_{12}
R_{23}
R_{43}
R_{03}
F^i_{32}
F^i_{23}
R_{21}
R_{01}
F_p
P_p
O_1
α_w

Рисунок 7.4

7.6 Графоаналітичний метод кінетостатичного розрахунку механізму третього класу

Для прикладу візьмемо механізм, який складається з ведучої ланки і однієї групи Ассура **третього класу** (Рис.7.5).

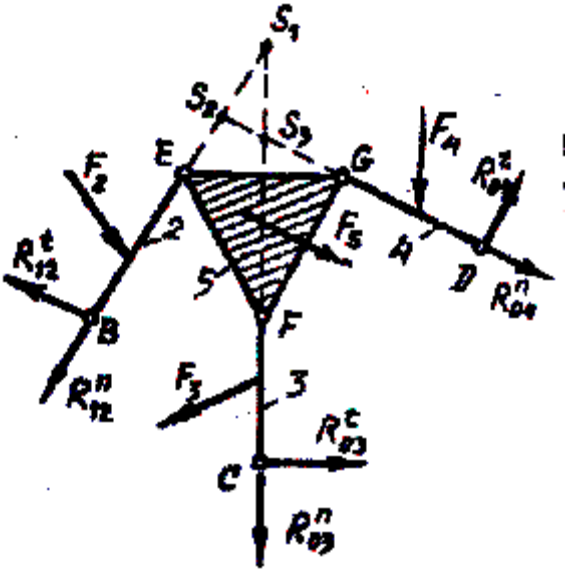


Рисунок 7.5

Відокремимо групу Ассура і прикладемо до неї всі зовнішні сили. Для спрощення задачі всі зовнішні сили (тобто сили ваги, сили інерції, момент сил інерції, тощо), які діють на кожну ланку окремо, замінюємо рівнодіючими силами прикладеними до відповідних ланок у центрах зведення. Такими силами є $\vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ і $\vec{F}_5$. Як і в кінематичному аналізі покажемо особливі точки Ассура - точки S_1, S_2 і S_3. Складаємо рівняння рівноваги з умови рівності нулю головного моменте усіх сил, що діють на кожну ланку окремо:

$$\sum m_E(F_2) = 0, \sum m_F(F_3) = 0,$$
$$\sum m_G(F_4) = 0.$$

З цих рівнянь визначаємо тангенціальні складові реакцій R_{12}^t, R_{03}^t і R_{04}^t. Тепер складаємо рівняння моментів сил, що діють на всю групу Ассура, відносно будь - якої точки Ассура, наприклад точки S_1. Як видно з малюнка лінії дії сил R_{12}^n і R_{03}^n пересічуться в цій точці. Таким чином з невідомих сил момент відносно точки S_1 складає тільки сила R_{04}^n. Саме її ми і визначимо з такого рівняння. Тепер у нас залишаються дві невизначені за величинами сили R_{12}^n і R_{03}^n. Для їх визначення можна скласти або рівняння моментів усіх сил, що діють на групу в цілому, відносно точок S_2 та S_3 або скласти векторне рівняння сил, діючих на групу Ассура, і побудувати векторний многокутник сил. Ці варіанти рівнозначні.

7.7 Визначення зрівноважуючої сили методом жуковського. Теорема Жуковського

Дуже часто є необхідність визначення зрівноважуючої сили, а метод наведений вище є досить громіздкий. Крім того чим більше шлях до результату тим більше й можлива помилка у розрахунках. Не завжди є необхідність у визначенні реакцій в кінематичних парах. Саме цим вимогам і відповідає метод **Жуковського**.

Теорема Жуковського:

Якщо механізм під дією системи сил, прикладених до нього, знаходиться у стані рівноваги, то і план швидкостей, повернутий на 90° у будь-який бік і який розглядається як тверде тіло (незмінна система), що обертається навколо полюса плана, навантажений тими ж силами у відповідних точках, теж знаходиться в рівновазі.

Для доказу теореми Жуковського використаємо **загальне рівняння динаміки** {дивись теоретичну механіку, розділ динаміки). **Якщо до матеріальної системи прикласти усі зовнішні сили і сили інерції, то сума робіт цих сил на можливих переміщеннях точок їх прикладення дорівнює нулю.**

$$\sum \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i + \sum \vec{F}_i^i \cdot \delta\vec{r} = 0, \qquad (7.11)$$

або $$\sum F_i \cdot \delta r_i \cdot Cos\left(\vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i\right) + \sum F_i^i \cdot \delta r_i \cdot Cos\left(\vec{F}_i^i \cdot \delta\vec{r}\right) = 0 \qquad (7.12)$$

Для системи, що має стаціонарні в'язі (в'язі, що не залежать від часу), можливі переміщення співпадають з дійсними. Вважаємо також сили інерції звичайними зовнішніми силами, що прикладені до рухомої системи. Тоді:

$$\sum F_i \cdot dr_i \cdot Cos\left(\vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i\right) = 0 \qquad (7.13)$$

Для механізму з ідеальними в'язями усі переміщення відбуваються за один і той же інтервал часу dt. Поділивши рівняння (3.3) на dt, маємо:

$$\sum F_i \cdot \frac{dr_i}{dt} \cdot Cos\left(\vec{F}_i, \frac{d\vec{r}_i}{dt}\right) = \sum F_i \cdot V_i \cdot Cos\left(\vec{F}_i, \vec{V}_i\right) = 0 \qquad (7.14)$$

Рівняння (7.14) є **рівнянням потужностей:**

Якщо механізм знаходиться в стані рівноваги, то сума миттєвих потужностей усіх зовнішніх сил і моментів, прикладених до ланок механізму, дорівнює нулю.

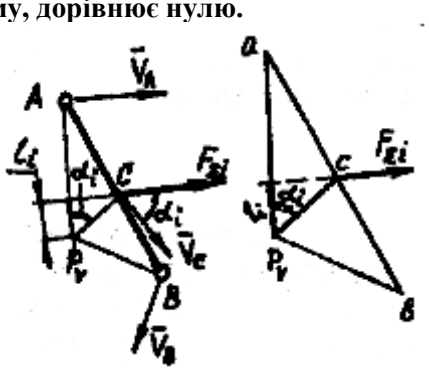


Рисунок 7.6

Візьмемо ланку АВ (Рис.7.6) для якої відомі швидкості точок і на яку діє результуюча усіх сил - сила $F_{\Sigma i}$. Швидкість точки С прикладення сили $F_{\Sigma i}$, визначимо через миттєвий центр швидкостей. Покажемо план швидкостей, побудований для цієї ланки, повернутий на 90°.

Прикладемо до повернутого плана швидкостей у точці c силу $F_{\Sigma i}$. Плече сили $F_{\Sigma i}$ полюса плана швидкостей l_i створює з швидкістю V_C кут α_i. Кут між силою $F_{\Sigma i}$ і вектором швидкості V_C на ланці теж дорівнює α_i.

Рівняння можливих потужностей для цього випадку має вигляд: $\sum F_{\Sigma i} \cdot V_C \cdot Cos\alpha_i = 0$.

З повернутого плана швидкостей бачимо, що $l_i = pc \cdot \mu_V \cdot Cos\alpha_i = V_C \cdot Cos\alpha_i$. Таким чином рівняння можливих потужностей перетворюється на рівняння

$$\sum F_{\Sigma i} \cdot l_i = 0.$$

Це рівняння є рівнянням суми моментів усіх сил, прикладених у відповідних точках повернутого на 90° плана швидкостей, відносно його полюса, що і треба було доказати.

8. ЗРІВНОВАЖЕННЯ СИЛ ІНЕРЦІЇ

8.1 Основні відомості про зрівноваження.

В процесі руху ланок механізму або машини в кінематичних парах виникають динамічні сили, які є результатом руху ланок з прискоренням, тобто результатом дії сил та моментів сил інерції. Ці сили і спричиняють додаткові зусилля в кінематичних парах, які передаються також і на фундамент.

Сили інерції змінні і їх проекції на осі координат теж є функціями складними, періодичними, період яких пропорційний періоду обертання кривошипа. Ці сили викликають коливання окремих ланок і механізму в цілому, а також передаються через фундамент іншому обладнанню.

Особлива небезпека виникає тоді коли частота коливань наближається до власної частоти обладнання або споруд (явище резонансу).

Для уникнення цього явища треба зрівноважувати рухаючі маси, або застосовувати інші застережливі засоби ізоляції фундаментів або машин від фундаментів.

Розрахунки, в результаті яких визначається розподіл мас ланок, при якому не виникають динамічні зусилля на опорах, має назву динамічного зрівноваження.

Сили інерції ланок, які здійснюють плоский або поступальний рух, зрівноважити тільки розподілом мас рухаючих ланок неможливо.

Сили інерції ланок, що здійснюють обертальний рух навколо нерухомої осі, можна зрівноважити штучно зміщуючи центр ваги постановкою противаг.

Всі сили інерції ланок механізму можуть бути замінені однією рівнодіючою силою інерції, яка повністю сприймається фундаментом. Ця рівнодіюча може бути повністю, або частково, зрівноважена таким чином, що на фундамент не буде діяти динамічна сила, або вона буде мінімальна.

Звідси дві задачі зрівноваження:

- зрівноваження обертаючих мас;
- зрівноваження механізмів (повне або часткове).

8.2 Визначення положення загального центра мас механізму

Покажемо систему довільно розташованих мас відносно системи координат ОХУ. Положення їх визначається радіусами-векторами $\vec{r}_i$ і кутами α_i.

З теоретичної механіки відомо: $M \cdot \vec{r}_S = \sum m_i \cdot \vec{r}_i$, де $M = \sum m_i$- загальна маса механізму. Звідси можна записати:

$$\vec{r}_S = \frac{\sum m_i \cdot \vec{r}_i}{M}; \quad X_S = \frac{\sum m_i \cdot x_i}{M}; \quad Y_S = \frac{\sum m_i \cdot y_i}{M}. \qquad (8.1)$$

Графічне вирішення задачі показано на Рис.8.1, у вигляді векторного многокутника.

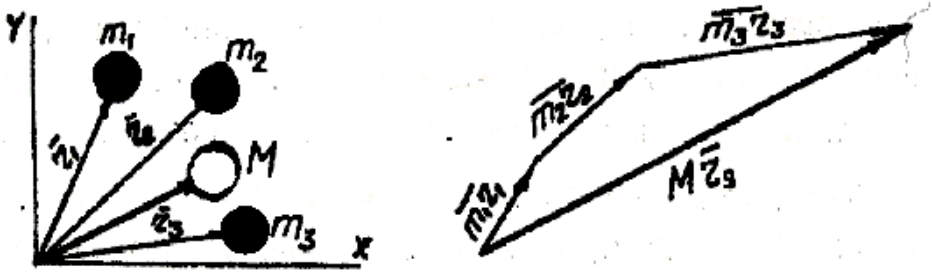


Рисунок 8.1

8.3 Зрівноваження обертаючих мас, розташованих в одній площині

Для повного зрівноваження сил інерції обертаючої ланки необхідно і достатньо дотримання двох умов:

- центр ваги ланки повинен співпадати геометричне з центром (віссю) обертання;
- вісь обертання повинна бути однією з головних осей інерції, тобто відцентрові моменти інерції I_{ZX} і I_{XY} повинні поодинці дорівнювати нулю.

Силу інерції визначаємо за формулою

$$\vec{F}^i = -m \cdot \vec{a}^n = -m \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}.$$

Для зрівноваження маси m на від'ємному подовженні радіуса-вектора (Рис. 8.2) $\vec{r}$ встановлюємо противагу масою m_{np} на відстані r_{np}, причому

$$m_{np} \cdot \omega^2 \cdot r_{np} = m \cdot \omega^2 \cdot r, \qquad \text{або} \qquad m_{np} \cdot r_{np} = m \cdot r \quad (8.2)$$

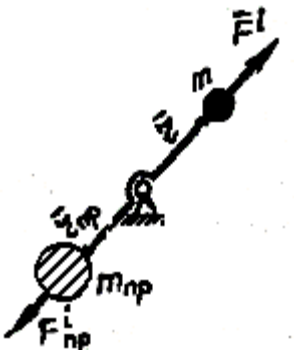


Рисунок 8.2

$$\sum m_i \cdot \vec{r}_i + m_{np} \cdot \vec{r}_{np} = 0, \qquad \text{або} \qquad M \cdot \vec{r}_S + m_{np} \cdot \vec{r}_{np} = 0 \quad (8.3)$$

8.4 Зрівноваження обертаючих мас, розташованих в паралельних площинах

Хай нам задані маси $m_1, m_2, \ldots, m_n$, які розташовані у паралельних площинах і обертаються навколо однієї осі з кутовою швидкістю ω. В загальному вигляді центр мас не співпадає з віссю обертання.

При такому розташуванні мас для їх зрівноваження треба задовольнити двом умовам - рівності нулю головного вектора $\vec{P}_0^i$ і головного моменту сил інерції $\vec{M}_0^i$: $\vec{P}_0^i = 0; \vec{M}_0^i = 0$. Найменша кількість противаг теж повинна бути рівною двом.

$$\vec{P}_0^i = \sum \vec{F}_i^i = -\sum m_i \cdot \omega^2 \cdot \vec{r}_i; \quad \vec{M}_0^i = \omega^2 \cdot \sum \left(\vec{Z}_i \times M_i \cdot \vec{r}_i\right). \quad (8.4)$$

Зрівноваження будемо проводити у площинах I і II, розташування яких ми обираємо самі, тому всі відстані Z_i вважаються відомими.

Зведемо всі сили у площину I - I. Тоді

$$\omega^2 \cdot m_1 \cdot \vec{r}_1 + \omega^2 \cdot m_2 \cdot \vec{r}_2 + \omega^2 \cdot m_3 \cdot \vec{r}_3 + \ldots + \omega^2 \cdot m_n \cdot \vec{r}_n + \omega^2 \cdot m_I \cdot \vec{r}_I + \omega^2 \cdot m_{II} \cdot \vec{r}_{II} = 0.$$

$$\omega^2 \cdot \left[\left(\vec{Z}_1 \times m_1 \cdot \vec{r}_1\right) + \left(\vec{Z}_2 \times m_2 \cdot \vec{r}_2\right) + \left(\vec{Z}_3 \times m_3 \cdot \vec{r}_3\right) + \cdots + \left(\vec{Z}_n \times m_n \cdot \vec{r}_n\right) + \left(\vec{Z} \quad \times m_{II} \cdot \vec{r}_{II}\right)\right] = 0$$

або, скоротивши на ω^2

$$m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2 + m_3 \cdot \vec{r}_3 + \ldots + m_n \cdot \vec{r}_n + m_I \cdot \vec{r}_I + m_{II} \cdot \vec{r}_{II} = 0. \quad (8.5)$$

$$\left(\vec{Z}_1 \times m_1 \cdot \vec{r}_1\right) + \left(\vec{Z}_2 \times m_2 \cdot \vec{r}_2\right) + \left(\vec{Z}_3 \times m_3 \cdot \vec{r}_3\right) + \cdots + \left(\vec{Z}_n \times m_n \cdot \vec{r}_n\right) + \left(\vec{Z} \quad \times m_{II} \cdot \vec{r}_{II}\right) = 0. \quad (8.6)$$

Кожен з векторів моментів відцентрових сил інерції перпендикулярний площині, яка проходить через вісь обертання і відповідний центр мас (ваги), тобто перпендикулярний силі інерції. Напрямок моменту інерції відповідає правилу правого гвинта. Для зручності визначення r_I і r_{II} повертаємо вектори моментів інерційних сил на 90° у той бік, щоб напрямки більшості моментів співпало з напрямками їх радіусів - векторів.

Рівняння (8.6) має вигляд

$\sum Z_i \times m_i \cdot r_i = \sum Z_i \cdot m_i \cdot r_i \cdot Sin(Z_i, r_i) = \sum Z_i \cdot m_i \cdot r_i$ тому що $\angle(Z_i \cdot r_i) = 90^0$.

Таким чином рівняння (4.6) можна переписати у вигляді:

$$m_1 \cdot r_1 \cdot Z_1 + m_2 \cdot r_2 \cdot Z_2 + m_3 \cdot r_3 \cdot Z_3 + \cdots + m_n \cdot r_n \cdot Z_n + m_{II} \cdot r_{II} \cdot Z = 0. \quad (8.7)$$

За цим рівнянням будуємо векторний многокутник (див.рис.8.3).

Для аналітичного розвозку проектуємо рівняння (8.7) на осі координат X і У.

$$m_1 \cdot r_1 \cdot Z_1 \cdot Cos\alpha_1 + m_2 \cdot r_2 \cdot Z_2 \cdot Cos\alpha_2 + m_3 \cdot r_3 \cdot Z_3 \cdot Cos\alpha_3 + \ldots + m_n \cdot r_n \cdot Z_n \cdot Cos\alpha_n + m_{II} \cdot r_{II} \cdot Z \cdot\cdot Cos\alpha_{II} = 0$$

$$m_1 \cdot r_1 \cdot Z_1 \cdot Sin\alpha_1 + m_2 \cdot r_2 \cdot Z_2 \cdot Sin\alpha_2 + m_3 \cdot r_3 \cdot Z_3 \cdot Sin\alpha_3 + \ldots$$

$$+m_n \cdot r_n \cdot Z_n \cdot Sin\alpha_n + m_{II} \cdot r_{II} \cdot Z \cdot Sin\alpha_{II} = 0.$$

Повертаючись до рівняння (8.6), будуємо векторний многокутник, з якого визначаємо $m_I \cdot r_I$ і $m_{II} \cdot r_{II}$,а також кути α_I і α_{II} за якими ми визначаємо напрямки розташування противаг.

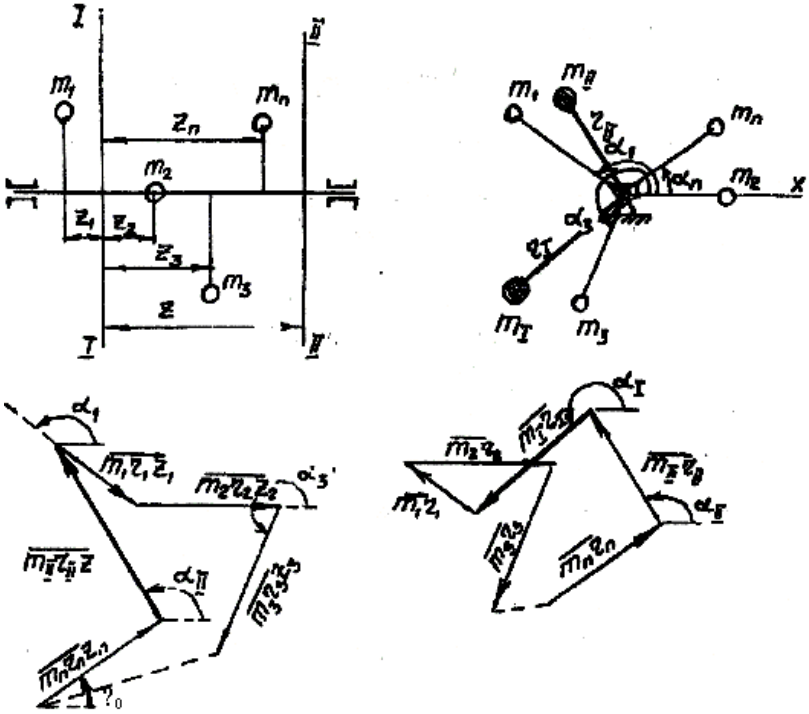


Рисунок 8.3

8.5 Зрівноваження машин на фундаменті

Задача повного зрівноваження сил інерції механізму добором величини і розташування мас для багатьох механізмів є теоретично розв'язуваною, але в деяких випадках такий добір мас практично неможливо досягнути внаслідок особливостей конструкції або ж внаслідок необхідності встановлення досить великої маси противаг. В цьому випадку проводиться наближене зрівноваження сил інерції.

При зрівноваженні масу кожної ланки умовно розносять по точках, якими ланка з'єднується з іншими - тобто по кінематичних парах, таким чином, щоби загальний центр мас усієї ланки співпадав би з його реальним положенням і сума усіх мас повинна дорівнювати загальній масі ланки. Наприклад, масу ланки АВ з центром мас у точці S (Рис.8.4) розносимо по точках А і В таким чином, щоб були вірними рівності

$$m_A + m_B = m; \tag{8.8}$$

$$m_A \cdot AS = m_B \cdot BS\,. \tag{8.9}$$

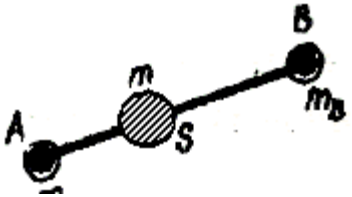


Рисунок 8.4

З цих рівнянь можна визначити кожну з мас:

$$m_B = m \cdot \frac{AS}{AB};\ m_A = m \cdot \frac{BS}{AB} \tag{8.10}$$

Приклад 1. **Шарнірний чотириланковий механізм (Рис. 8.5).**

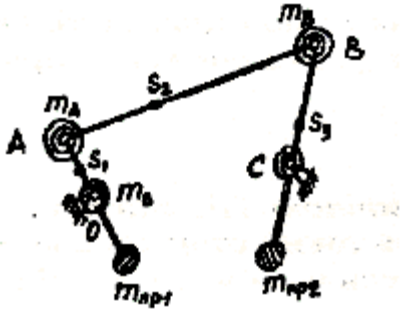


Рисунок 8.5

Розносимо маси ланок по точках: для ланки ОА - у точки О і А, для ланки АВ - у точки А і В, для ланки ВС - у точки В і С.

$$m_{O1} = m_1 \cdot \frac{AS_1}{AO}; \qquad m_{A1} = m_1 \cdot S_1O/AO;$$

$$m_{A2} = m_2 \cdot \frac{BS_2}{AB}; \qquad m_{B2} = m_2 \cdot S_2A/AB;$$

$$m_{B3} = m_3 \cdot \frac{CS_3}{BC}; \qquad m_{C3} = m_3 \cdot S_3B/BC;$$

Тоді $m_A = m_{A1} + m_{A2}$; $\qquad m_B = m_{B2} + m_{B3.}$

Тепер ми бачимо, що зрівноваженню підлягають маси m_A і m_B, які обертаються навколо нерухомих осей О і С.

$$m_{npI} = m_A \cdot \frac{AO}{r_{I;}} \qquad m_{npII} = m_B \cdot CB/r_{II}.$$

Приклад 2. Кривошипно-повзунний механізм

а) Повне зрівноваження.

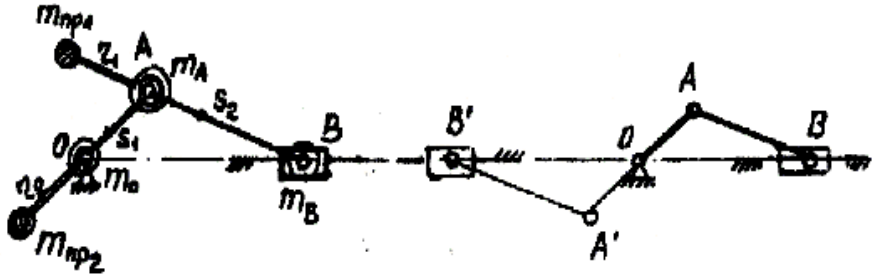
Варіант 1. Як і в прикладі 1 розподіляємо маси ланок по точках О, А і В.

Формули для визначення мас такі ж як і в прикладі 1. Масу зосереджену в точці В зрівноважуємо так, щоб загальний центр мас m_B, m_A і маси противаги m_{npI} був-би в точці А. Звідси $m_{\text{npI}} = \text{m}B \cdot AB/r_I$.

Тепер вважаємо, що маси m_{npI}, m_B, m_A, зосереджені в точці А.

Маса $m_{A1} = m_{npI} + m_B + m_A$.Цю масу можна зрівноважити відносно точки О. При цьому маса другої противаги буде дорівнюватись $m_{np2} = m_{A1} \cdot AO/r_2$..

Варіант 2. Цей варіант оснований на побудові симетричного дзеркально обернутого механізму (Рис.8.6,б).



а) **б)**

Рисунок 8.6

б) Часткове зрівноваження.

При частковому зрівноваженні зрівноваженню підлягає тільки маса m_A, яка зосереджена в точці А без противаги m_{np1} (див.рис.8.6 б, а) при першому розподіленні мас.

8.6 Види нерівноваг (рівноваг)

Рівновага може бути статичною і динамічною. Під статичною рівновагою, або рівновагою спокою, розуміють такий стан тіла, коли, якщо воно розташовано по горизонтальній осі, весь час буде у стані спокою в будь-якому своєму положенні на цій осі.

Динамічна рівновага, або рівновага руху, представляє собою такий стан тіла, коли при обертанні навколо осі відсутні будь-які зовнішні вібрації його, тобто центр ваги його розташований на осі обертання і відсутні будь-які відцентрові сили у площині співпадаючій з віссю обертання.

Всяке тіло, що знаходиться в стані динамічної рівноваги одночасно буде і в стані статичної рівноваги. Але якщо воно знаходиться тільки в стані статичної рівноваги, то це не означає, що воно буде і в стані динамічної рівноваги.

Статична рівновага може бути досягнута на призмах або балансирних паралелях. Динамічна рівновага досягається на спеціальному балансирному обладнанні.

9. ЗУБЧАТІ КОЛЕСА І ПЕРЕДАЧІ

9.1 Загальні відомості

Здійснення необхідних рухів механізмами, що мають тільки **нижчі кінематичні пари** (тобто стержневими механізмами), не завжди годиться через складність кінематичної схеми. У таких випадках застосовуються механізми з **вищими** кінематичними парами, які відтворюють необхідний рух при малій кількості ланок. Найменша їх кількість дорівнює трьом: вхідна і вихідна ланки і стійка. Ще одна суттєва перевага механізмів з вищими парами полягає в тому, що вони перетворюють рухи теоретично точно, чого механізми з нижчими парами виконати не в змозі.

Поверхні **елементів** вищої кінематичної пари, що забезпечують заданий закон руху, звуться спряженими поверхнями. Механізми можуть мати одну або декілька пар спряжених поверхонь. Перший випадок використовується в кулачкових механізмах, які відтворюють зворотній рух. вихідної ланки за заданим законом руху. Другий випадок використовується в зубчатому зачепленні, якому неперервний рух вихідної ланки забезпечується шляхом послідовної взаємодії декількох пар спряжених поверхонь.

Передаточна функція зубчатих механізмів, як правило, постійна і зветься **передаточним відношенням**. Наявність вищої кінематичної пари вносить суттєві особливості у методи синтезу механізму.

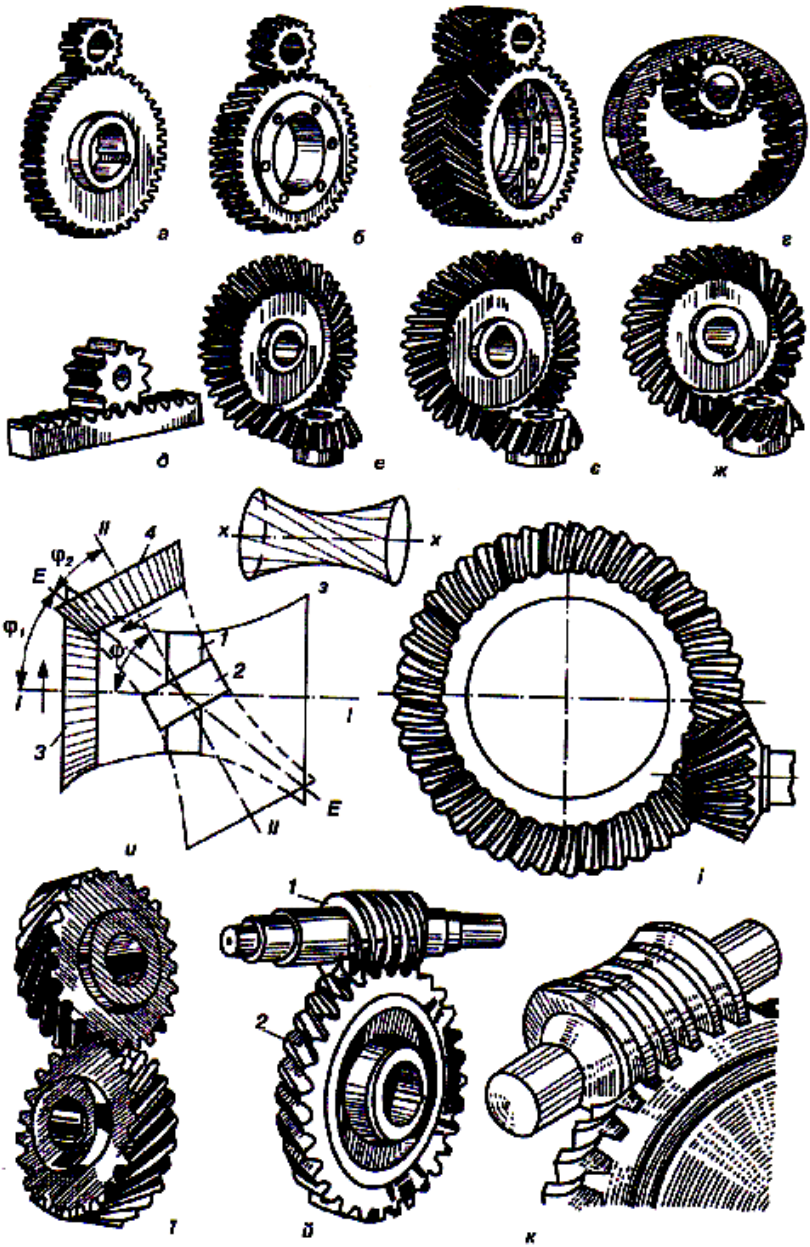


Рисунок 9.1

Зубчаті механізми дуже поширені як у машинобудуванні, так і у приладобудуванні через їх велику надійність, точність відтворення заданого закону руху. Якщо осі обертання валів паралельні, то застосовується циліндрична зубчата передача (Рис.9.1, а, б, в, г, д), аксоїдами коліс якої є циліндри. Така передача відноситься до плоских механізмів. Якщо ж осі обертання валів не паралельні, то застосовуються просторові передачі: конічні (Рис.9.1, е, є, ж, і), гвинтові (Рис.9.1, ї), черв'ячні (Рис.9.1, й, к) та інші.

9.2 Елементи зубчатого колеса

Циліндричні зубчаті передачі можуть бути зовнішнього (Рис.9.1, а, б, в) і внутрішнього (Рис.9.1, г) зачеплень. Слід також вказати на рейкове зачеплення (Рис.9.1, д), яке є проміжним між зовнішнім і внутрішнім зачепленнями. Проста зубчата передача має дві рухомі ланки, якими є зубчаті колеса. Розглянемо елементи зубчатого колеса (Рис.9.2).

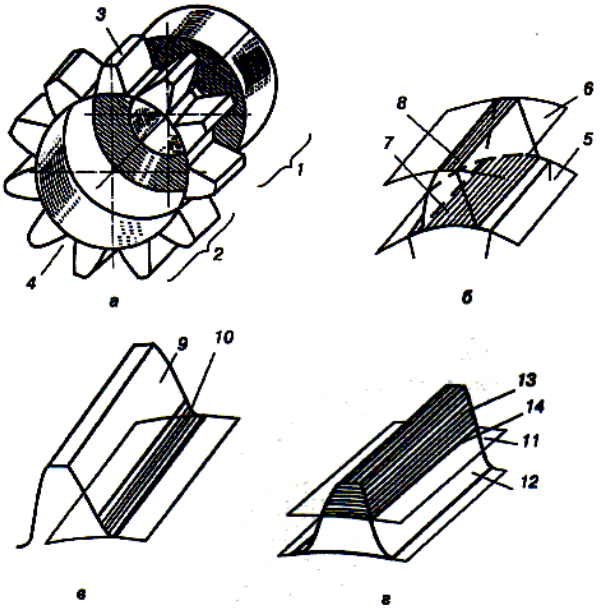


Рисунок 9.2

Зубчате колесо складається з **тіла** зубчатого колеса 1 і **зубчатого вінця** 2. Зубчатий вінець складається із **зубів** 3 і **западин** 4. Поверхня 5, яка відділяє зуб 3 від тіла зубчатого колеса, зветься **поверхнею западин**. Поверхня 6, що обмежує зуб по висоті, зветься **поверхнею вершин** або **поверхнею голівок**. Простір між зубцями 4 - западина. Поверхня, що обмежує зуб з боку западини 9, зветься **бічною** поверхнею зуба.

Бічна поверхня зуба складається з **головної** 9 і **перехідної** 10 поверхонь. **Головна поверхня** - це та частина бічної поверхні, яка контактує з головною поверхнею другого зуба і забезпечує задане передаточне відношення. **Перехідна поверхня** з'єднує головну поверхню з поверхнею западин.

Головна поверхня частіше всього є **евольвентною** поверхнею.

Евольвентна поверхня – поверхня, яка утворена перекочуванням площини по основному колу без ковзання.

Видатний математик і механік **Л. Ейлер**[15] дійшов висновку про те, що найбільш перспективним профілем є евольвентний профіль.

Пояснюється це тим, що вона має значні переваги перед іншими поверхнями: евольвентні передачі, у деякій мірі, припускають зміну міжосьової відстані, зберігаючи при цьому постійність передаточного відношення, чого інші передачі не припускають, а також виготовлення евольвентних коліс і інструмента для їх нарізання є найбільш простим, що має дуже важливе практичне значення.

Частина головної поверхні, що взаємодіє з поверхнею зуба спряженого зубчатого колеса, називається **активною** поверхнею зуба.

Евольвентну поверхню можна уявити як сукупність абсолютно однакових евольвент, розташованих у паралельних площинах, перпендикулярних до осі колеса. Ці евольвенти є траєкторіями точок **твірної прямої** KK' що належить площині N , яка перекочується по **основному циліндру** 1 без ковзання (Рис.9.3).

---

[15] Л. Ейлер (1707-1783), автор 850 наукових праць, розв'язав ряд задач з кінематики й динаміки твердого тіла, досліджував коливання й стійкість пружних тіл, переймався й питаннями практичної механіки, досліджував, зокрема, різні профілі зубців зубчатих коліс.

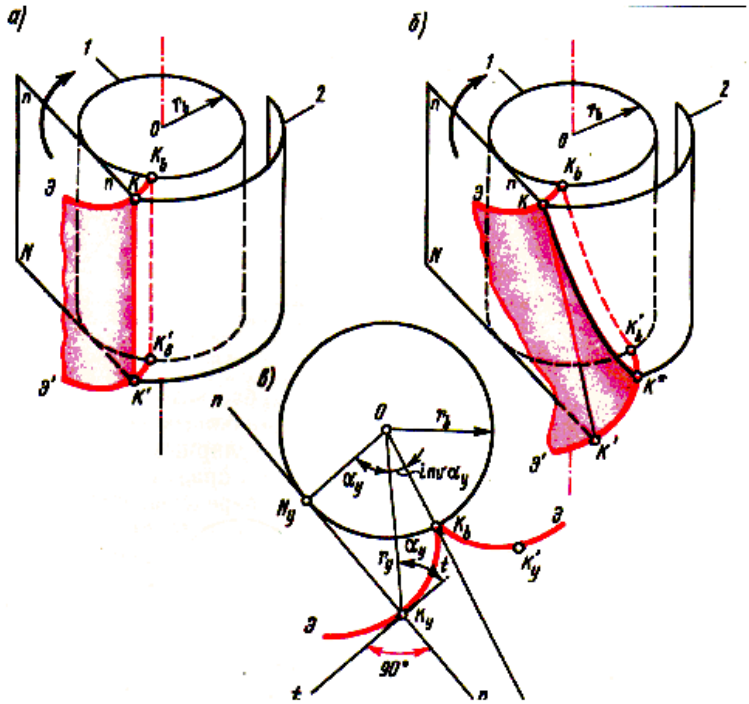


Рисунок 9.3

Початкові точки усіх евольвент розташовуються на твірній $K_bK'_b$ основного циліндра. Якщо твірна пряма KK' паралельна твірній основного циліндра, то вона є **лінією прямого зуба**.

Головна поверхня прямого зуба є евольвентною лінійною циліндричною поверхнею. Якщо твірна пряма КК′ розташована на площині N під деяким кутом до осі колеса, то твірна $K_bK'_b$ на основному циліндрі буде гвинтовою лінією. У такому разі головна поверхня є евольвентною **поверхнею косого зуба**.

Таким чином, схожість головних поверхонь прямого і косого зубців полягає у тому, що в будь-якому торцевому перерізі вони мають евольвенту.

9.3 Евольвента. Рівняння евольвенти у полярній системі координат

На Рис.9.3,*в* показаний верхній торцевий переріз, у якому зображено **основне коло** (радіус r_b) і пряма $n-n$, дотична до неї.

При перекочуванні цієї прямої по основному колу без ковзання точка $\boldsymbol{K_b}$ описує праву гілку евольвенти. При перекочуванні її у іншому напрямку точка $\boldsymbol{K_b}$ описує ліву гілку евольвенти.

Гострий кут між дотичною до евольвенти в точці $\boldsymbol{K_y}$ та її радіусом-вектором r_y, позначений літерою α_y, зветься **кутом профілю**. Можна показати, що $\angle K_y O N_y = \alpha_y$. Кут, утворений початковим радіусом-вектором *ОКь* та поточним радіусом-вектором *ОКу* зветься **евольвентним кутом** і позначається $inv\alpha_y$. Будь - яка точка *Ку* евольвенти визначається двома параметрами: радіусом - вектором r_y і евольвентним кутом $inv\alpha_y$.

Враховуючи те, що пряма $n-n$ перекочується по основному колу без ковзання, можна скласти рівність $\cup K_b N_y = K_y N_y$, підставляючи у яке значення дуги і відрізка, будемо мати:

$$r_b \cdot \left(inv\alpha_y + \alpha_y\right) = r_b \cdot tg\alpha_y,$$

звідки

$$inv\alpha_y = tg\alpha_y - \alpha_y \qquad (9.1)$$

З трикутника $\Delta K_y O N_y$ запишемо

$$r_y = r_b \cdot Cos\alpha_y \qquad (9.2)$$

Формули (9.1) і (9.2) є рівняннями евольвенти у полярній системі координат (у параметричній формі). Якщо виключити з цих рівнянь параметр α_y, будемо мати прямий зв'язок між $inv\alpha_y$ і r_y, виражені через r_b. Це вказує на те, що **евольвента повністю визначається основним колом**. Тому для аналітичного визначення координат профілю і для графічної побудови її необхідно і достатньо задати тільки основне коло.

9.4 Основні властивості евольвенти

Для теорії зачеплення важливе значення мають такі основні властивості евольвенти (Рис. 9.3,в):

1) евольвента - симетрична крива, яка має дві гілки, що сходяться у точці K_b, розташованій на основному колі. Таким чином, евольвента не має точок всередині основного кола;

2) точка N_y є миттєвим центром швидкостей прямої n – n і центром кривизни евольвенти у точці K_b. Тому нормаллю до евольвенти у будь-якій її точці є пряма, дотична до основного кола. Довжина нормалі до евольвенти рівна радіусу кривизни евольвенти у даній точці.

3) відрізок N_yK_y є радіус кривизни ρ_y евольвенти у точці K_y:

4) кут профілю α_y і радіус кривизни ρ_y евольвенти у точці K_b рівні нулю. При віддалені точок евольвенти від основного кола кут профілю і радіус кривизни збільшуються;

5) довжина дотичної до основного кола рівна должині розгорнутої дуги основного кола;

6) при збільшенні радіуса основного кола евольвентний профіль поступово втрачає свою кривизну і при $\rho = \infty$ евольвента перетворюється у пряму лінію;

7) дві евольвенти, побудовані як траєкторії двох точок прямої n – n, що перекочується по основному колу без ковзання, рівновіддалені (еквідистантні).

9.5 Основна теорема зачеплення

Основна теорема зачеплення установлює зв'язок між геометрією спряжених поверхонь і законом відносного руху елементів вищої кінематичної пари.

Ідея основної теореми плоского зачеплення була вперше висунута англійським вченим **Віллісом**[16] при розробці класифікації механізмів на підставі аналізу відношень швидкостей ланок.

У сучасній інтерпретації цю теорему (яку називають ще теоремою Вілліса) формулюють так: **загальна нормаль в точці контакту спряжених профілів у будь-який момент зачеплення повинна проходити через полюс зачеплення Р, положення якого на**

[16] Р.Вілліс (Willis R) (1800-1875) – англійський вчений, який доказав основну теорему плоского зачеплення й запропонував аналітичний метод дослідження планетарних зубчатих механізмів.

міжосьовій відстані O_1O_2 визначається заданим відносним рухом ланок.

Для доказу цієї теореми в точці контакту K профілів $П_1$ і $П_2$ (Рис.9.4) розглянемо вектори швидкостей точок А і В, які належать відповідно ланкам 1 і 2 й залежності між ними: $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$.

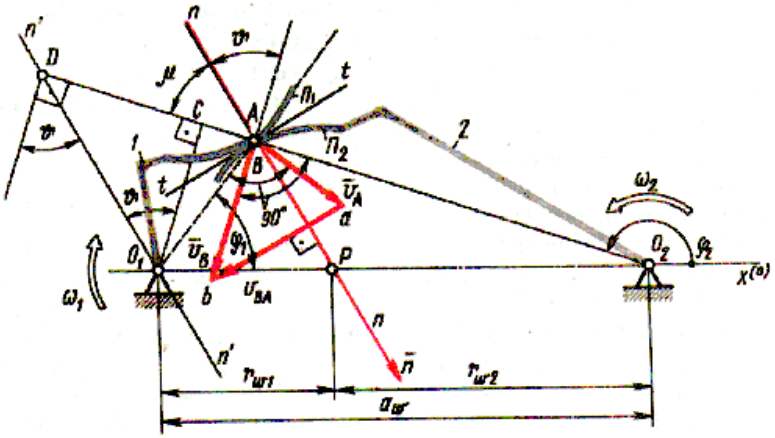


Рисунок 9.4

Напрямки векторів визначають з умов руху точок: $\vec{V}_A \perp OA_1; \vec{V}_B \perp BO_2; \vec{V}_{BA} II t-t$

або $\vec{V}_{BA} \perp n-n$ де $t-t$ та $n-n$ - загальна дотична і загальна нормаль до спряжених профілів $П_1$ і $П_2$.Через вісь O_1 проводимо лінію O_1D, паралельну загальній нормалі $(n'-n' II n-n)$ і відмічаємо точку В на пересіченні з радіусом O_2KD. Трикутник ΔO_1DK подібний до трикутника ΔabK, утвореному векторами $\vec{V}_A, \vec{V}_B, \vec{V}_{BA}$, виходить:

$$\frac{aK}{O_1K} = \frac{bK}{DK} = \left|\frac{\vec{V}_A}{\vec{V}_B}\right| = \frac{\omega_1 r_1}{\omega_2 r_2} = \frac{O_1K}{DK} \qquad (9.3)$$

Співвідношення (9.3) і є доказом проходження загальної нормалі $n-n$ через полюс зачеплення P.

З основної теореми зачеплення виходить, що спряжені профілі повинні розташовуватись відносно центроїд так, щоб у будь-якій точці

контакту загальна нормаль проходила через полюс зачеплення Р. Якщо ця вимога не виконується, то такі профілі не можуть бути спряженими.

Теорією зачеплення зубчатих коліс займались також **Аристотель**[17], **Ф.Рело**, **Х.І.Гохман**[18], **Т.Олів'є**[19], **В.А.Гавриленко**[20] та інші.

9.6 Основні розміри зубчатого колеса

На Рис.9.5,а зображено зубчате колесо з зовнішніми зубцями. Найбільший радіус r_a має коло голівок.

На Рис.9.5,6 зображено зубчате колесо з внутрішніми дубцями. У цьому випадку тіло колеса має форму кільця, всередину порожнини якого зубці повернуті своїми голівками. Тому радіус r_a кола голівок внутрішніх зубців менше радіуса r_f кола западин , який є, таким чином, найбільшим. На рис.9.5 зображені також евольвентні профілі зубців, основні кола, на підставі яких вони побудовані (радіус r_b) , а також ділильні кола r і кола довільного радіуса r_y. На рис. 9.5,а літерою $\boldsymbol{\alpha}$ позначений кут $\angle KON$, рівний куту профілю зуба у точці K, що знаходиться на ділильному колі прямозубого колеса. В Україні, як у всьому світі, цей кут стандартизовано і дорівнює 20°. Таким чином, **ділильне коло прямозубого колеса є тим колом , яке перетинає профіль зуба в точці, для якої кут профілю дорівнює стандартному куту α = 20°.**

Якщо довжину кіл - ділильного, основного або довільного радіуса -поділити на число зубців Z, то отримаємо відстані між профілями двох суміжних зубців, які називаються ***кроком***, тобто

---

[17] Аристотель (384-322 до н.е.) – видав най стародавню працю про механізми і машини, яка дійшла до наших часів, - це „Механічні проблеми", де описано важіль, криничний журавель, кривошип, колесо, коток, поліспаст, гончарний верстат, центрифуги, зубчаті колеса та ваги.

[18] Х.І.Гохман (1851-1916) – російський вчений, який один з перших опублікував працю з аналітичної теорії зачеплення.

[19] Т.Олів'є (1793-1858) – французький геометр, обґрунтував метод синтезу спряжених поверхонь в плоских та просторових зачепленнях за допомогою твірної поверхні.

[20] В.А.Гавриленко (1899-1977) – розробив питання теорії евольвентних зубчатих передач.

отримаємо крок по ділильному колу $\boldsymbol{p}$, крок по основному колу p_bі крок по колу довільного радіусаp_y. Дуги p, p_bі p_y відповідні одному і тому кутовому кроку $\tau = p/r = p_b/r_b = p_y/r_y$. Кутовий крок можна виразити ще і так : $\tau = 360^0/Z$.

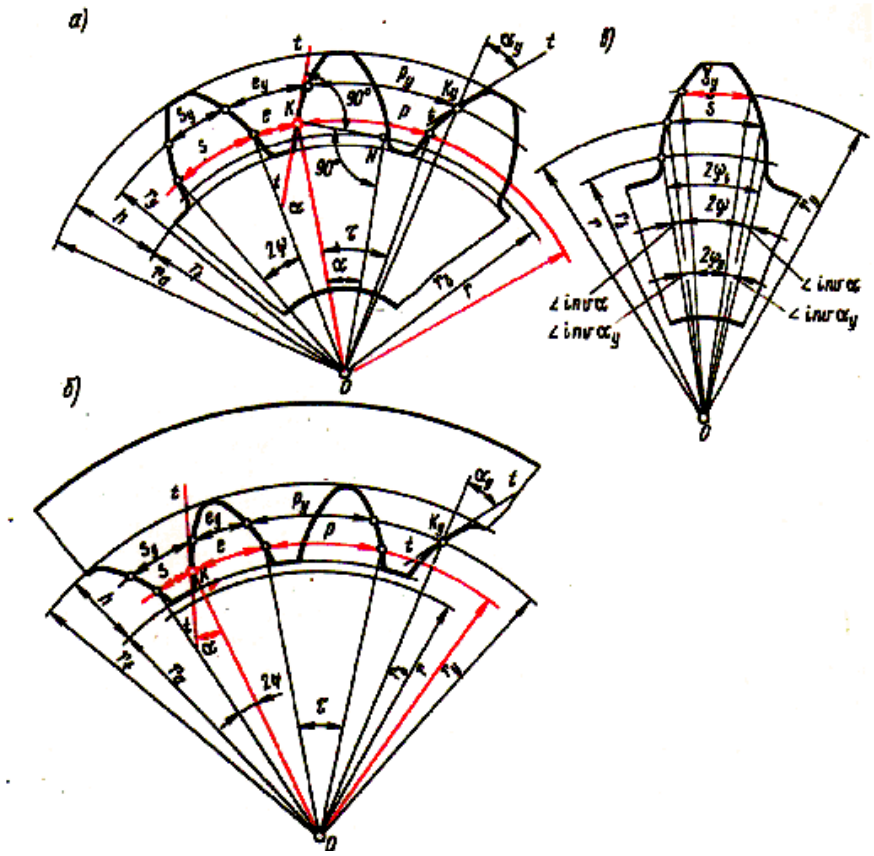


Рисунок 9.5

Важливим елементом колеса є крок по ділильному колу. Виразимо довжину ділильного кола через крок p і число зубців колеса Z: $2\pi r = pZ$. Звідси діаметр ділильного кола $d = (p/\pi) \cdot Z = m \cdot Z$. **Відношення $\mathbf{p/\pi}$** позначають літерою $\boldsymbol{m}$ і називають **модулем** зубців колеса (одиниця виміру - мм). Модуль стандартизовано, до того ж

стандарт передбачає декілька рядів значень модуля. Через модуль виражають радіус ділильного кола й усі лінійні розміри як колеса так і передачі:

$$r = \frac{mZ}{2} \tag{9.4}$$

$$p = \pi \cdot m \tag{9.5}$$

Радіус основного кола знайдемо з ΔKON (Рис.9.5):

$$r_b = r \cdot Cos\alpha = (mZ/2) \cdot Cos\alpha \tag{9.6}$$

Радіус довільного кола:

$$r_y = r \cdot \frac{Cos\alpha}{Cos\alpha_y} = \frac{mZ}{2} \cdot \frac{Cos\alpha}{Cos\alpha_y} \tag{9.7}$$

Кроки пропорційні радіусам, тому:

$$p_b = p \cdot Cos\alpha = \pi m \cdot Cos\alpha, \quad p_y = p \cdot \frac{Cos\alpha}{Cos\alpha_y} = \pi m \cdot \frac{Cos\alpha}{Cos\alpha_y}$$

Для коліс з внутрішніми зубцями радіуси основного і ділильного кіл й кроки по цим колам визначають за тими ж формулами, що і для колеса із зовнішніми зубцями.

Крок зубців колеса по будь-якому колу можна уявити собі як суму товщини зуба s_y і ширини западини e_y, тобто $p_y = s_y + e_y$;

$p = s + e = \pi m$.

Розрізняють:

- колеса, у яких по ділильному колу товщина зуба дорівнює ширині западини, і, таким чином, $s = e = \pi m/2$;
- колеса, у яких $s \rangle e$, тобто $s \rangle \pi m/2$;
- колеса, у яких $s \langle e$, тобто $s \langle \pi m/2$.

9.7 Визначення товщини зуба

На рис. 9.5,*в* зображені центральні куги 2ψ і $2\psi_y$ відповідні дуговим товщинам зуба $\boldsymbol{s}$ і $\boldsymbol{s_y}$, а також свольвентні куги $inv\alpha$ і $inv\alpha_y$.

З рисунка маємо $\psi_b = \psi + inv\alpha = \psi_y + inv\alpha_y$, звідки $\psi_y = \psi + inv\alpha - inv\alpha_y$.

Якщо кутові товщини виразити через лінійні $\psi_y = s_y/(2 \cdot r_y)$ і $\psi = s_y/(2 \cdot r)$ і підставити їх значення у рівняння, складене для ψ_y, маємо формулу для визначення товщини зовнішнього зуба:

$$s_y = r_y \cdot \left(\frac{s}{r} + 2 \cdot inv\alpha - 2 \cdot inv\alpha_y\right) \tag{9.8}$$

Аналогічно складається формула для визначення товщини s_y внутрішнього зуба:

$$s_y = r_y \cdot \left(\frac{s}{r} - 2 \cdot inv\alpha + 2 \cdot inv\alpha_y\right) \tag{9.9}$$

Якщо нескінченно збільшувати число зубців колеса , а таким чином, і радіуси усіх кіл, то при $Z = \infty$ усі кола перетворюються у паралельні прямі, а евольвентний профіль зуба стане прямолінійним, що має велике практичне значення.

При $Z = \infty$ отримаємо зубчату рейку (Рис.9.6).

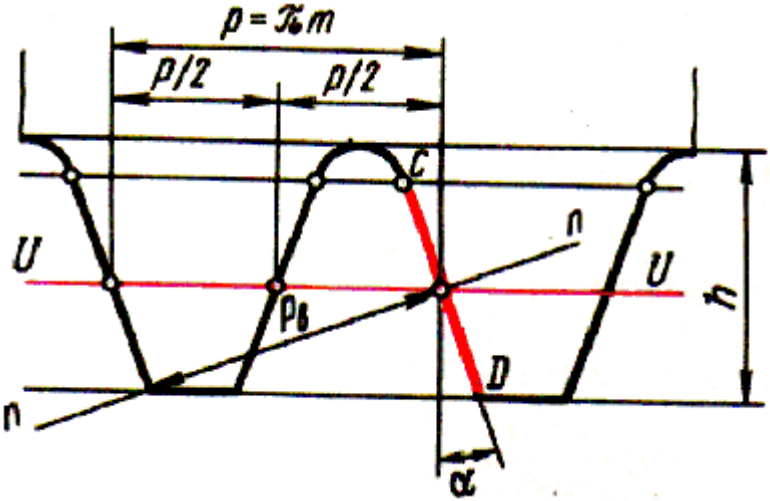


Рисунок 9.6

У будь-якому місці прямолінійної частини зуба рейки профільний кут буде однаковим і рівним $\alpha_0 = 20^0$.

Пряма *UU*, по якій товщина зуба рейки точно дорівнює ширині западини, тобто рівна половині кроку, зветься ділильною прямою. Крок зубців рейки, виміряний по будь-якій прямій, паралельній ділильній, має однакове значення $p = \pi \cdot m$. Крок рейки, виміряний по нормалі $n - n$ до її профілю, дорівнює $\pi \cdot m \cdot Cos\alpha$, тобто дорівнює кроку p_bпо основному колу колеса, модуль якого такий самий, як і модуль рейки

$$p_b = p \cdot Cos\alpha = \pi \cdot m \cdot Cos\alpha \qquad (9.10)$$

10 ЕВОЛЬВЕНТНЕ ЗАЧЕПЛЕННЯ

10.1 Елементи і властивості евольвентного зачеплення

На рис. 10.1, *а, в* зображені зовнішнє та внутрішнє зачеплення двох евольвент E_1 і E_2 , які входять у контакт в точці *K*.

З властивостей евольвенти витікає, що пряма KN_1 (Рис. 10.1, *а*), проведена з точки *K* дотична до основного кола радіуса r_{b1}, є нормаллю до евольвенти E_1. На тій же підставі пряма KN_2, проведена дотичною до основного кола радіуса r_{b2}, є нормаллю до евольвенти E_2 . Відрізки KN_1 і KN_2 складають спільну пряму N_1N_2, дотичну до основних кіл. Таким чином , пряма N_1N_2 буде загальною нормаллю до двох евольвент, які з тієї ж причини є спряженими і мають точку контакту на прямій N_1N_2.

Розглядаючи нове положення цих евольвент, що контактують у точці К', шляхом тих же міркувань переконуємося , що евольвенти E_1 і E_2 мають спільну нормаль у вигляді тієї ж прямої N_1N_2, і точка їх контакту буде розташована на цій же прямій. Таким чином, пряма N_1N_2 є геомєтричним місцем точок контакту спряжених евольвент E_1 і E_2 .Такий самий результат можна отримати і для внутрішнього зачеплення евольвент E_1 і E_2 (Рис. 10.1, *в*).

Таким чином, у процесі зачеплення двох евольвентних профілів їх спільна нормаль, яка є дотичною до основних кіл, не міняє свого положення, а тому не міняє свого положення і полюс *P*.

Найголовніша властивість евольвентного зачеплення: евольвентне зачеплення забезпечує сталість передаточного відношення у процесі зачеплення.

$$U_{12} = \omega_1/\omega_2 = \pm O_2P/O_1P = Const$$

Розглянемо основні елементи евольвснтного зачеплення:

- **лінія зачеплення** - пряма N_1N_2 - траєкторія точки *K* контакту профілів у її абсолютному русі;

- **полюс зачеплення** - точка *P* пересічення лінії зачеплення з міжосьового лінією O_1O_2;

- **початкові кола**, що доторкуються у полюсі зачеплення; їх радіуси позначаються r_{w1} і r_{w2}. Початкові кола під час зачеплення обкочуються одне по одному без ковзання ;

- **кут зачеплення** - гострий кут α_W між лінією зачеплення і прямою, перпендикулярною до міжосьової лінії.

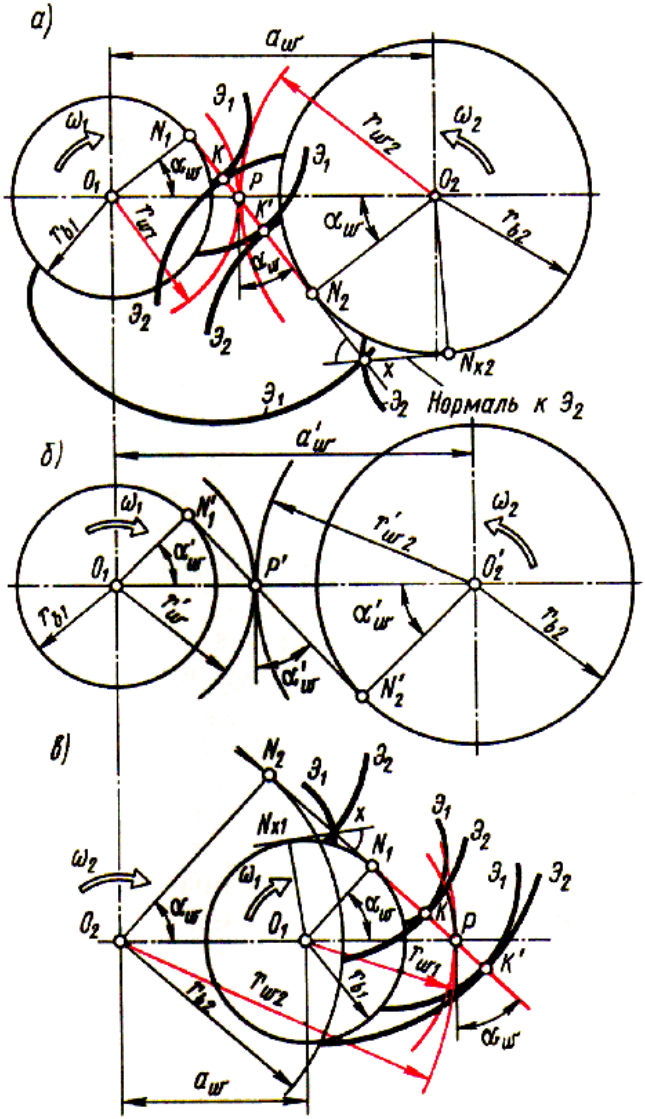


Рисунок 10.1

На рис.10.1 показані кути N_1O_1P і N_2O_2P, рівні куту зачеплення. Кут профілю у точці евольвенти, що лежить на початковому колу, чисельно рівний куту зачеплення α_W. Обидва кути позначаються однією літерою, однак слід пам'ятати про їх різницю у розумінні, а саме: кут профілю є геометричним параметром самого профілю, а кут зачеплення – кінематичним параметром двох профілів.

Міжосьова відстань $a_W = r_{W1} + r_{W2}$ для зовнішнього зачеплення і $a_W = r_{W2} - r_{W1}$ для внутрішнього зачеплення є геометричним параметром передачі.

Евольвентне зачеплення, як зовнішнє, яик і внутрішнє, допускає зміну міжосьосої відстані зі збереженням раніш передбаченого передаточного відношення.

$$U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2P}{O_1P} = -\frac{r_{W2}}{r_{W1}} = -\frac{r_{b2} \cdot Cos\alpha_W}{r_{b1} \cdot Cos\alpha_W} = -\frac{r_{b2}}{r_{b1}}.$$

Третя важлива властивість евольвентного зачеплення полягає в тому, що **при зовнішньому зачепленні евольвентні профілі є спряженими тільки в межах відрізка N_1N_2 лінії зачеплення.** Евольвенти E_1 і E_2, які проходять через точку X, розташовану за межами ділянки N_1N_2 нижче точки N_1 (Рис.10.1, *а*), не мають спільної нормалі. Це означає, що евольвенти не доторкуються в точці X, а пересічуться. Те саме відбувається і за межами ділянки N_1N_2 вище точки N_1.

На відміну від зовнішнього, спряження евольвентних профілів внутрішнього зачеплення можливо тільки за межами ділянки N_1N_2 лінії зачеплення (Рис.10.1, *в*). На ділянці N_1N_2 відбувається пересічення евольвент, тому що пряма N_1N_2, яка с нормаллю до E_1, не буде нею до E_2.

В реальній передачі пересічення евольвент викликає підвищений знос зубців і великі напруження від втоми у їх матеріалі, а у деяких випадках руйнування зубців або заклинення передачі. Тому у передачах, що проектуються, як зовнішніх, так і внутрішніх, можливість пересічення евольвент повинна бути виключена.

10.2 Способи виготовлення зубчатих коліс

У наш час зубчаті колеса виготовляють **способами копіювання і обкочування**. Першим способом (Рис.10.2, а, б, в) виготовляють колеса в основному з рівно діленим кроком.

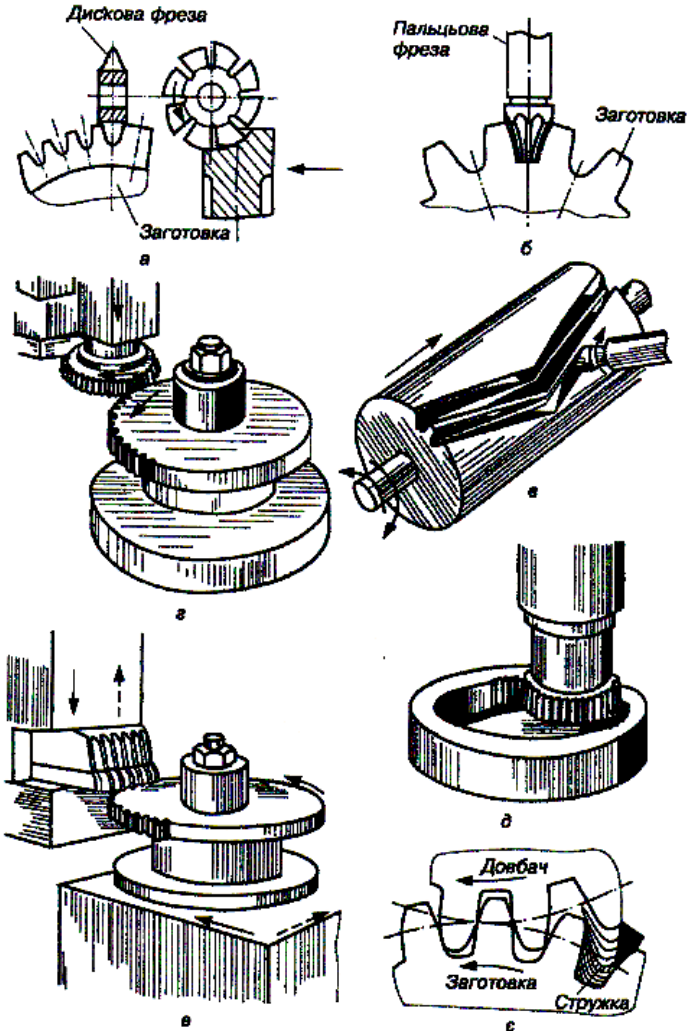


Рисунок 10.2

За цим способом інструментом вирізаються частини матеріалу між сусідніми зубцями. При цьому більшість їх виготовляється зі свідомими похибками, тому що міжзубовий простір має різну форму в залежності від числа зубців й модуля. Забезпечити таке розмаїття форм інструментів практично неможливо. Другий спосіб - спосіб обкочування (Рис.10.2, *г, в, д*) - таких недоліків не має: ним можна виготовляти найрізноманітніші зубчаті колеса і причому теоретично точно. Тому спосіб обкочування має переважне розповсюдження. При цьому способі інструментом (теоретично) є рейка (Рис.10.2, *д*), а (практично) - черв'ячна фреза (Рис.10.2, *б*), яка. у своєму осьовому перерізі має рейковий профіль. Зубці інструмента при обертанні навколо власної осі утворюють різьбову поверхню, яка перерізається канавками для виходу стружки. При обертанні фрези зуб рейки рухається вздовж твірної циліндра і тому заготовка теж обертається навколо своєї осі. Таким чином забезпечується рух обкочування.

При нарізанні циліндричних зубчатих коліс осі твірного колеса (тобто уявного колеса, у якого бічні поверхні є твірними поверхнями) і проектного (нарізуваного) колеса паралельні між собою і аксоїдами є циліндри. Твірними поверхнями є поверхні інструмента, який здійснює процес формотворення шляхом зняття стружки. Для інструментів такою твірною поверхнею є уявна поверхня до складу якої входять різальні леза інструментів або сформована при їх головному русі, необхідному для різання. Якщо твірне колесо має кінцеву кількість зубців, то різальними інструментами є довб'як (Рис.10.2_а, *е*, Рис.10.2, е, є, г, д), абразивний хон (Рис.10.2 а), якими можна обробляти бічні поверхні зубців коліс з різною кількістю зубців. При нескінченно великому радіусі аксоїди твірного колеса інструмент повинен мати нескінченно велику кількість зубців, тобто перетворитися у рейку. В цьому випадку інструментом є черв'ячна фреза (Рис.10.2, *б*) або абразивний черв'ячний круг (Рис.10.2, *г*), у якого рейковий твірний контур (Рис.10.2, *д*) розташований на гвинтовій поверхні. Окремим випадком є інструмент, що називається зуборізною гребінкою (Рис.10.2,*а*) або пара абразивних кругів (Рис.10.2, *в*). Головним рухом різання у довб'яка, гребінки та абразивного хона є поступальний рух, а у черв'ячної фрези і шліфувальних кругів - обертальний рух.

У процесі руху обкочування основний крок інструмента по профільній нормалі відповідає основному кроку проектованого (нарізуваного) колеса. Процес переходу від формотворення одного зуба

до другого у процесі обкочування здійснюється автоматично при неперервному відносному русі (Рис.10.2, *д*).

Рейковий контур, прийнятий у якості базового для визначення теоретичних форм і розмірів зубців сімейства зубчатих коліс, представником якого він є, зветься вихідним контуром. Вихідний контур є об'єктом стандартизації, тому що він визначає геометрію зуборізного інструменту і зубчатих коліс.

10.3 Вихідний твірний контур (ВТК). Інструментальна рейка

Евольвентні частини ВТК (Рис.10.3, *а*) прямолінійні і нахилені до осі зуба під кутом $\alpha = \alpha_0 = 20^0$. Переходи від прямолінійної частини зуба до западини і до голівки здійснюються по дузі радіуса ρ_0.

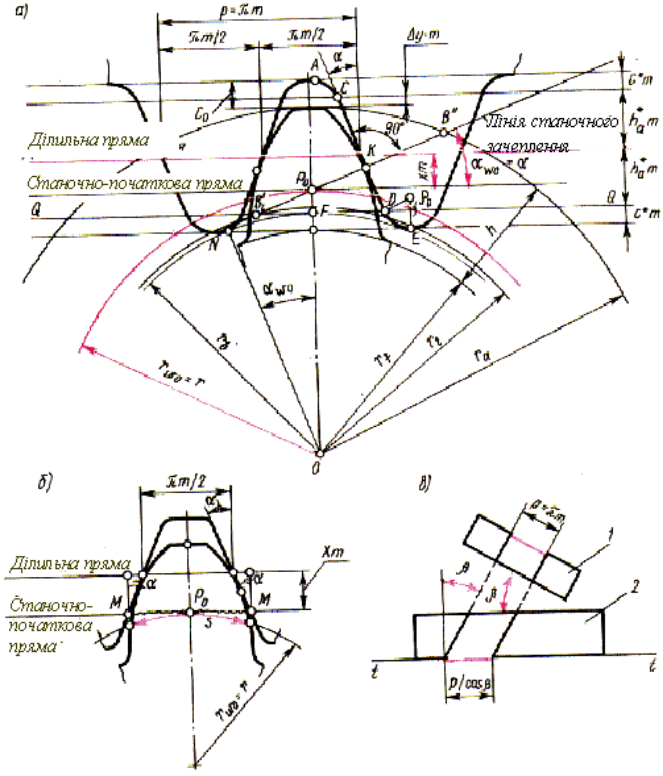


Рисунок 10.3

Точки спряження позначені на ВТК літерами *A,C,D,E*. Прямолінійна частина *CD* є евольвентною (при нескінченно великому радіусі основного кола інструмента), а закруглення *AC* і *DE* - не евольвентною частиною контуру. Пряма, що поділяє зуб по висоті на дві рівні частини, зветься ділильною. На ВТК є ще чотири лінії, паралельні ділильній прямій , які проходять по западинам зубців, по їх голівкам та через точки спряження *C* і *D*. Відстані між цими прямими виражають розміри зуба вихідного твірного контуру по висоті і вимірюються відповідно величинами $h_a = h_a^* \cdot m$ і $c = c_0 \cdot m$, де h_a^* - коефіцієнт висоти зуба, c_0 - коефіцієнт радіального зазору. Згідно стандарту: h_a^* =1.0, c_0 = 0.25.

Розмірами вздовж ділильної прямої ,є крок, товщина зуба і ширина западини. Крок p вихідного твірного контуру, виміряний по будь-якій прямій, паралельній ділильній, є величина стала і рівна $\pi \cdot m$, де m -стандартний модуль. Товщина зуба ВТК по ділильній прямій дорівнює ширині западини $s_0 = e_0 = \pi \cdot m/2$, а разом вони складають крок. Радіус закруглення (дуги *DE*)

$$\rho_0 = c_0 \cdot m/(1 - Sin\alpha) \approx 0.4 \cdot m. \qquad (10.1)$$

Таким чином ВТК рейкового інструмента характеризується чотирма стандартними параметрами: m, α, h_a^*, c_0.

10.4 Рейкове станочне зачеплення і коефіцієнт зміщення

Рейкове станочне зачеплення, як і будь-яке інше, має початкові лінії. Ними є середня лінія рейки і початкове коло колеса. Нагадаємо, що ці лінії перекочуються один по одному без ковзання. При нарізанні стандартного колеса радіуси початкового і ділильного кіл колеса рівні між собою. На зуборізному обладнанні інструмент можна розташувати по-різному відносно нарізуваного колеса. Тому у станочному зачепленні ділильна пряма ВТК може по різному розташовуватись відносно ділильного кола колеса: 1) вона може доторкуватись до ділильного кола - нульова стандартна установка інструмента; 2) бути відсунутою від неї - додатна установка; 3) перетинати її - від'ємна установка.

Відстань між ділильною прямою інструмента і ділильним колом колеса зветься зміщенням інструмента. Його виражають у вигляді добутку модуля $\boldsymbol{m}$ на коефіцієнт зміщення $\boldsymbol{x}$ і йому привласнюється знак. При стандартній установці зміщення $\boldsymbol{m\,x = 0}$, $\boldsymbol{x = 0}$. При додатній установці $\boldsymbol{m\,x > 0}$, $\boldsymbol{x > 0}$. При від'ємній установці $\boldsymbol{m\,x < 0}$, $\boldsymbol{x < 0}$.

Лінія рейкового зачеплення починається у точці *N* і через полюс P_0 йде у нескінченність. Довжина її активної частини обмежена точками B_1' і B'' , які розташовані на пересіченні лінії зачеплення з прямою QQ граничних точок і кола голівок (Рис.10.3, *а*).

Профіль зуба має евольвентну та не евольвентну частини. Перехід евольвентного профілю у не евольвентний відбувається на колі граничних точок колеса, радіус якого $r_1 = OB_1'$. Відстань між колом голівок колеса і прямою западин ВТК представляє з себе зазор c_0 . Величина його складається з двох частин: $c_0 \cdot m$ і $\Delta y \cdot m$, де Δy - коефіцієнт вирівнювального зміщення.

10.5 Розміри зубчатого колеса із зовнішніми зубцями

Діаметр голівок прямозубого колеса (Рис.10.3, *а*):

$$d_a = 2r_a = m \cdot (Z + 2 \cdot h_a^* + 2 \cdot x - 2 \cdot \Delta y). \qquad (10.2)$$

Висота зуба з того ж рисунка:

$$h = m \cdot \left(2 \cdot h_a^{'} + c_0 - \Delta y\right). \qquad (10.3)$$

Діаметр кола западин

$$d_f = 2 \cdot r_f = m \cdot (Z - 2 \cdot h_a^* - 2 \cdot c_0). \qquad (10.4)$$

10.6 Розміри зубчатого колеса із внутрішніми зубцями

Діаметр голівок прямозубого колеса

$$d_a = 2 \cdot r_a = m \cdot (Z - 2 \cdot h_a^* + 2 \cdot x - 2 \cdot \Delta y + k). \quad (10.5)$$

де $к = 0$ при $x \geq 2$ і $к = 0{,}25 - 0{,}125\,x$ при $x \leq 2$

Діаметр кола западин

$$d_f = 2 \cdot r_f = m \cdot (Z + 2 \cdot h_a^* + 2 \cdot c_0). \quad (10.6)$$

10.7 Товщина зуба по ділильному колу

У стандартному зачепленні рейки з нарізуваним колесом початкова пряма перекочується по початковому колу колеса без ковзання. Тому товщина зуба ***s*** по ділильному колу нарізуваного колеса рівна ширині ММ западини по початковій прямій ВТК (Рис.10.3, *б*).

Відрізок ММ складається з ширини западини ВТК по ділильній прямій $e = \pi \cdot m/2$ і двох катетів, кожен з яких дорівнює $x \cdot m \cdot tg\alpha$, тому

$$s = \pi \cdot m/2 + 2 \cdot x \cdot m \cdot tg\alpha \text{ (6-2).} \quad (10.7)$$

10.8 Підрізання і загострення зуба

Згідно властивостям евольвентного зачеплення прямолінійна частина ВТК і евольвентна частина профілю зуба колеса дотичні одна до одної тільки на лінії зачеплення, яка починається у точці N (Рис.10.3, *а*). Лівіше цієї точки прямолінійна ділянка ВТК не доторкується евольвентного профілю зуба колеса, а перетинає його. Це призводить до підрізання зуба колеса біля його западини (Рис.10.4, *а*).

Підрізання зменшує евольвентну частину профілю зуба колеса й послаблює зуб у його небезпечному перерізі.

Підрізання не виникає, коли границя B_1' активної частини лінії зачеплення розташовується правіше точки *N* (Рис.10.4, *а*), тобто коли виконується умова

$$P_0N \geq P_0B_1' \quad (10.8)$$

Використаємо це рівняння для визначення мінімального числа зубців колеса, при якому вони не будуть підрізаними. З ΔP_0ON (див .рис 10.4,*а*) виходить, що $P_0N = P_0O \cdot Sin\alpha$, а з $\Delta P_0FB_1'$, що $P_0B_1' = P_0F/Sin\alpha$.

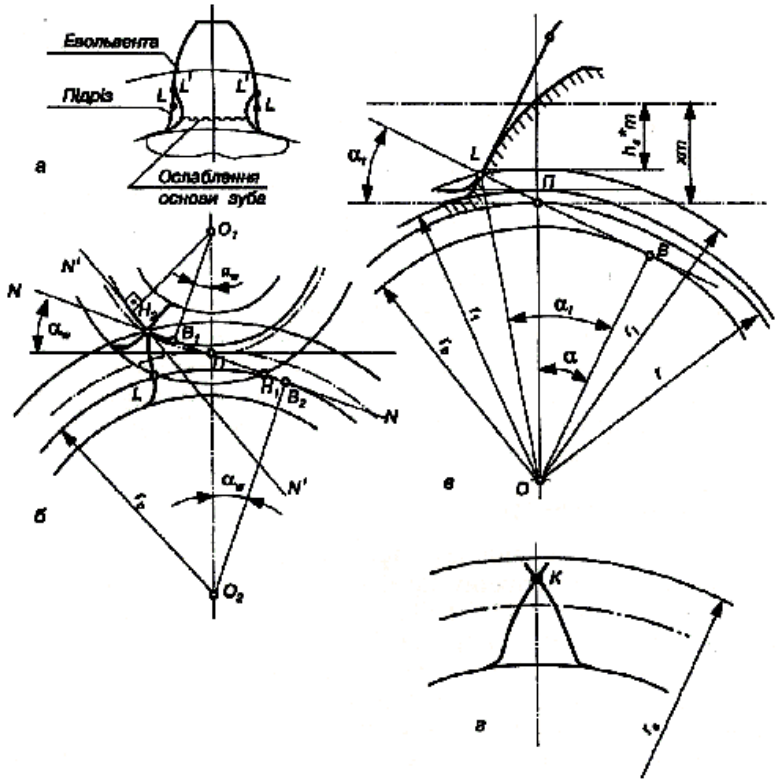


Рисунок 10.4

Підставимо ці величини у рівняння (10.2) і, розв'язуючи відносно Z, маємо

$$Z \geq 2 \cdot \frac{(h_a^* - x)}{Sin^2\alpha}. \qquad (10.9)$$

Якщо $x = 0$, то з цього виразу отримаємо мінімальне число зубців колеса без зміщення, які не будуть підрізаними інструментом

$$Z = 2 \cdot \frac{h_a^*}{Sin^2\alpha}. \qquad (10.10)$$

Для стандартного інструмента ($h_a^* = 1, \alpha = 20^0$), Z_{min}.
Для косозубих коліс $Z = 2 \cdot h_a^* \cdot Cos\beta / Sin^2\alpha$.

Таким чином, косозубі колеса менше піддаються підрізуванню зубців через те, що $\alpha > \alpha_0$, а $cos\beta < 1$.

У п. 1 було вказано, що для зменшення габаритів зубчатої передачі колеса слід проектувати з малим числом зубців. Однак при $Z < 17$, щоб не було підрізання, колеса повинні виготовлятись зі зміщенням інструмента. Визначимо, яке ж може бути мінімальне зміщення, при якому не буде підрізування зубців. Воно визначається також з рівняння (10.3), на підставі якого, використовуючи (10.9), можна записати

$$(Z / 2) Sin^2\alpha > (h_a^* - x).$$

Підставимо сюди значення $Sin^2\alpha$ з (10.3) і розв'яжемо відносно $\boldsymbol{x}$. Маємо $x \geq h_a^* \cdot (Z_{min}()_{min})$ а, переходячи до мінімального значення $x \ {}^*_a(Z_{min}()(17 - Z)_{min})_{min}$, яке має $Z > Z_{min}$, можна нарізати з додатним, нульовим і навіть з від'ємним зміщенням, тому що для такого колеса $X_{min} < 0$. Для зубчатого колеса, у якого $Z = Z_{min}$, можна приймати додатне або нульове зміщення, а для колеса, у якого $Z < Z_{min}$ -тільки додатне зміщення.

Якщо збільшувати коефіцієнт зміщення, то товщина зуба s_a у голівки буде зменшуватись. При деякому коефіцієнті зміщення, що зветься максимальним (x_{max}), настане загострення зуба ($s_a = 0$) (Рис.10.4, г). Загроза загострення особливо велика у коліс з малим числом зубців (менше 15).

Для запобігання загостренню треба вибирати коефіцієнт зміщення таким, щоб товщина зуба s_a була б не менше $0.2m$ ($s_a > 0,2m$).

Товщину зуба s_a при проектуванні визначають за рівнянням (10.7), підставляючи

$$r_y = r_a \text{ і } \alpha_y = \alpha_a \text{ , де } cos\alpha_a = r_b/r_a.$$

11. ЕВОЛЬВЕНТНА ЗУБЧАТА ПЕРЕДАЧА

11.1 Елементи евольвентної зубчатої передачі

На рис.11.1 показана зубчата передача зовнішнього зачеплення.

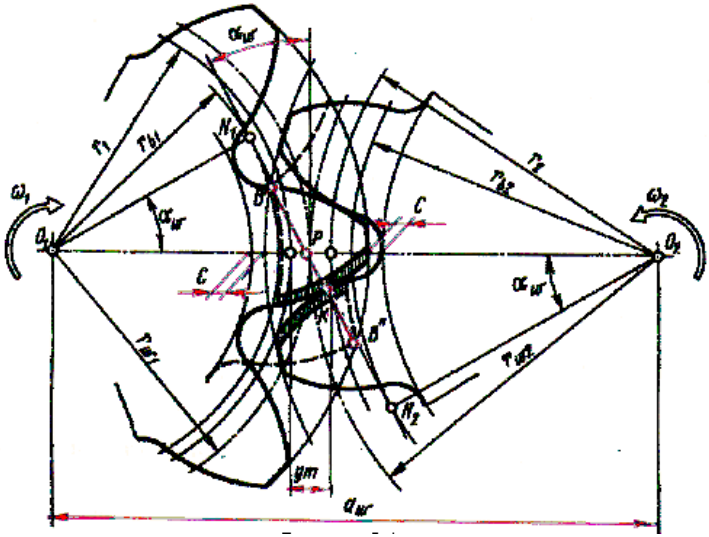


Рисунок 11.1

Кут зачеплення α_W, полюс зачеплення P, міжосьова відстань a_W, початкові кола радіусами r_{w1} і r_{w2} - ці елементи були розглянуті раніше.

В точках B' і B'' лінія зачеплення перетинається з колами голівок зубців коліс; в точці B' спряжені профілі входять у зачеплення, а в точці B'' - виходять із зачеплення; ця частина лінії зачеплення зветься **активною лінією зачеплення**. Зубчата передача повинна бути так спроектована, щоб ділянка $B'B''$ вміщувалась у межі лінії зачеплення N_1N_2. Якщо точки B' і B'' вийдуть за ці межі, то зубчата передача може заклинити.

При заданому напрямку обертання тільки один бік зуба буде передавати і сприймати зусилля; його звуть робочим боком зуба. У зачепленні знаходяться активні профілі зубців, які розташовані на

робочих боках зубців і які відповідають активній лінії зачеплення. На рис.11.1 активні профілі заштриховані.

Картину зачеплення у рейковому та внутрішньому зачепленнях зображено на рис.11.2.

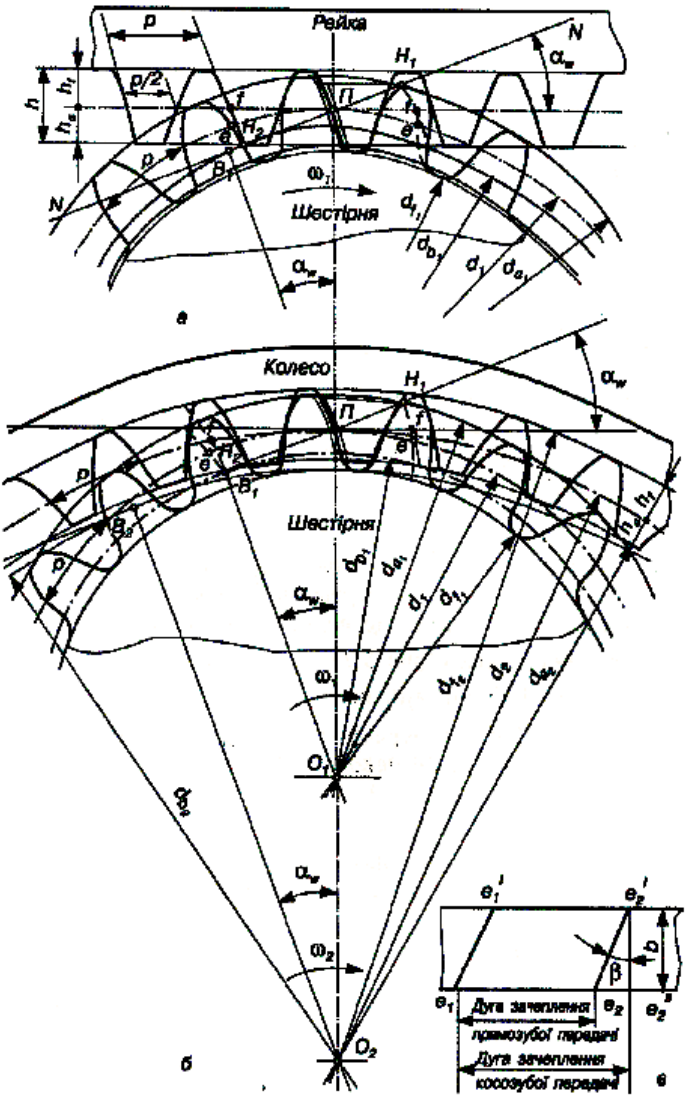


Рисунок 11.2

11.2 Визначення кута зачеплення і міжосьової відстані

При складанні рівнянь для визначення кута зачеплення α_w і міжосьової відстані a_w слід мати на увазі, що номінальні значення цих величин розраховують за умов коли зубці одного колеса входять у западини другого колеса щільно, без бокового зазору. Враховуючи це, а також те, що початкові кола котяться один по одному без ковзання, запишемо $s_{w1} = e_{w2}$ і $s_{w2} = e_{w1}$, де s_{w1} і s_{w2} - товщини зубців, а e_{w1} і e_{w2} - ширини западин по початковим колам коліс зубчатої передачі.

Оскільки початкові кола перекочуються без ковзання, то кроки p_{w1} і p_{w2} по цим колам рівні : $p_{w1} = p_{w2} = p_w$. Таким чином

$$p_w = s_{w1} + s_{w2} \tag{11.1}$$

З другого боку, крок по початковому колу $p_w = \pi\ m\ (\ cos\alpha_w)$, Товщина зуба по ділильному колу:

$$s_{W1} = r_{W1} \cdot \left(\frac{s_1}{r_1} - 2 \cdot inv\alpha + 2 \cdot inv\alpha_W\right).$$

Підставимо у цю формулу значення товщини зуба по ділильному колу $s_1 = \pi \cdot m/2 + 2 \cdot x_1 \cdot m \cdot tg\alpha.$

$$s_{W1} = r_{W1} \cdot \left(\frac{\frac{\pi \cdot m}{2} + 2 \cdot x_1 \cdot m \cdot tg\alpha.}{r_1} - 2 \cdot inv\alpha + 2 \cdot inv\alpha_W\right).$$

Радіуси коліс $r_1 = \frac{m \cdot Z_1}{2}$; $\quad r_{W1} = \frac{p_W \cdot Z_1}{2 \cdot \pi}$

$$s_{W1} = \frac{p_W \cdot Z_1}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\frac{\pi + 4 \cdot x_1 \cdot tg\alpha}{Z_1} - 2 \cdot (inv\alpha - inv\alpha_W)\right) =$$
$$= \frac{p_W}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + 2 \cdot x_1 \cdot tg\alpha - 2 \cdot Z_1(inv\alpha - inv\alpha_W)\right).$$

Аналогічну формулу можна вивести і для товщини s_{W2}

$$s_{W2} = \frac{p_W}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + 2 \cdot x_2 \cdot tg\alpha - 2 \cdot Z_2(inv\alpha - inv\alpha_W)\right).$$

Підставимо значення товщин s_{w1} і s_{w2} у формулу (11.1). Після відповідних скорочень маємо:

$$inv\alpha_W = inv\alpha + \frac{2\cdot(x_1+x_2)}{Z_1+Z_2} \cdot tg\alpha. \qquad (11.2)$$

Після розрахування значення інволюти кута зачеплення за рівнянням (11.2) сам кут α_W слід визначити з таблиці інволютної функції.

Міжосьова відстань зубчатої передачі $a_W = r_{W1} + r_{W2}$

Радіуси початкових кіл

$$r_{W1} = \frac{m \cdot Z_1}{2} \cdot \frac{Cos\alpha}{Cos\alpha_W}; \quad r_{W2} = \frac{m \cdot Z_2}{2} \cdot \frac{Cos\alpha}{Cos\alpha_W};$$

$$a_W = \frac{m\cdot(Z_1+Z_2)}{2} \cdot \frac{Cos\alpha}{Cos\alpha_W} = a \cdot \frac{Cos\alpha}{Cos\alpha_W}. \qquad (11.3)$$

З другого боку міжосьову відстань можна уявити собі як:

$$a_W = a + y \cdot m\,, \qquad (11.4)$$

де $y \cdot m$ - відстань між ділильними колами. Воно називається **сприйманим зміщенням**, а величина y - **коефіцієнтом сприйманого зміщення**:

Визначимо коефіцієнт зрівнювального зміщення передачі. При геометричному проектуванні передачі повинні виконуватись умови: 1) зубці коліс повинні входити в зачеплення теоретично без зазору; 2) між колами голівок і западин зубчатих коліс повинен бути стандартний радіальний зазор $c = c_0 \cdot m = 0.25 \cdot m$

Виконання першої умови забезпечується тим, що міжосьова відстань виражається через сприймане зміщення за формулою (11.4). Друга умова може бути записана так

$$a_W = r_{a1} + c + r_{f2}. \qquad (11.5)$$

Разом рівняння (11.4) і (11.5) запишуться так:

$$r_1 + r_2 + y \cdot m = r_{a1} + c + r_{f2} = r_{a1} + c + r_{a2} - h.$$

Підставимо сюди усі значення радіусів і висоти зуба. Після перетворень маємо $y \cdot m = (x_1 + x_2) \cdot m - \Delta y \cdot m$ звідки отримаємо Δy - коефіцієнт зрівнювального зміщення

$$\Delta y = (x_1 + x_2) - y = x_\Sigma - y. \qquad (11.6)$$

Таким чином зрівнювань не зміщення $\Delta y \bullet m$ вводиться дня отримання зубчатої передачі без бічного зазору і з стандартним значенням радіального зазору.

11.3 Якісні показники зубчатої передачі

Розглянемо якісні показники, які дають можливість оцінити передачу у відношенні плавності та безшумності зачеплення, можливості зносу й міцності зубців, а також порівняти ряд передач по тим же показникам. Така оцінка важлива для раціонального призначення коефіцієнтів зміщення при проектуванні зубчатих передач.

11.3.1 Коефіцієнт перекриття.

Коефіцієнт перекриття враховує неперервність і плавність зачеплення в передачі. Такі якості передачі забезпечуються перекриттям роботи однієї пари зубців роботою другої пари. Для цього кожна наступна пара зубців повинна увійти у зачеплення ще до того, як попередня пара вийде із зачеплення. Про величину перекриття судять по **коефіцієнту перекриття**, який **є відношенням дуги зачеплення до кроку зачеплення**.

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\cup C'C''}{p_b} = \frac{B'B''}{\pi \cdot m \cdot Cos\alpha_W}. \qquad (11.7)$$

Дуга зачеплення - дуга по будь-якому колу, яку проходить точка профілю за час зачеплення одної пари зубців.

Згідно з властивостями евольвенти $\cup C'C'' = B'B''$ (Рис.11.3,*а*).

Відрізок $B'B'' = BT + PB'' = B'N_2 - PN_2 + B''N_1 - PN_1$

$$B'N_2 = \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2}; \quad B''N_1 = \sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2};$$
$$PN_2 = r_{a2} \cdot Sin\alpha_W; \quad PN_1 = r_{a1} \cdot Sin\alpha_W.$$

Підставимо ці значення параметрів у формулу (11.7):

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\sqrt{r_{a1}^2 - r_{b1}^2} + \sqrt{r_{a2}^2 - r_{b2}^2} - a_W \cdot Sin\alpha_W}{\pi \cdot m \cdot Cos\alpha}. \qquad (11.8)$$

Коефіцієнт перекриття можна розрахувати і інакше, якщо представити його як відношення кута торцевого перекриття до кутового кроку.

11.3.2 Кут торцевого перекриття.

Кут торцевого перекриття φ_0 - це кут повороту колеса від положення зубців при вході в зачеплення, коли вони доторкуються у точці B', до положення зубців при виході із зачеплення, коли вони доторкуються у точці B'' (Рис.11.3, а).

$$\varepsilon_\alpha = \phi_{a1}/\tau_1 = \phi_{a2}/\tau_2. \qquad (11.9)$$

Тут $\tau_1 = 2 \cdot \pi/Z_1$ - кутовий крок; $\phi_{a1} = g_a/r_{b1}$, де $g_a = g_1 + g_2$ - довжина активної лінії зачеплення. З рис.11,3, маємо

$$g_f = r_{b2} \cdot (tg\alpha_{a2} - tg\alpha_W); \qquad (11.10)$$

$$g_a = r_{b1} \cdot (tg\alpha_{a1} - tg\alpha_W). \qquad (11.11)$$

Підставляючи (11.11) і (11.10) у (11.9), маємо формулу для визначення коефіцієнта перекриття прямозубої передачі:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{Z_1 \cdot tg\alpha_{a1} + Z_2 \cdot tg\alpha_{a2} - (Z_1 + Z_2) \cdot tg\alpha_W}{2 \cdot \pi}. \qquad (11.12)$$

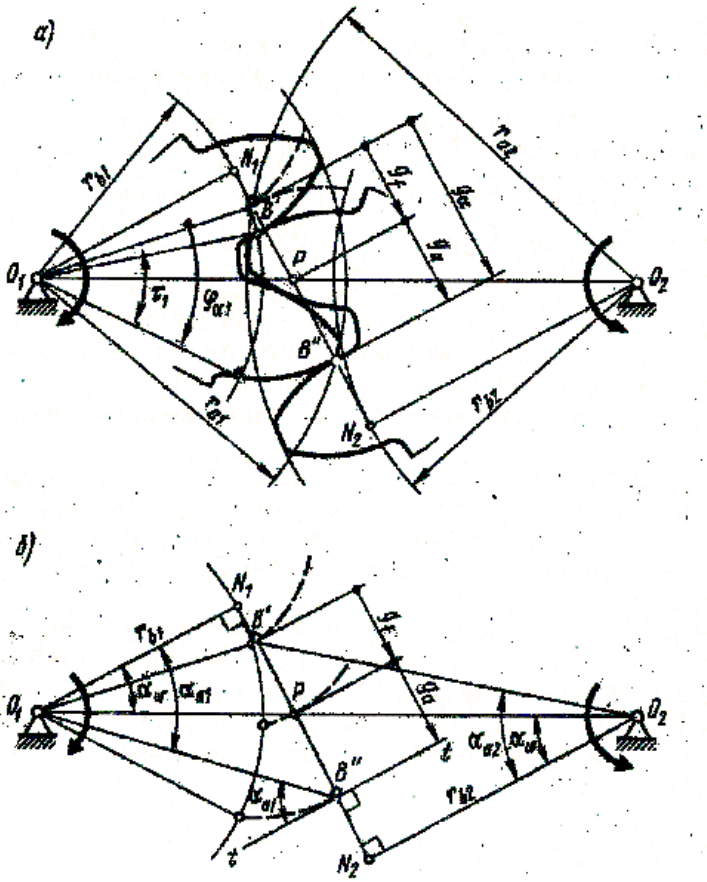


Рисунок 11.3

Якщо при розрахунку отримаємо $\varepsilon_\alpha < 1$, то в цьому випадку неперервності процесу не буде: одна пара зубців встигне вийти із зачеплення ще до того, як наступна пара увійде у нього. Тому мінімально допустимим значенням с $\varepsilon_\alpha > 1.05$. яке забезпечує неперервність процесу зачеплення з 5% - вим запасом.

Важливо відмітити , що коефіцієнт перекриття ε_α , зменшується при збільшенні коефіцієнтів зміщення x_1 і x_2. Тому при проектуванні передачі коефіцієнти зміщення слід призначати так, щоб ε_α не був - би менше 1.05.

Для косозубої передачі процес зачеплення однієї пари довший відносно прямозубої передачі.

Тому і коефіцієнт перекриття ε_β, більше ε_α і розраховується за формулою

$$\varepsilon_y = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta \ . \qquad (11.13)$$

У цій сумі складова ε_α визначається за формулою (11.12). Друга складова $\varepsilon_\beta = b/p_x$. Тут $b = \psi \cdot m$ - ширина зубчатого колеса, ψ - коефіцієнт ширини зубчатого колеса, який призначається за умов міцності і зносостійкості зуба, $p_x = \pi \cdot m/Sin\beta$ - осьовий крок косого зуба.

Підставимо ці значення у формулу для ε_β :

$$\varepsilon_\beta = \psi \cdot \frac{Sin\beta}{\pi}. \qquad (11.14)$$

11.4 Коефіцієнт відносного ковзання. Швидкість ковзання спряжених профілів

Швидкість ковзання спряжених профілів у вищій парі дорівнює добутку відстані l_{KP} між контактною точкою К і полюсом зачеплення Р на кутову швидкість $\vec{\omega}_{12} = \vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2$ у відносному русі профілів (Рис. 11.4).

Для доказу розглянемо подібність трикутників : ***ΔКаЬ*** ∞ ***ΔО₁КО***, таким чином

$$\frac{ab}{DO_1} = \frac{Ka}{KO_1}, \qquad \text{або} \qquad \frac{V_{CK}}{DO_1} = \frac{V_A}{KO_1}; \qquad (11.15)$$

$\Delta DO_1O_2 \infty \Delta KPO_2$, таким чином

$$\frac{DO_1}{KP} = \frac{O_1O_2}{PO_2} = \frac{O_1P + PO_2}{PO_2} = \frac{O_1P}{PO_2} + 1 = m \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1} + 1 \, . \qquad (11.16)$$

Співвідношення (11.15) з урахуванням (11.16) перетворимо відносно шуканої швидкості ковзання:

$$V_{CK} = V_A \cdot \frac{DO_1}{KO_1} = \frac{\omega_1 \cdot r_A}{r_A \cdot \mu_l} \cdot DO_1 = \frac{\omega_1}{\mu_l} \cdot KP \cdot \left(m \cdot \frac{\omega_2}{\omega_1} + 1\right),$$

або

$$V_{CK} = \left(\frac{KP}{\mu_l}\right) \cdot (\omega_1 \cdot m \cdot \omega_2)\ . \qquad (11.17)$$

Це співвідношення і є доказом сформульованої вище теореми.

Незважаючи на те, що швидкість $\vec{V}_{CK} = \vec{V}_{K_2K_1} = \vec{V}_{BA}$ ковзання профілів $П_1$ і $П_2$ однакова, вони зношуються з різною інтенсивністю. В зв'язку з цим корисно розглянути рух кожного профілю $П_1$ і $П_2$ відносно загальної контактної точки K (Рис.11.4).

$$\underline{\vec{V}_{CK}} = \underline{\vec{V}_K} + \underline{\vec{V}_{AK}}, \quad \text{або} \quad \underline{\vec{V}_{K_1}} = \underline{\vec{V}_K} + \underline{\vec{V}_{K_1K}};$$
$$\underline{\vec{V}_B} = \underline{\vec{V}_K} + \underline{\vec{V}_{BK}}, \quad \text{або } \underline{\vec{V}_{K_2}} = \underline{\vec{V}_K} + \underline{\vec{V}_{K_2K}}\ . \qquad (11.18)$$

Напрямок вектора $\vec{V}_K$ загальної контактної точки співпадає з дотичною до лінії зачеплення - геометричному місці контактних точок K на нерухомій площині при взаємодії профілів $П_1$ і $П_2$ (див рис.11.4).

Напрямок векторів швидкостей $\vec{V}_{K_1K} = \vec{V}_{AK}$ і $\vec{V}_{K_2K} = \vec{V}_{BK}$ співпадає з загальною дотичною $t - t$ до профілів $П_1$ і $П_2$ в точці контакту K.

Векторне співвідношення (11.18) відповідає побудові на рис. 11.4 у вигляді плану швидкостей.

Швидкість ковзання $\vec{V}_{CK} = ak/\mu_V$ профілю $П_1$ відносно контактної точки K при заданій на рис. 3.1 геометрії вищої пари суттєво менша, ніж швидкість ковзання $\vec{V}_{BK} = kb/\mu_V$ профілю $П_2$ відносно тієї ж контактної точки K. Це означає, що за один і той же інтервал часу на профілі $П_1$ буде контактувати ділянка значно більшої довжини ніж на профілі $П_2$. Через це при однакових інших умовах профіль $П_1$ на даній ділянці буде зношуватись більше, ніж ділянка на профілі $П_2$, навіть, якщо матеріал профілів буде однаковим за зносостійкістю.

Швидкість ковзання $\vec{V}_{K_2K_1}$ профілів один відносно другого і швидкості ковзання $\vec{V}_{K_1K}$ і $\vec{V}_{K_2K}$ профілів відносно загальної точки контакту в процесі взаємодії профілів увесь час змінюється: зменшується до нуля при русі контактної точки K до полюса P і далі збільшується, міняючи при цьому свій напрямок. Такий характер

ковзання профілів впливає на інтенсивність зносу на різних ділянках профілів елементів вищої кінематичної пари у тому випадку, коли основним видом зносу є абразивний знос. Оцінювати ковзання профілів у відносному русі тільки по величині швидкості ковзання недостатньо: необхідно враховувати також швидкість руху контактної точки по кожному профілю, тобто швидкості $\vec{V}_{BK}$ і $\vec{V}_{AK}$ (Рис.11.4).

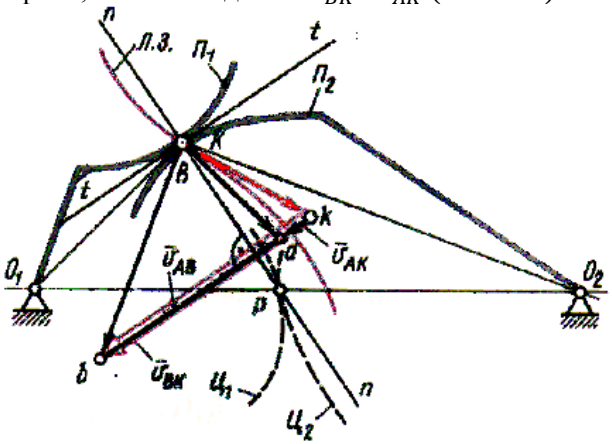


Рисунок 11.4

Відношення швидкості ковзання $\vec{V}_{CK}$ профілів до відносних швидкостей $\vec{V}_{AK}$ і $\vec{V}_{BK}$ точок A і B профілів при переміщенні відносно загальної контактної точки K звуться коефіцієнтами відносного ковзання λ_A і λ_B відповідно:

$$\lambda_A = \lambda_1 = \frac{V_{CK}}{V_{AK}} \quad \text{і} \quad \lambda_B = \lambda_2 = V_{CK}/V_{BK}\ . \tag{11.19}$$

За час одного оберту колеса з меншим числом зубців Z_1 друге колесо не робить повного оберту. Таким чином, його зубці у U_{12} раз рідше входять у контакт, ніж зубці першого колеса, і тому менше зношуються. Для порівняння інтенсивності зносу зубців за коефіцієнтами ковзання, помножимо λ_1 на

$$U_{12} = \omega_1/\omega_2 = Z_2/Z_1;\ \lambda_1 \cdot U_{12} = \lambda_2. \tag{11.20}$$

Рівняння (11.20) є **рівнянням рівнозношеності зубчатої передачі**.

Швидкість відносного ковзання профілів $V_{CK} = |V_{BK} - V_{AK}| = |V_{AK} - V_{BK}|$.

Тоді, якщо підставити це значення у формули (11.19), маємо

$$\lambda_1 = \frac{V_{AK} - V_{BK}}{V_{AK}} = 1 - \frac{V_{BK}}{V_{AK}}; \qquad \lambda_2 = \frac{V_{BK} - V_{AK}}{V_{BK}} = 1 - \frac{V_{AK}}{V_{BK}}.$$

З основної теореми зачеплення

$$V_{AK} = \omega_1 \cdot \rho_1; \qquad V_{BK} = \omega_2 \cdot \rho_2,$$

де $\boldsymbol{\rho_1}$ і $\boldsymbol{\rho_2}$ - радіуси кривизни профілів у точці контакту, $\boldsymbol{\rho_1} + \boldsymbol{\rho_2} = \boldsymbol{N_1N_2}$ - довжина теоретичної лінії зачеплення. Підставимо ці значення у формули визначення коефіцієнтів відносного ковзання. Маємо

$$\lambda_1 = 1 - U_{21} \cdot \frac{\rho_2}{\rho_1}; \qquad \lambda_2 = 1 - U_{12} \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2}. \qquad (11.21)$$

В процесі зачеплення точка контакту *K* зубців рухається вздовж лінії зачеплення від положення B' (вхід зубців у зачеплення) до положення B'' (вихід зубців із зачеплення). Тому, як витікає з формул (11.21) , найбільше значення коефіцієнта відносного ковзання $\boldsymbol{\lambda_1}$ набуває у положенні B' а $\boldsymbol{\lambda_2}$ - у положенні B''(див рис.11.4)

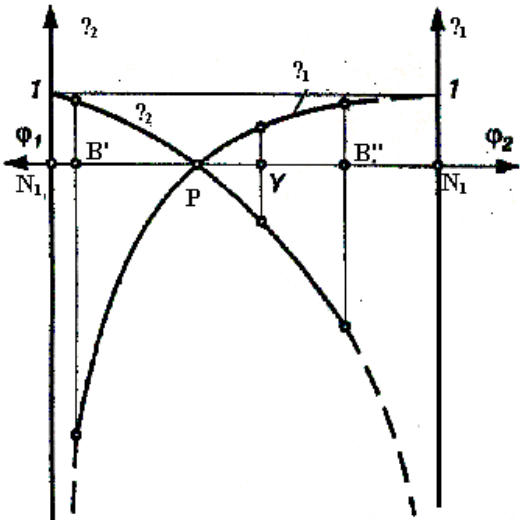


Рисунок 11.5

Коефіцієнти відносного ковзання λ_1 і λ_2 залежать від коефіцієнтів зміщення x_1 і x_2 . Підбираючи відповідно ці коефіцієнти x_1 і x_2, конструктор отримує значення коефіцієнтів λ_1 і λ_2, що відповідають умовам експлуатації.

12. ВИБІР КОЕФІЦІЄНТІВ ЗМІЩЕННЯ

12.1 Вибір коефіцієнтів зміщення для передач зовнішнього зачеплення

При призначенні коефіцієнтів зміщення x_1 і x_2 для будь-якої передачі повинні бути виконані такі три умови:

- відсутність підрізування;
- відсутність загострення;
- неперервність зачеплення.

Перша умова виконується, якщо коефіцієнти зміщення x_1 і x_2 будуть більшс ніж x_{1min} і x_{2min}. Друга і третя умови обмежують коефіцієнт зміщення x_{1max} і x_{2max} шестерні по найбільших припустимих значеннях. З цих двох значень приймається те, яке має меншу величину. Те ж саме можна сказати і про колесо. Таким чином коефіцієнт зміщення x_1 шестерні треба призначати так, щоб дотримувалось співвідношення $x_{1min} < x_1 < x_{1max}$ і $x_{2min} < x_2 < x_{2max}$.

В цих границях коефіцієнти зміщення x_1 і x_2 треба призначати так, щоб залежні від них якісні характеристики передачі, які характеризують її властивості (плавність ходу, зносостійкість, міцність), мали б оптимальні значення. При цьому треба враховувати і конкретні умови роботи передачі: швидкохідність, характер навантаження, наявність або відсутність закритої ванни з мастилом, матеріали шестерні і колеса та спосіб їх термообробки і т. і.

Для передачі з числами зубців Z_1 і Z_2 можна побудувати у координатах x_1 і x_2 область допустимих значень коефіцієнтів зміщення (Рис. 12.1). Ця область обмежена лініями x_{1min}, x_{2min} , ϵ_a == 1.0, $s_{a1} = 0$, $s_{a2} = 0$, які складають так званий **блокуючий контур**. Допустимі значення коефіцієнтів x_1 і x_2 знаходяться усередині блокуючого контуру.

Для кожної зубчатої передачі можна побудувати свій блокуючий контур. Приклад такого контуру для прямозубої передачі Z_1 =12, Z_2 =15 наведений на рнс.12.1. Як видно, лінії $s_{a1} = 0$, $s_{a2} = 0$ вийшли за межі допустимої області. Це вказує на те, що для даної передачі обмеження по $\epsilon_a = 0$ наступає раніше, ніж обмеження по загостренню. Крім того на блокуючих контурах показують також ізолінію $\epsilon_a = 1.2$, а іноді і деякі

інші властивості зубчатої передачі, які характеризують геометрію зачеплення. На рис.12.1 вказано також можливе розширення допустимої області, яка, однак не рекомендована стандартом.

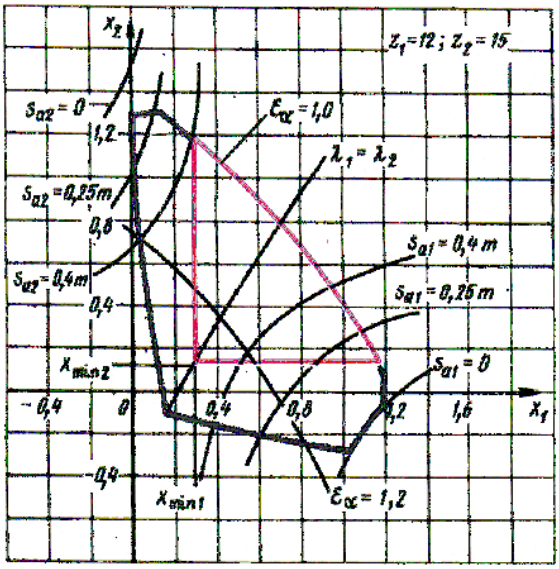


Рисунок 12.1

Альбом блокуючих контурів для передачі з прямозубими колесами, виготовленими стандартним рейковим інструментом наведено у довіднику[21] і у додатку до стандарту на зубчаті передачі[22]. У цьому додатку наведені також рекомендації по вибору коефіцієнтів зміщення x_1 і x_2 і порядок геометричного розрахунку евольвентної циліндричної зубчатої передачі зовнішнього зачеплення.

12.2 Вибір коефіцієнтів зміщення за умовою відсутності загострення

Положення вхідного твірного контуру (ВТК) відносно ділильного кола проектованого зубчатого колеса суттєво впливає на

[21] див.: Болотовская Т.П., Болотовский ИА., Бочаров Г.С й др. Справочник по геометрическому расчету звольвентных зубчатых й червячных передач. М., 1963

[22] див.: ДСТ 16530-83, 16531-83,16532-70

форму профілю зуба у торцевому перерізі, а, відтак, і на експлуатаційні якості зачеплення. За нульове зміщення приймають таке положення ВТК, при якому його ділильна пряма доторкується ділильного кола зубчатого колеса.

Коефіцієнт зміщення впливає на форму зуба, який може бути і підрізаним і загостреним. Такі форми зуба неприпустимі. Розрахунок мінімальних коефіцієнтів зміщення, при яких буде забезпечена відсутність підрізування викладено у п.7 даного конспекту.

Для уникнення загострення запишемо розрахункову формулу визначення товщини зуба по колу голівок:

$$s_a = r_a \cdot \left(\frac{s}{r} - 2 \cdot (inv\alpha - inv\alpha_0)\right), \qquad (12.1)$$

де $r_a = m \cdot (0.5 \cdot Z + h_a^* + x - \Delta y)$ і $s = \pi \cdot m/2 + 2 \cdot x \cdot m \cdot tg\alpha.$

Відношення $\frac{r_a}{r} = \frac{cos\,\alpha}{cos\,\alpha_a}$ і $r = \frac{m \cdot Z}{2}$ підставимо у формулу (12.1).

$$s_{a1} = m \cdot \frac{cos\,\alpha}{cos\,\alpha_{a1}} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2 \cdot x_1 \cdot tg\alpha - Z_1 \cdot (inv\alpha_0 - inv\alpha)\right).$$

Товщина зуба колеса 2:

$$s_{a2} = m \cdot \frac{cos\,\alpha}{cos\,\alpha_{a2}} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + 2 \cdot x_2 \cdot tg\alpha - Z_2 \cdot (inv\alpha_0 - inv\alpha)\right).$$

У ці формули входять значення коефіцієнтів зміщення, міняючи які можна підібрати їх значення такими, щоб витримувалась умова $s_a \geq 0.2m.$

12.3 Вибір коефіцієнтів зміщення за умовою вписування у наперед задану міжосьову відстань

Якщо зубчату передачу з числом зубців $\boldsymbol{Z_\Sigma = Z_1 + Z_2}$ і модулем $\boldsymbol{m}$, яка має міжосьову відстань $\boldsymbol{a}$ у стандартному зачепленні, треба вписати у міжосьову відстань $\boldsymbol{a_w}$, то різниця міжосьових відстаней дорівнює величині сприйманого зміщення $\boldsymbol{y = (a_w - a)/ m}$.

Кут зачеплення визначимо за формулою

$$\alpha_W = arcCos\left(\frac{0.5 \cdot (Z_1 + Z_2) \cdot Cos\alpha}{y + 0.5 \cdot (Z_1 + Z_2)}\right).$$

Враховуючи формулу (12.2), визначимо коефіцієнт сумарного зміщення

$$x_\Sigma = (Z_1 + Z_2) \cdot (inv\alpha_W - inv\alpha)/(2 \cdot tg\alpha),$$

де $inv\alpha_W = tg\alpha_W - \alpha_W$, $inv\alpha = tg\alpha - \alpha$ - евольвентні функції.

Величина $\boldsymbol{X_\Sigma}$ повинна бути розподілена між $\boldsymbol{X_1}$ і $\boldsymbol{X_2}$ в цілому довільно за умовою $\boldsymbol{X_\Sigma} = \boldsymbol{X_1} + \boldsymbol{X_2}$. Однак з ціллю підвищення опору робочих поверхонь заїданню та контактному зруйнуванню радимо призначати $\boldsymbol{X_1}$ і $\boldsymbol{X_2}$ за умовами:

$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(x_\Sigma - \frac{y \cdot (Z_2 - Z_1)}{Z_\Sigma}\right), \quad x_2 = x_\Sigma - x_1.$$

13. ПОБУДОВА ПРОФІЛЮ ЗУБЧАТОГО КОЛЕСА

На кресленні (Рис.13.1) під довільним кутом відкладаємо лінію центрів O_1O_2. Довжина лінії центрів дорівнює міжосьовій відстані $O_1O_2=a_w$.

З кінців відрізку (лінії центрів) відкладаємо початкові кола d_{w1} і d_{w2}. Початкові кола d_{w1} і d_{w2} торкаються один одного в полюсі Р.

Відкладаємо і будуємо основні кола $d_{в1}$ і $d_{в2}$.

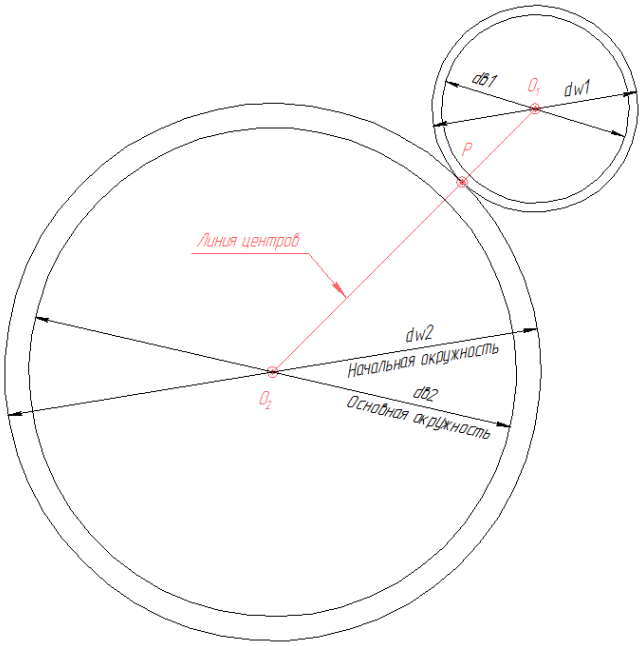


Рисунок 13.1

З полюса Р до основного кола проводимо дотичну РА. Відрізок АР (Рис.13.2) ділимо на чотири рівні частини (АВ = ВС = CD = DP) і з точки В проводимо дугу радіусу r = ВР до перетину в точці P_1 з основним колом; тоді AP_1 = АР.

Після цього, відрізок АР знову ділимо на довільне число рівних частин завдовжки 15…20 мм (число ділень доцільно узяти парним, наприклад, 8). Дугу $АР_1$ також ділимо на таке число рівних частин ($Р_1 1' = 1' 2' = 2' 3'$.) (Рис.13.3).

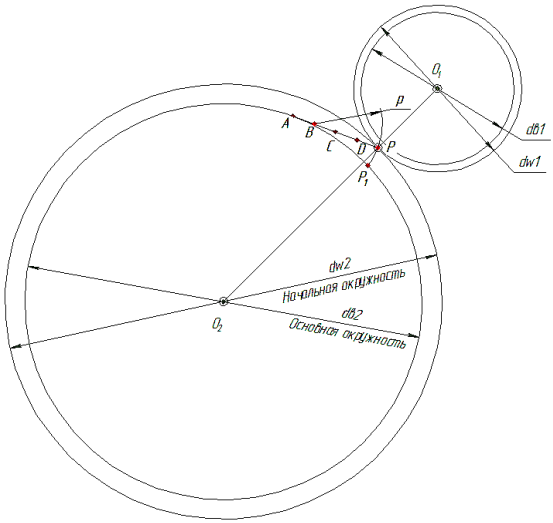


Рисунок 13.2

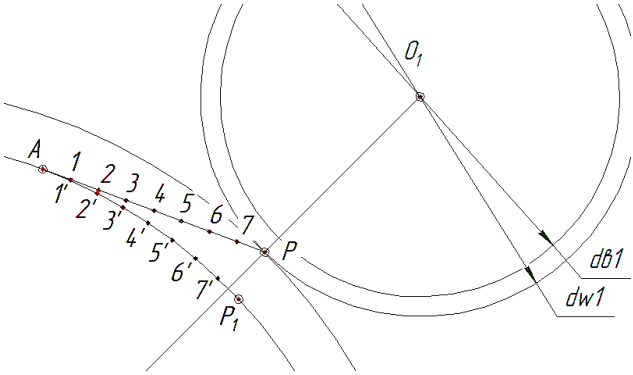


Рисунок 13.3

Точки 1'; 2'; 3'… з'єднуємо с центром $О_2$ (Рис.13.4).

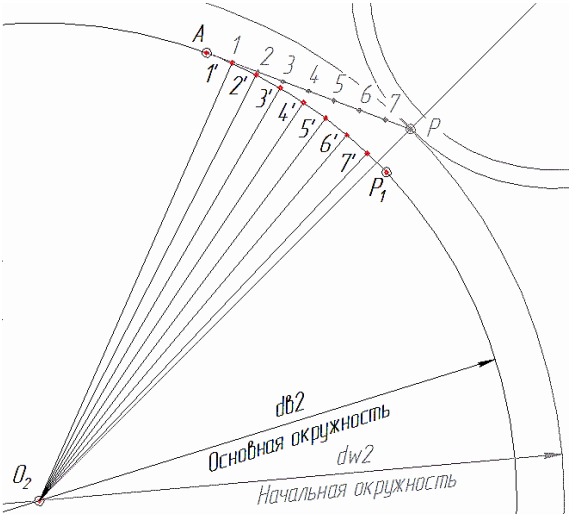


Рисунок 13.4

Через точки 1'; 2'; 3'… проводимо перпендикуляри до відповідних радиусів $O_2$1'; $O_2$2'; $O_2$3'…. На перпендикулярах (они торкаються основного кола) відкладаємо відрізки 1'1"; 2'2"; 3'3"…, відповідно рівні відрізкам Р1; Р2; Р3… (Рис.13.5).

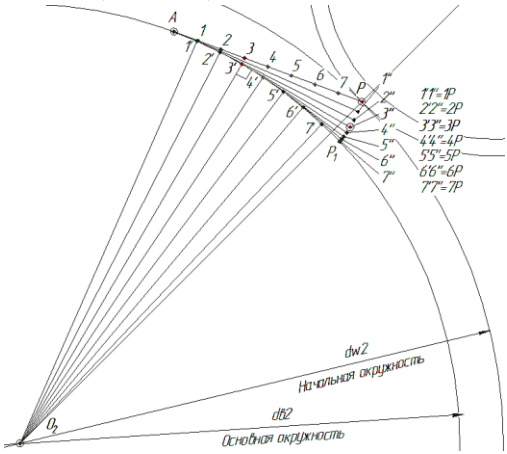


Рисунок 13.5

З’єднуя точки P_1; 1"; 2"; 3"… плавной кривою, отримаємо частину евольвенти другого колеса (Рис.13.6).

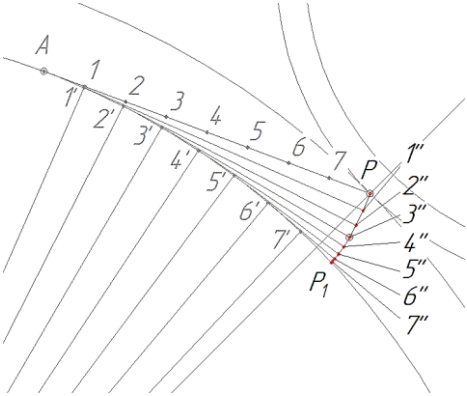


Рисунок 13.6

Для продовження побудови профілю зуба другого колеса відкладаємо і будуємо кола виступів і западин зубів другого колеса (Рис.13.7). Слід зазначити, що радіус кола западин може бути більший, рівний і менше радіусу $r_в$ основного кола. Це залежить від числа Z зубів колеса і від коефіцієнта зміщення x. У нашому випадку $d_{в2} > d_{f2}$.

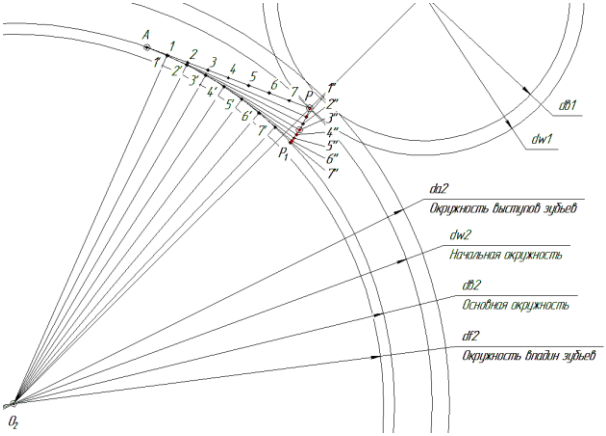


Рисунок 13.7

Для завершення побудови евольвенти другого колеса вводимо додаткові точки 8 і 9. Точки 8 і 9 відкладаємо проти годинникової стрілки від точки А. Користуючись описаним вище методом, знаходимо точки 8"і 9" (Рис. 13.8). Завершуємо побудову евольвенти другого колеса.

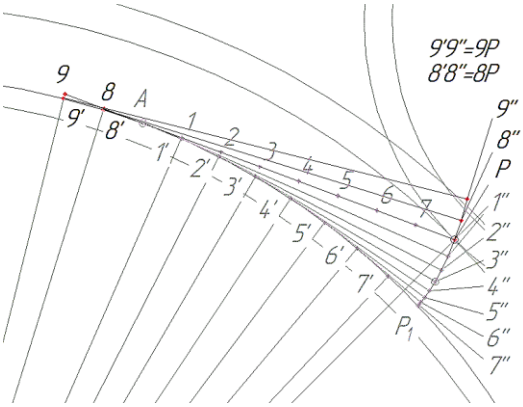


Рисунок 13.8

Профіль ніжки біля основи зуба можна побудувати спрощено. Якщо $r_f < r_в$, то від основи евольвенти до кола западин проводять радіальний відрізок, а потім біля основи зуба роблять закруглення радіусу 0,2m (Рис. 13.9). Спрощену побудову профілю ніжки зуба не відбивають істинного його контура, а є тільки креслярським прийомом.

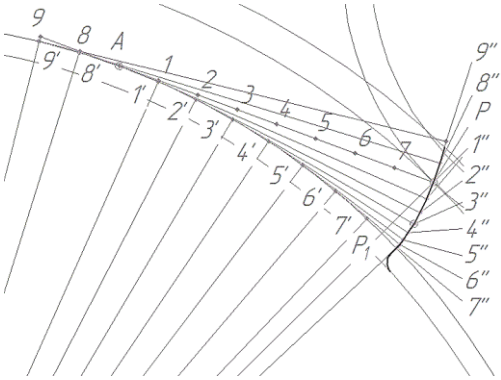


Рисунок 13.9

Будуємо ділильне коло колеса 2 і отримуємо точку D її перетину з евольвентою (Рис. 13.10).

Від точки D відкладаємо на ділильному колі колеса 2 (користуючись побудовою, показаною вище) дуги: вліво DE, управо DF, рівні кожна довжині кроку p. Від точки E, D, F вліво відкладаємо(користуючись тією ж побудовою) дуги ER, DM, FH, рівним кожна товщині S зуба по ділильному колу. Ділимо дуги DM, FH, ER навпіл в точках T, Y, Q. Сполучаємо ці точки з центром O2, отримуємо осі симетрії зубів. Після цього вирізуємо з твердого паперу шаблон половини зуба, яким користуємося для побудови інших зубів. Обов'язковою є побудова трьох зубів - першого, профіль якого побудований по точках, і двох, що знаходяться справа і зліва від першого.

Рисунок 13.10

Аналогічно будуємо три зуба для іншого колеса (Рис.13.11).

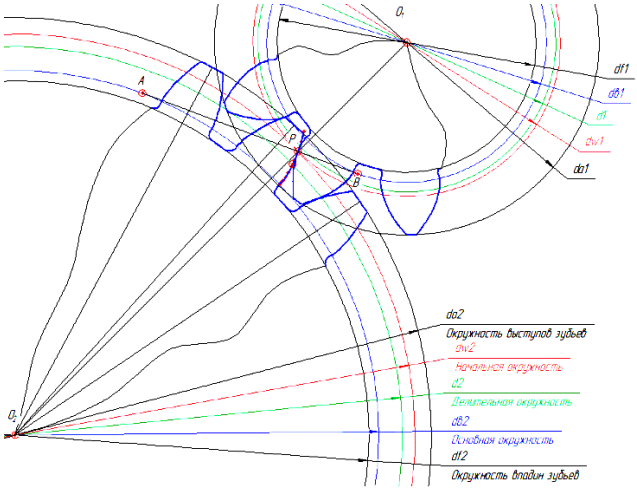


Рисунок 13.11

При викреслюванні профілів зубів треба пам'ятати наступне: наявність проміжку на активній частині лінії зачеплення між профілями, що перетинаються ліній зачеплення, свідчать про неправильне виконання креслення.

Приклади помилок (Рис.13.12):

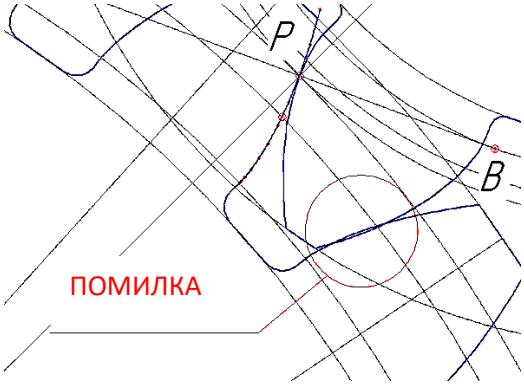


Рисунок 13.12

14. ПРОСТОРОВІ ЗУБЧАТІ ПЕРЕДАЧІ

В багатьох машинах здійснення потрібних рухів пов'язано з необхідністю передати обертальний рух з одного вала на другий за умовою, що осі цих валів або перетинаються, або схрещуються. В таких випадках використовують відповідно конічну або черв'ячну передачі. Слід зауважити також, що ці та інші передачі є окремими випадками гіперболоїдної передачі. Аксоїдами гіперболоїдної передачі є однополосні гіперболоїди, окремі частки яких, у спрощеному вигляді, використовуються як гвинтові, черв'ячні або конічні передачі.

14.1 Гіперболоїдна передача

Гіперболоїдна передача призначена для передачі обертального руху між осями, що перехрещуються у просторі (Рис.14.1).

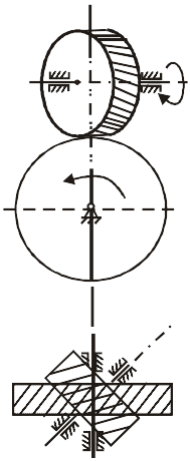


Рисунок 14.1

Нехай нам треба передати обертальний рух між осями 1 і 2 з постійним передаточним відношенням. З теоретичної механіки відомо, що в результаті цього ми отримаємо гвинтовий рух, тобто рух тіла складається з обертання навколо деякої осі і поступального руху з

швидкістю вздовж цієї осі. У цьому випадку знаходять миттєву гвинтову вісь. При обертанні цієї миттєвої гвинтової осі навколо осей 1 і 2 у відносному русі отримаємо однополосні гіперболоїди обертання з прямолінійною твірною, які перекочуються один по одному і доторкуються один до одного по миттєвій гвинтовій лінії, з ковзанням вздовж ціа осі.

Лінія найкоротшої відстані між осями позначена O_1O_2, а її довжина - через a_w. На цій лінії розташована точка P, через яку проходить миттєва гвинтова вісь.

У перерізі, перпендикулярному до миттєвої гвинтової осі гвинта, складові швидкості точки P рівні, тобто

$$r_{W1} \cdot |\vec{\omega}_1| \cdot Cos\delta_{W1} = r_{W2} \cdot |\vec{\omega}_2| \cdot Cos\delta_{W2},$$

звідки виходить, що передаточне відношення можна визначити із співвідношення:

$$U_{12} = \frac{|\vec{\omega}_1|}{|\vec{\omega}_2|} = \frac{r_{W2} \cdot Cos\delta_{W2}}{r_{W1} \cdot Cos\delta_{W1}}.$$

.

Модуль вектора відносної кутової швидкості обертання знайдемо за теоремою косинусів:

$$\omega_{12} = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2 \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot Cos\Sigma}.$$

Якщо вирізати з гіперболоїд найбільш віддалені від горловин частки й гіперболоїдну бічну поверхню замінити конічною, то матимемо гепоїдну передачу, окремим випадком якої є конічна передача.

Якщо вирізати горловини гіперболоїдів й бічну поверхню замінити циліндричною, то матимемо гвинтову передачу окремим випадком якої є черв'ячна передача .

14.2 Конічна передача

Конічна передача призначена для передачі обертального руху між осями, що пересічуться під довільним кутом Σ, який називається міжосьовим кутом (Рис. 14.2).

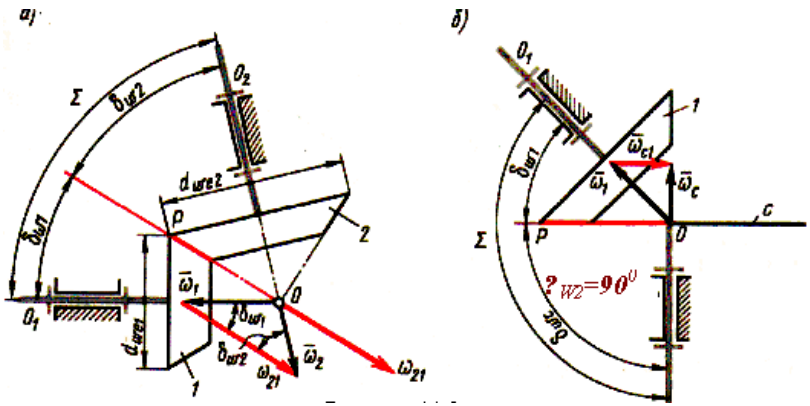


Рисунок 14.2

Якщо цей кут дорівнює 90°, то передача називається ортогональною (Рис.14.3).

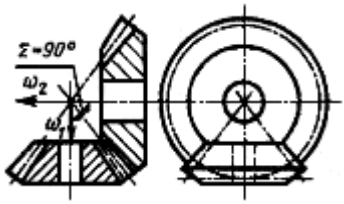


Рисунок 14.3

Зв'язок між векторами $\vec{\omega}_1$ і $\vec{\omega}_2$ кутових швидкостей коліс 1 і 2 визначається співвідношенням:

$$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_{21}. \qquad (14.1)$$

Положення вектора ω_{21} відносно векторів $\vec{\omega}_1$ і $\vec{\omega}_2$ визначають кутами δ_{W1} і δ_{W2}, сума яких рівна міжосьовому куту

$$\Sigma: \delta_{W1} + \delta_{W2} = \Sigma \qquad (14.2)$$

Якщо через точку О перетину осей O_1O і 0_20 провести вектор, то він співпаде з миттєвою оссю *OP* відносного руху ведучої й веденої ланок й визначить конічні поверхні аксоїдів, які називаються

початковими конусами. Кути δ_{W1} і δ_{W2} початкових конусів визначають з рівняння (14.1) з урахуванням теореми синусів (Рис. 14.2,а):

$$\frac{Sin\delta_{W1}}{|\vec{\omega}_2|} = \frac{Sin\delta_{W2}}{|\vec{\omega}_1|}.$$

Передаточне відношення:

$$U_{12} = \frac{|\vec{\omega}_1|}{|\vec{\omega}_2|} = \frac{Sin\delta_{W2}}{Sin\delta_{W1}}. \qquad (14.3)$$

Кути початкових конусів визначаються за формулами:

$$\delta_{W1} = arctg\left(\frac{Sin\Sigma}{U_{12} + Cos\Sigma}\right) = arctg\left(\frac{Sin\Sigma}{\frac{Z_2}{Z_1} + Cos\Sigma}\right); \qquad (14.4)$$

$$\delta_{W2} = \Sigma - \delta_{W1}. \qquad (14.5)$$

Для ортогональних передач при $\boldsymbol{\Sigma} = 90°$ співвідношення (14.4) й (14.5) мають вигляд

$$\delta_{W1} = arctg\left(\frac{1}{U_{12}}\right) = arctg\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right);$$

$$\delta_{W2} = arctg(U_{12}) = arctg\left(\frac{Z_2}{Z_1}\right).$$

Окремим випадком неортогональної передачі є плоскоконічна передача в якій поверхня одного з початкових коліс є площина й кут при вершині $\boldsymbol{\delta_{w2} = 90°}$ (Рис.14.2,б).

Параметри, які відносяться до плоского конічного колеса, позначають з індексом «с» (наприклад: число зубців $\boldsymbol{Z_c}$, кутова швидкість $\boldsymbol{\omega_c}$). Формування коліс, розміри зубців й розташування їх елементів проводять відносно базової поверхні, яка називається ділильним конусом. При проектуванні конічних передач кути $\boldsymbol{\delta_1}$ і $\boldsymbol{\delta_2}$ ділильних конусів приймають співпадаючими з кутами $\boldsymbol{\delta_{w1}}$ і $\boldsymbol{\delta_{w2}}$ початкових кіл, що значно спрощує розрахунки. Зубці утворюють на

колесі зубчатий вінець, який розташований між конусом вершин з кутом δ_a і конусом западин з кутом δ_f (Рис. 14.4).

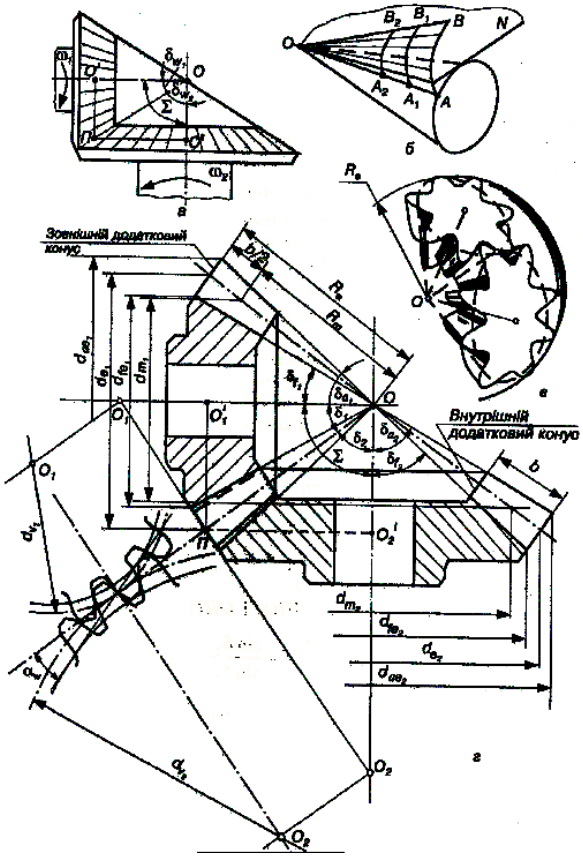


Рисунок 14.4

При виготовленні зубчатих коліс використовують базову відстань А і розмір В до вершини конуса й С - до базової площини. Поверхня, що відділяє зуб від западини, зветься боковою поверхнею зуба, Перетин бокової поверхні зуба з співвісною поверхнею зветься лінією зуба. Лінія зуба може співпадати з твірною ділильного конуса (прямі зубці) або мати кут р нахилу лінії зуба на ділильній поверхні. Розрізняють конічні колеса, які відрізняються за формою лінії зуба на

розгортці ділильного конуса (Рис.14.5): ***а*** - з прямими; ***б***- з тангенціальними; ***в*** - з круговими; ***г,д,е*** – з криволінійними зубцями.

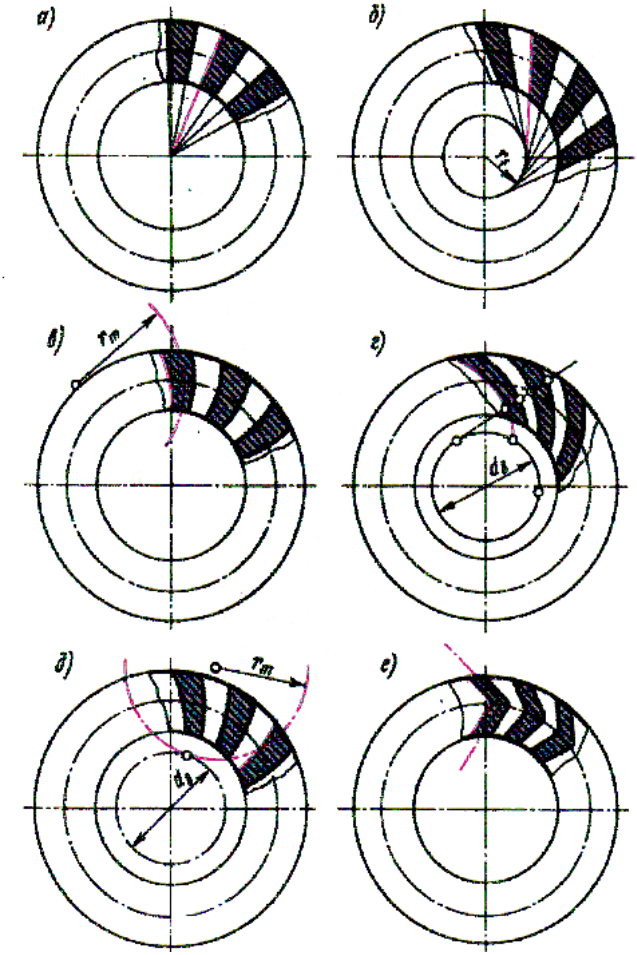


Рисунок 14.5

Розрізняють торцеві перерізи: зовнішнє, середнє, внутрішнє й поточне. При позначенні параметрів у тому чи іншому перерізі додають відповідний індекс (див. рис.14.5), наприклад для зовнішнього перерізу - ***« e »***, для середнього -***«m»***, для внутрішнього - ***« i »,*** для поточного- ***« x ».***

Радіус R_e, зовнішнього торцевого перерізу називають **зовнішньою конусною відстанню.** Відстань між зовнішнім й внутрішнім торцевими перерізами конічного колеса називають шириною зубчатого вінця і позначають « e ».

Взаємодія спряжених евольвентних конічних поверхонь при заданих початкових конусах представляє конічне евольвентне зачеплення.

Полюсна пряма PO, яка лежить у площині N_1ON_2, ‘ дотичною до основних конусів і може роздивлятись як твірна бічних поверхонь зубців. Будь-які спряжені сферичні евольвенти E_1 *і* E_2 мають лінію зачеплення, яка розташована на сфері (наприклад N_1PN_2) і є дугою великого круга сфери. Взаємодію сферичних евольвент описати аналітично досить складно. Враховуючи, що розміри зубців по висоті достатньо малі відносно радіусу сфери і профілі зубців розташовані на вузькому сферичному поясі, використовують інженерну методику розрахунку, яка полягає у використанні додаткових конусів (Рис.14.6) **.**

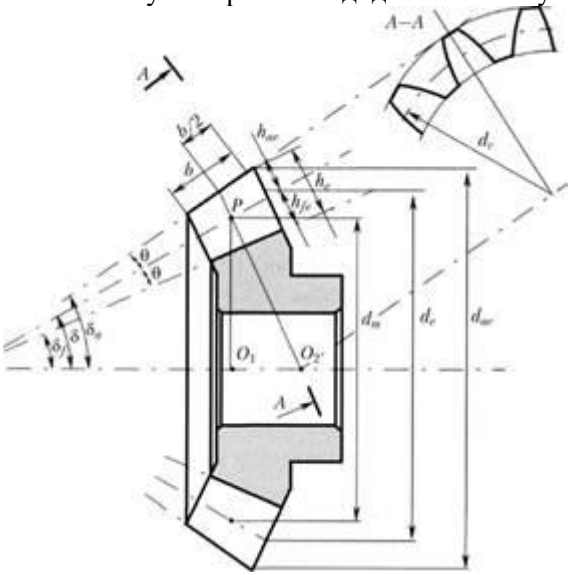


Рисунок 14.6

Додатковим ділильним конусом називають співвісну конічну поверхню, твірна якої (наприклад, PO_{v1} або $P0_{v2}$ на рис.14.4)

перпендикулярна до твірної ділильного конуса конічного зубчатого колеса.

Увід додаткових конусів дозволяє розглядати взаємодію профілів зубців не на сфері, а на поверхні спряжених зі сферою додаткових конусів. Якщо додаткові конуси розгорнути на площину, то профілі зубців стають плоскими кривими**,** досить близькими до звичайних евольвент, відповідним визначеним розмірам основних кіл, радіуси $O_{vte1}N_1$ і $O_{vte2}N_2$, яких находять як для **еквівалентної циліндричної передачі**. Параметри еквівалентної циліндричної передачі мають додатковий індекс "vt". Кожне з зубчатих коліс такої передачі називають **еквівалентним циліндричним зубчатим колесом** з числами зубців Z_{vt1} і Z_{vt2} на відміну від чисел зубців Z_1 і Z_2 на конічних колесах.

Зв'язок між числами зубців Z_{vt1} і Z_1або Z_{vt2} і Z_2 легко встановити, якщо розглянути розміри концентричних кіл конічного та еквівалентного циліндричного коліс:

$$r_{vte1} = \frac{0.5 \cdot d_{e1}}{Cos\delta_1} = \frac{0.5 \cdot m_e \cdot Z_1}{Cos\delta_1} = 0.5 \cdot m_e \cdot Z_{vt1};$$
$$r_{vte2} = \frac{0.5 \cdot d_{e2}}{Cos\delta_2} = \frac{0.5 \cdot m_e \cdot Z_2}{Cos\delta_2} = 0.5 \cdot m_e \cdot Z_{vt2}.$$

Зовнішній коловий модуль m , відповідний відстані між одноіменнними профілями сусідніх зубців по дузі концентричного кола конічного колеса на зовнішньому торці, рівен модулю еквівалентної циліндричної передачі. Тому числа зубців Z_{vt1} і Z_{vt2} можна виразити співвідношеннями:

$$Z_{vt1} = \frac{Z_1}{Cos\delta_1}; \quad Z_{vt2} = \frac{Z_2}{Cos\delta_2}. \tag{14.6}$$

У загальному вигляді числа Z_{vt1} і Z_{vt2} є дробовими і під час розрахунків не округлюються, а розраховуються з точністю до 0.01 .

Передаточне відношення еквівалентної циліндричної передачі визначається так:

$$U_{v12} = \frac{Z_{vt2}}{Z_{vt1}} = \frac{Z_2}{Cos\delta_2} \cdot \frac{Cos\delta_1}{Z_1} = U_{12} \cdot \frac{Cos\delta_1}{Cos\delta_2}. \tag{14.7}$$

14.3 Гвинтова зубчата передача

Гіперболоїдна зубчата передача, у зубчатих коліс якої початкові поверхні - круглі циліндри, називається **гвинтовою зубчатою передачею** (див.рис.9.1, ї).

Гвинтова передача складається з двох евольвентних циліндричних косозубих коліс (Рис.14.7), осі яких перехрещуються під довільним кутом Σ.

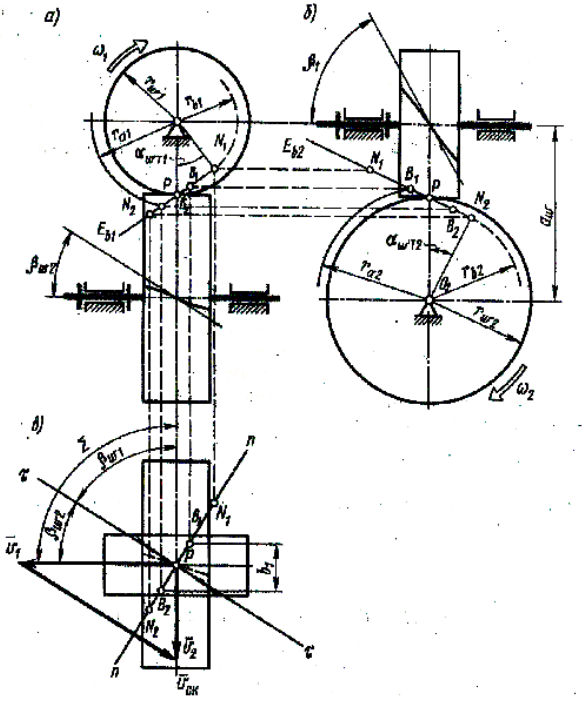


Рисунок 14.7

Міжосьовий кут $\Sigma = \beta_{w1} \pm \beta_{w2}$, де β_{w1} і β_{w2} - кути нахилу ліній зубців (гвинтових ліній) по початковим циліндрам; верхній знак відповідає одноіменному напрямку гвинтових ліній, нижній - різнойменному. У гвинтовій передачі ці кути у загальному випадку не однакові.

В окремому випадку ортогональної передачі $\Sigma = \beta_{w1} \pm \beta_{w2} = 90^0$, а напрямок гвинтових ліній зубців обох коліс - однаковий (обидва праві або обидва ліві). Розглянемо ортогональну гвинтову зубчату передачу.

На рисунку 14.7 показані три проекції початкових циліндрів гвинтової передачі з радіусами r_{w1} і r_{w2} і концентричні їм основні циліндри з радіусами r_{b1} і r_{b2}. Гвинтові лінії на початкових циліндрах показані в положенні дотику у точці Р - полюсі зачеплення, n - n - нормаль до них. Загальна дотична t - t складає з осями коліс кути відповідно β_{w1} і β_{w2}, сума яких рівна куту Σ.

Дотично до основних циліндрів через полюс зачеплення Р проходять твірні площини E_{b1} і E_{b2}, в яких розташовані прямолінійні твірні бічних поверхонь зубців, які складають кути β_{b1} і β_{b2} з осями коліс. У передач з паралельними осями твірні площини обох коліс зливаються в одну, яка є площиною зачеплення, а бічні поверхні зубців через рівність кутів $\beta_{b1} = \beta_{b2}$, доторкуються по спільній твірній (лінійний контакт). Якщо осі перехрещуються, твірні площини пересічуться по прямій, яка є геометричним місцем точок контакту бічних поверхонь зубців і яка називається **лінією зачеплення**. Вона проходить через точку Р дотику початкових циліндрів дотично до обох основних циліндрів коліс.

Проекції лінії зачеплення співпадають з проекціями площин E_{b1} і E_{b2} й складають у торцевих перерізах коліс різні за величиною кути зачеплення α_{wt1} і α_{wt2}. Крайні точки N_1 і N_2 лінії зачеплення помічені на основних циліндрах у трьох проекціях.

Якщо роздивлятись план швидкостей (Рис.14.7,в), побудований для контактної точки, яка співпадає з полюсом Р, маючи на увазі рівність проекцій нормальних складових V^n колових швидкостей, можна записати:

$$V_1 \cdot Cos\beta_{W1} = V_2 \cdot Cos\beta_{W2}; \quad V_1 = r_{W1} \cdot \omega_1; \quad V_2 = r_{W2} \cdot \omega_2,$$

$$\text{звідки } U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_{W2} \cdot Cos\beta_{W2}}{r_{W1} \cdot Cos\beta_{W1}}. \qquad (14.8)$$

Таким чином, особливість гвинтової передачі заключається у тому, що передаточне відношення цієї передачі залежить не тільки від співвідношення радіусів r_{w1} і r_{w2}, як у циліндричних передач, а й від величин кутів β_{w1} і β_{w2}. Гвинтова передача має ще одну властивість: при

заданому напрямку обертання ведучого колеса можливо міняти напрямок обертання веденого за рахунок зміни напрямленості гвинтових ліній зубців.

Контакт бічних поверхонь зубців теоретично відбувається в одній точці, практично ж внаслідок зносу і деформації матеріалу - по невеличкій площині. В результаті на робочих поверхнях зубців виникають великі контактні напруження, які у поєднанні зі значним ковзанням профілів й при відсутності умов для утворення мастильного клина можуть привести до заїдання робочих поверхонь зубців. Тому гвинтові зубчаті передачі, як правило, використовуються при відносно невеликих потужностях при неперервному й достатньому змащуванні.

14.4 Черв'ячна зубчата передача

Черв'ячна зубчата передача є окремим випадком гіперболоїдної (см. рис.9.1,*з,и*) й гвинтової (см.рис.9.1,*й,к*) ортогональної передач. Передача складається з черв'яка і черв'ячного колеса (см.рис. 9.1,*й*). Черв'яком називається косозубе зубчате колесо, лінія зубців якого робить один або більше обертів навколо його осі. Число зубців черв'яка Z_1 називають **числом заходів***;* Z_1 частіше всього рівне 1,2,4. Черв'ячне колесо нарізають фрезою, яка представляє з себе точну копію черв'яка. Тому в черв'ячних передачах дотик ниток черв'яка і зубців колеса відбувається по лінії (лінійний контакт).Для збільшення контакту ободу черв'ячного колеса надають форму, при якій колесо охоплює черв'як (див.рис.9.1,*к*). Числа зубців черв'ячного колеса Z_2 приймають рівним 32...80, іноді 200.. 300, а в окремих випадках до 1000.

Як правило, в черв'ячній передачі ведучим є черв'як , тому черв'ячна передача частіше всього працює як редуктор (тобто уповільнююча).

Передаточне число черв'ячної передачі $U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{Z_2}{Z_1}$. Передаточне число вибирається у межах 8...80, а іноді до 1000.

Найбільш поширеними видами черв'ячних зубчатих передач є передачі з циліндричним черв'яком і глобоїдні передачі.

Глобоїдні черв'ячні передачі завдяки більш кращим умовам зачеплення (хорошим гідродинамічним умовам змащення, які забезпечують стійкий мастильний клин у зоні контакту) можуть передавати більші потужності, ніж передачі з циліндричним черв'яком.

Розглянемо схему зачеплення черв'ячного колеса з архімедовим черв'яком (Рис.14.8,*а,б*).

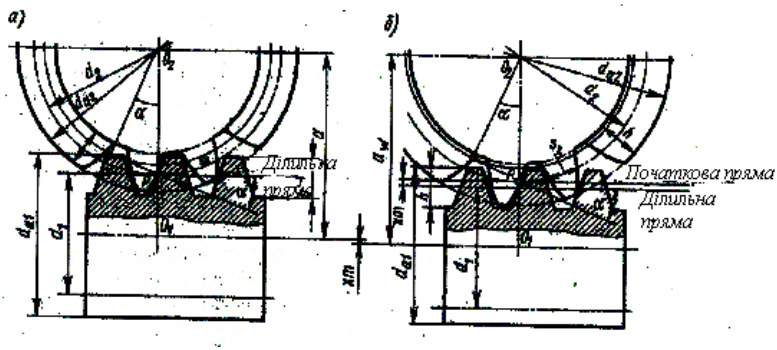


Рисунок 14.8

Бічна поверхня нитки архімедова черв'яка представляє собою лінійчату гвинтову поверхню, переріз якої площиною, перпендикулярною до осі, утворює архімедову спіраль. В осьовому перерізі ці черв'яки мають прямолінійний профіль зуба з кутом профілю α = 20°. Взаємодія такого черв'яка й черв'ячного колеса у площині, перпендикулярній до осі колеса і яка проходить через вісь черв'яка (середня площина черв'ячної передачі), зводиться до зачеплення рейки з прямолінійним і колеса з евольвентним профілями зубців, тобто при робочому зачепленні черв'ячної передачі відтворюється станочне зачеплення. Ділильна пряма рейкового профілю співпадає з твірною ділильного циліндра черв'яка. Оскільки модуль рейки стандартний, то осьовий модуль черв'яка також має стандартне значення.

Діаметр ділильного циліндра черв'яка вибирають пропорційним осьовому модулю черв'яка, тобто $d_1 = q \cdot m$, де q - коефіцієнт діаметра черв'яка**.** Значення m, q і z повинні відповідати ДСТ 2144-76.

Якщо коефіцієнт зміщення вихідного твірного контуру інструмента при нарізанні черв'ячного колеса $x \neq O$, то початковий циліндр черв'яка не буде зливатись з його ділильним циліндром. У такому разі діаметр початкового циліндра черв'яка:

$$d_{W1} = m \cdot (q + 2 \cdot x) \qquad (14.9)$$

Нахил гвинтової лінії нитки по ділильному циліндру визначають ділильним кутом підйому γ . Кутом γ зветься гострий кут між дотичною у даній точці до гвинтової лінії на ділильному циліндрі й площиною торцевого перерізу черв'яка. На підставі рис.14.9 кут γ визначимо із співвідношення

$$tg\gamma = \frac{P_{Z1}}{(\pi \cdot d_1)}.$$

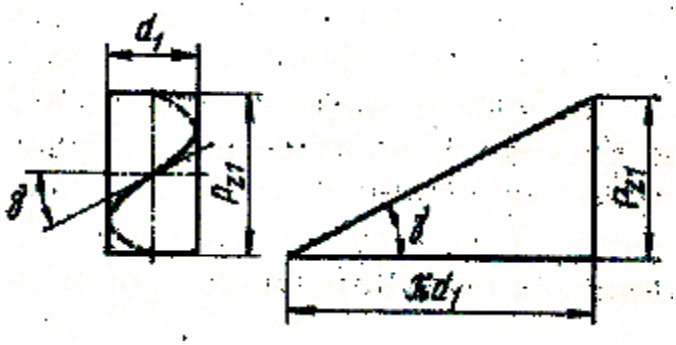


Рисунок 14.9

Тут $\boldsymbol{P_{Z1}}$ – хід витка**,** тобто відстань між одноіменними осьовими профілями одного витка по твірній ділильного циліндра:

$$P_{Z1} = p \cdot Z_1,$$

де p - крок черв'яка.

Тоді $tg\gamma = \frac{P_{Z1}}{\pi \cdot d_1} = \frac{p \cdot Z_1}{\pi \cdot d_1} = \frac{m \cdot Z_1}{d_1} = \frac{Z_1}{q}$.

Діаметр голівок черв'яка $d_{a1} = m \cdot (q + 2 \cdot h_{a1}^*)$.

Діаметр циліндра западин

$d_{f1} = 2 \cdot (h_a^* + c_0) \cdot m = m \cdot [q - 2 \cdot (h_a^* + c_0)]$;

висота витка $h = m \cdot (2 \cdot h_a^* + c_0)$;

товщина витка по ділильному циліндру $s_1 = \pi \cdot m/2$.

Для черв'ячного колеса:

діаметр ділильного (і початкового) кола $d_2 = m \cdot Z_2$;

діаметр кола голівок $d_{a2} = m \cdot (Z_2 + 2 \cdot x + 2 \cdot h_a^*)$;

діаметр кола западин $d_{f2} = m \cdot (Z_2 + 2 \cdot x - 2 \cdot h_a^* - 2 \cdot c_0)$;

висота зуба $h = m \cdot (2 \cdot h_a^* + c_0)$;

товщина зуба по ділильному колу $s_2 = m \cdot (\pi/2 + 2 \cdot x \cdot tg\alpha)$;

міжосьова відстань черв'ячної передачі $a_W = m \cdot [(q + Z_2)/2 + x]$.

Коефіцієнт зміщення x вихідного твірного контуру інструмента вибирають у межах $x = \pm 1$.

Перевагами черв'ячної передачі є: компактність конструкції при великих передаточних числах, плавність й безшумність роботи, можливість самогальмування. Недоліки - підвищена швидкість ковзання і внаслідок цього відносно малий ККД., необхідність застосування для коліс дорогих антифрикційних матеріалів.

15. БАГАТОЛАНКОВІ ЗУБЧАТІ МЕХАНІЗМИ

При проектуванні зубчатих механізмів багатьох машин і приладів виникає необхідність забезпечити передачу обертального руху з великим передаточним відношенням або при великих міжосьових відстанях. У таких випадках застосовують багатоланкові зубчаті механізми, які знижують швидкість обертання вихідного вала по відношенню до вхідного - редуктори, або підвищують її - мультиплікатори.

Багатоланкові зубчаті механізми можуть бути плоскими й просторовими. Вони бувають двох основних видів: механізми з нерухомими осями усіх коліс й механізми, осі окремих коліс яких мають складний рух, тобто рухаються відносно опор. До другого виду відносяться планетарні й хвильові зубчаті механізми. Великою перевагою другого виду є їх компактність. Проектування багатоланкових зубчатих механізмів включає в себе два етапи: вибір структурної схеми й визначення чисел зубців для відтворення заданого передаточного відношення.

15.1 Багатоланкові зубчаті механізми з нерухомими осями коліс

Число степенів волі багатоланкових зубчатих механізмів з нерухомими осями коліс рівне одиниці і $U = Const$. Такі механізми проектуються неспіввісними (Рис.15.1, Рис.15.2), або співвісними (Рис. 15.3).

Перші, у свою чергу, поділяються на рядові (з розгорнутою схемою) й ступінчаті. Загальне передаточне відношення багатоланкового механізму дорівнює добутку передаточних відношень окремих механізмів (ступенів), які послідовно входять до його складу:

$$U_{1j} = U_{12} \cdot U_{23} \cdot U_{34} \cdots U_{(j-1)j}.$$

Рядові зубчаті механізми представляють з себе послідовне з'єднання декількох пар **одиничних** зубчатих коліс (Рис. 15.1).

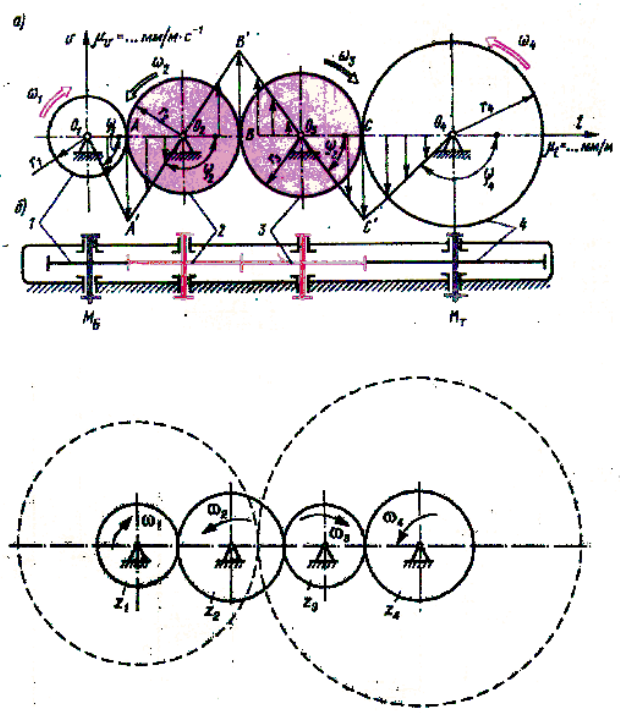


Рисунок 15.1

Аналітичне визначення передаточного відношення грунтується на формулі (15.1). Так, для рядового механізму (див. рис.15.1), загальне передаточне відношення буде

$$U_p = U_{14} = U_{12} \cdot U_{23} \cdot U_{34}, \text{ де}$$

$U_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{r_2}{r_1} = -\frac{z_2}{z_1}$ - передаточне відношення першої пари зубчатих коліс, які входять у зачеплення зовнішнім засобом (знак мінус);

$U_{23} = \frac{\omega_2}{\omega_3} = -\frac{r_3}{r_2} = -\frac{z_3}{z_2}$ - передаточне відношення другої пари аналогічних коліс;

$U_{34} = \frac{\omega_3}{\omega_4} = -\frac{r_4}{r_3} = -\frac{z_4}{z_3}$ - передаточне відношення третьої пари.

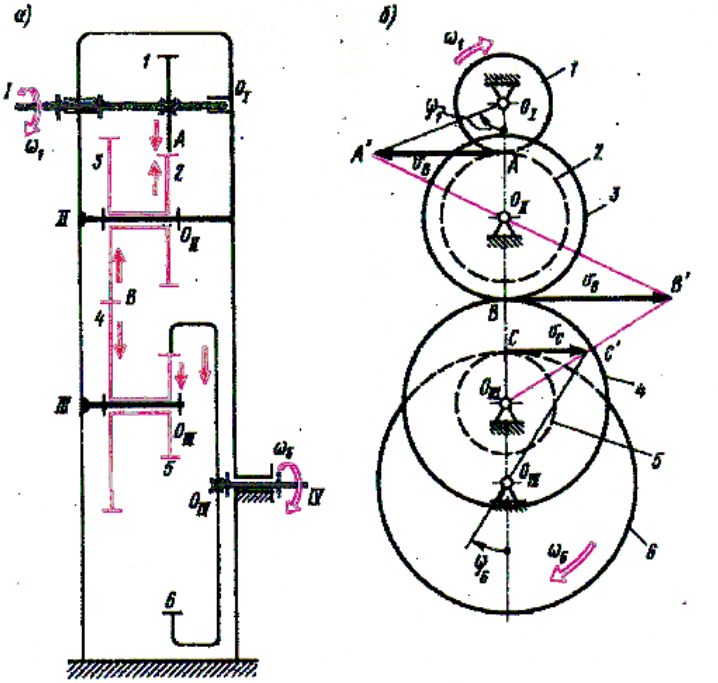


Рисунок 15.2

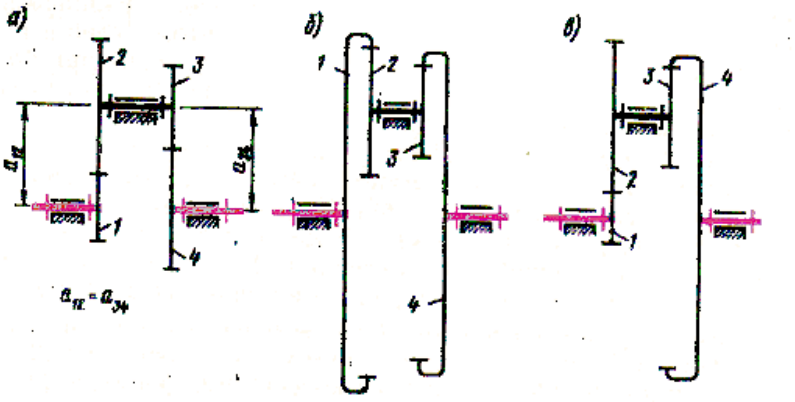


Рисунок 15.3

Загальне передаточне відношення

$$U_p = U_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(-\frac{z_3}{z_2}\right) \cdot \left(-\frac{z_4}{z_3}\right) = -\frac{z_4}{z_1} = -\frac{r_4}{r_1}$$

У загальному вигляді при ***i*** колесах у механізмі

$$U_{1i} = \frac{\omega_1}{\omega_i} = (-1)^k \cdot \frac{z_i}{z_1} = (-1)^k \cdot \frac{r_i}{r_1} \quad (12.2)$$

де ***к*** - кількість передач зовнішнього зачеплення.

Ми бачимо, що кількість зубців коліс 2 і 3, які знаходяться одночасно у зачепленні, не впливає на величину передаточного відношення механізму. Ці колеса ставляться тоді, коли треба змінити напрям обертання вихідного вала або збільшити міжосьову відстань.

Графічне визначення передаточного відношення таких механізмів можна здійснити методом планів швидкостей (див. розділ "Кінематика"). Використовуючи цей метод і будуючи трикутники швидкостей (ламана $O_1A'B'C'0_4$ на рис.15.1, а), отримаємо наочне ухвяення про характер зміни швидкостей від одного вала до другого. Передаточне відношення усього механізму

$$U_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4} = \frac{tg\psi_1 \cdot \mu_l/\mu_V}{tg\psi_4 \cdot \mu_l/\mu_V} = -\frac{tg\psi_1}{tg\psi_4}.$$

або у загальному вигляді

$$U_{1j} = \pm tg\psi_1/tg\psi_j \; . \quad (15.3)$$

Ступінчаті зубчаті механізми представляють з себе послідовне з'єднання декількох пар зблокованих коліс (спарені колеса 2 і 3, 4 і 5 на рис.15.2). Передаточне відношення цього механізму:

$$U_{16} = U_{12} \cdot U_{34} \cdot U_{56} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \frac{\omega_3}{\omega_4} \cdot \frac{\omega_5}{\omega_6} =$$
$$= \left(-\frac{z_2}{z_1}\right) \cdot \left(-\frac{z_4}{z_3}\right) \cdot \left(+\frac{z_6}{z_5}\right) = +\frac{r_2 \cdot r_4 \cdot r_6}{r_1 \cdot r_3 \cdot r_5}.$$

Зі схеми рис. 15.2 видно, що $\omega_2 = \omega_3$, $\omega_4 = \omega_5$. Тому після скорочення отримаємо

$$U_{16} = \frac{\omega_1}{\omega_6} = +\frac{z_2 \cdot z_4 \cdot z_6}{z_1 \cdot z_3 \cdot z_5}, \text{ або } \quad U_{1j} = (-1)^k \cdot \frac{z_2 \cdot z_4 \cdots z_j}{z_1 \cdot z_3 \cdots z_{j-1}}. \quad (15.4)$$

Передаточне відношення ступінчатої передачі дорівнює відношенню добутків чисел зубців ведучих коліс до добутків чисел зубців ведених коліс.

За рахунок підбору чисел зубців у ступінчатому редукторі можна отримати великі передаточні відношення при тих же габаритах, що й у рядового. Знак передаточного відношення визначається множником $(-1)^K$ або за правилом стрілок (див.рис. 15.2). Просторові багатоланкові механізми використовуються у тих випадках, коли необхідно передати рух між осями, що перехрещуються або перетинаються (Рис. 15.4).

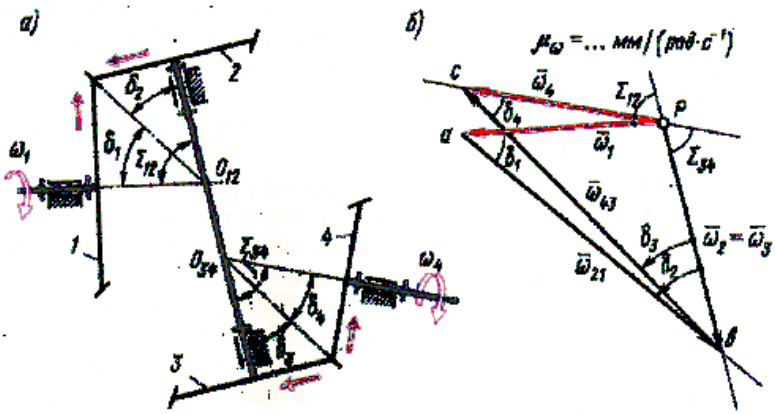


Рисунок 15.4

Тут використані конічні колеса, кути між осями яких Σ_{12} і Σ_{34} можуть мати будь-які значення.

При аналітичному дослідженні такого механізму визначаються ω_4 або передаточне відношення за відомими параметрами з виразу

$$U_{14} = U_{12} \cdot U_{34} = \frac{|\vec{\omega}_1|}{|\vec{\omega}_4|} = \frac{Sin\delta_2 \cdot Sin\delta_4}{Sin\delta_1 \cdot Sin\delta_3}.$$

Напрямок обертання коліс визначається за допомогою стрілок. При графічному методі дослідження будується план кутових швидкостей коліс, які обертаються навколо осей, що перетинаються, звідки находять шукане передаточне відношення й швидкість веденого колеса

$$U_{14} = \frac{|\vec{\omega}_1|}{|\vec{\omega}_4|} = \frac{\overrightarrow{pa}}{\overrightarrow{pc}}; \quad \omega_4 = (\overrightarrow{pc})/\mu_\omega.$$

15.2 Планетарні зубчаті механізми

Такі багатоланкові зубчаті механізми обов'язково мають колеса с рухомими осями (Рис. 15.5), які називаються **планетарними** або ***сателітами.***

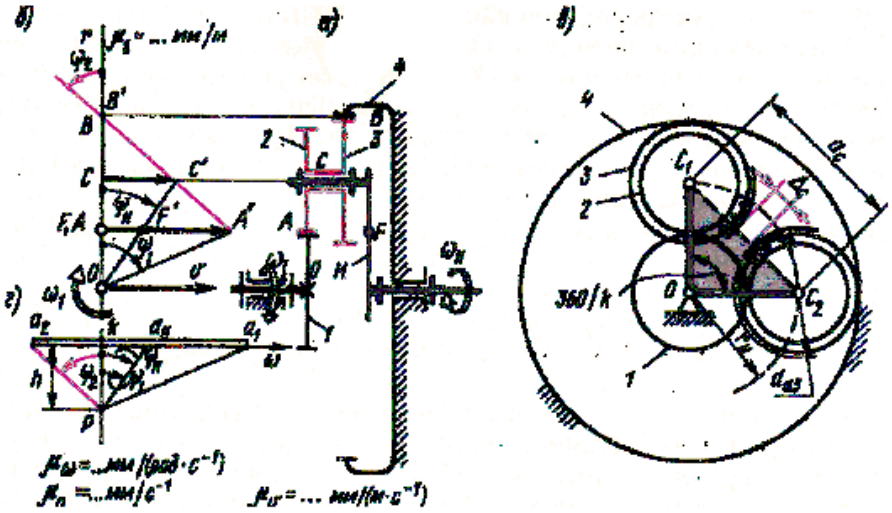


Рисунок 15.5

Рухома ланка, у якій розташовані осі сателітів, зветься **водилом**. Колесо, яке обертається навколо нерухомої осі і по якому перекочуються сателіти, називається **центральним;** нерухоме

центральне колесо називається **опорним.** Як правило планетарні механізми виготовляються співвісними.

Планетарні механізми розподіляються на **планетарні редуктори й мультиплікатори,** які мають одну степінь волі й обов'язково мають опорне колесо, і **зубчаті диференціальні механізми,** число степенів волі яких два й більше і які не мають опорного колеса.

На рис.15.5 показаний планетарний механізм в якому сателіт здійснює складний рух: обертається навколо власної осі (відносно водила) з ω_2 й разом з водилом обкочується з ω_H навколо осі 00 (переносний рух). В реальних механізмах ставляться декілька симетрично розташованих сателітів ***к***; (колеса 2 і 3 на рис. 15.5). Їх ставлять з метою **зменшення габаритів передачі, зменшення зусиль в зачепленні, розвантаження підшипників центральних коліс, зрівноваження водила.**

При кінематичному розрахунку враховується один сателіт, тому що інші є пасивними (зайвими) у кінематичному відношенні ланками. Планетарний редуктор можна перетворити на диференціальний, якщо звільнити нерухоме (опорне) колесо й надати йому обертальний рух.

Навпаки, будь-який диференціальний редуктор можна перетворити на планетарний, якщо закріпити одне (W=2) або декілька його центральних коліс. Це є так звана **властивість зворотності планетарних механізмів**, яке дає можливість використовувати однакові методи їх дослідження й проектування.

Аналітичний метод дослідження базується на способі оберненого руху. Усім ланкам механізму надається кутова швидкість, яка рівна за величиною й протилежна за напрямком кутовій швидкості водила ω_H . Тоді водило стає нерухомим й механізм з планетарного перетворюється на звичайний ступінчатий механізм з нерухомими осями коліс (обернений механізм).

Швидкості коліс тспер будуть іншими: замість ω_1 буде $\omega_1^{(H)} = \omega_1 - \omega_H$ (індекс у дужках вказує номер нерухомої ланки); аналогічно замість $\boldsymbol{\omega_2 = \omega_3}$ буде $\boldsymbol{\omega_2^{(H)} = \omega_2 - \omega_H = \omega_3 - \omega_H;}$ замість $\omega_4 = 0$ буде $\omega_4^{(H)} = -\omega_H$.

Для кожної пари оберненого механізму можна записати

$$\frac{\omega_1 - \omega_H}{\omega_2 - \omega_H} = -\frac{r_2}{r_1}; \qquad \frac{\omega_3 - \omega_H}{-\omega_H} = +\frac{r_4}{r_3}.$$

Ця система рівнянь зв'язує відносні кутові швидкості окремих планетарних пар при зупинці водила. При її розв'язанні визначаємо ω або U. Перемножуючи ці рівняння, маємо

$$\frac{\omega_3 - \omega_H}{-\omega_H} = +\frac{r_2 \cdot r_4}{r_1 \cdot r_3} = U_{12}^{(H)} \cdot U_{34}^{(H)} = U_{14}^{(H)} = \left(1 - \frac{\omega_1}{\omega_H}\right) = 1 - U_{1H}.$$

Звідки $$U_{1H} = 1 - U_{14}^{(H)}. \qquad (15.5)$$

Ця формула справедлива для будь-якої схеми планетарного редуктора при нерухомому центральному колесі. У загальному вигляді при нерухомому опорному колесі *j* передаточне відношення від будь-якого планетарного колеса *i* до водила *H:*

$$U_{1H}^{(j)} = 1 - U_{1j}^{(H)}, \quad \text{або} \quad U_{1H}^{(j)} + U_{1j}^{(H)} = 1 \qquad (15.6)$$

Графічний метод дослідження зводиться до побудови плану швидкостей для кожного колеса і визначення з них кутових швидкостей та передаточних відношень. Для цього на вертикаль (Рис. 15.5,а), переносяться характерні точки схеми (O,A,B,C) і відкладається відрізок $AA' = V_A \cdot \mu_V$, який відповідає вектору швидкості точки А колеса 1.

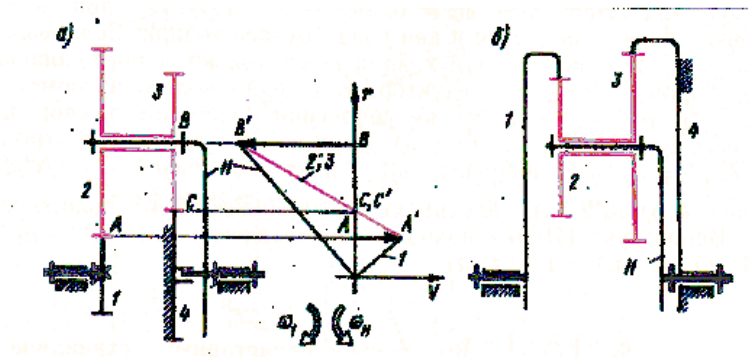


Рисунок 15.6

З'єднавши точки A' і O лінією (під кутом ψ_1), отримаємо трикутник швидкостей цього колеса, у якому OA' - пряма розподілення лінійних швидкостей першого колеса. Для блока коліс 2-3 швидкості

двох точок A і B відомі: $V_{A2} = V_{A1}$. та V_B = 0 (точка В є миттєвим центром швидкостей блока 2-3). З'єднаємо точки A' і B, отримаємо пряму розподілення швидкостей коліс 2-3 (під кутом ψ_2). На цій прямій лежить точка C' - кінець вектора CC', який відповідає лінійній швидкості центра сателітів 2-3 і точки С водила. Якщо провести промінь ОС' (під кутом ψ_H), то отримаємо трикутник швидкостей для водила (ΔОСС'). Відношення тангенсів кутів нахилу швидкостей вхідної і вихідної ланок дає значення передаточного відношення редуктора даної схеми

$$U_{1H}^{(4)} = \frac{\omega_1}{\omega_H} = \frac{tg\psi_1}{tg\psi_H} = \left(\frac{AA'}{OA}\right) \cdot \left(\frac{OC}{CC'}\right).$$

Враховуючи, що $AA' = CC' \cdot \frac{AB}{BC}$, маємо

$$U_{1H}^{(4)} = \frac{(r_4 - r_1) \cdot (r_1 - r_3)}{r_1 \cdot r_3} = 1 + \frac{r_2 \cdot r_4}{r_1 \cdot r_3}.$$

Будуючи план кутових швидкостей (Рис.15.3,*г*), можна визначити

$$\omega_2 = \frac{ka_2}{\mu_\omega}; \quad \omega_H = \frac{ka_H}{\mu_\omega}; \quad \text{або} \quad n_H = \frac{ka_H}{\mu_n}; \quad U_{1H}^{(4)} = \frac{ka_1}{ka_H}.$$

Кінематичне дослідження диференціального механізму з метою визначення швидкостей обертання ланок проводиться аналогічно.

15.3 Вибір схем планетарних механізмів та їх кінематичні особливості

На практиці є чотири найпоширеніші схеми простих планетарних механізмів, в яких сателіти (подвійні-Рис.15.5, 15.6, 15.7 і 15.8, або поодинокі - Рис. 15.9, 15.10) входять в зачеплення одночасно з двома центральними колесами.

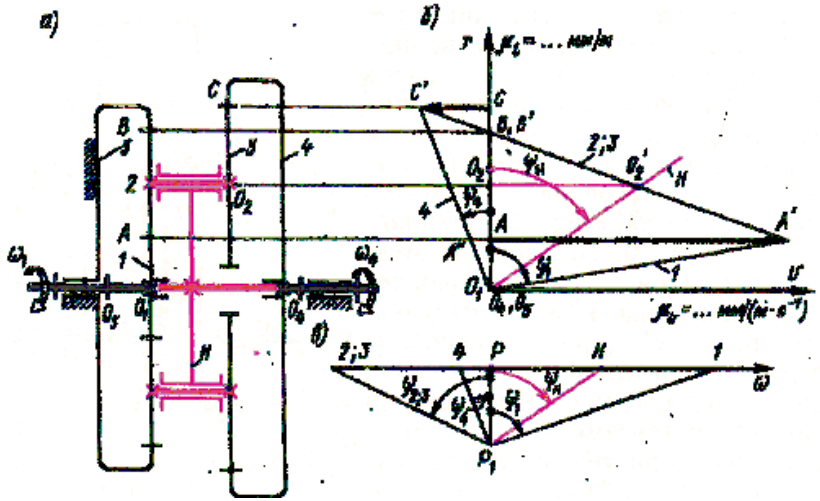


Рисунок 15.7

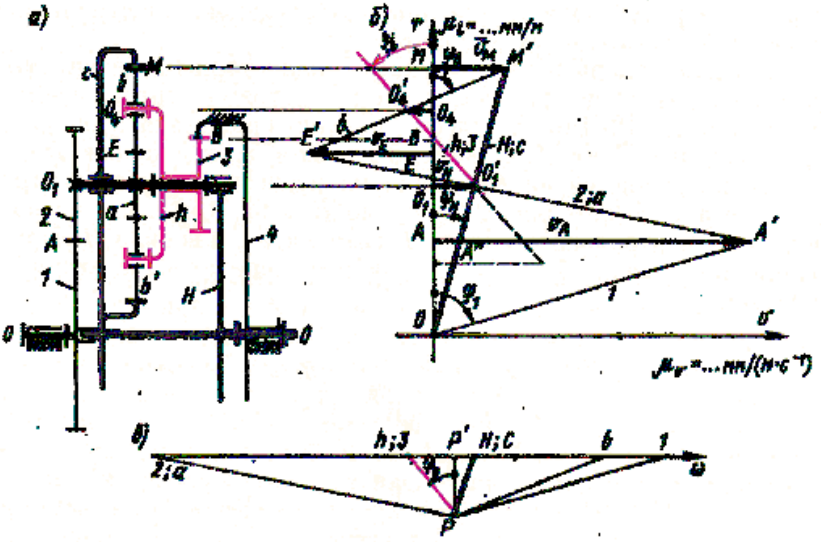


Рисунок 15.8

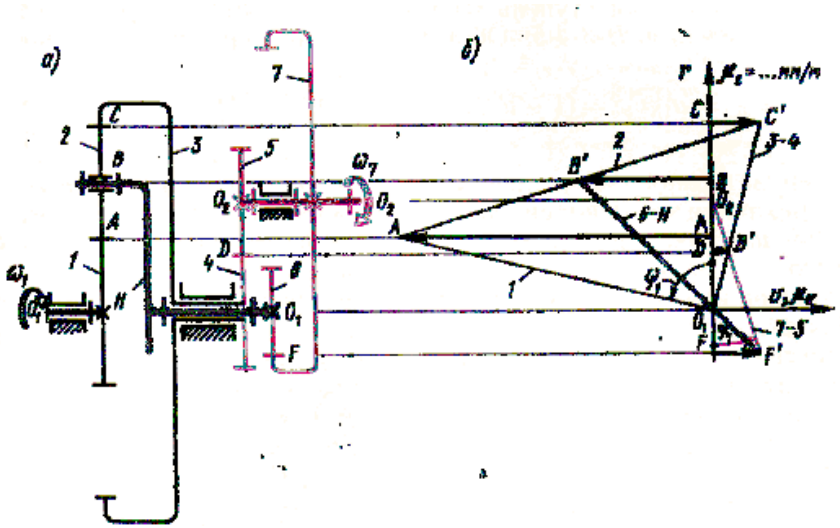


Рисунок 15.9

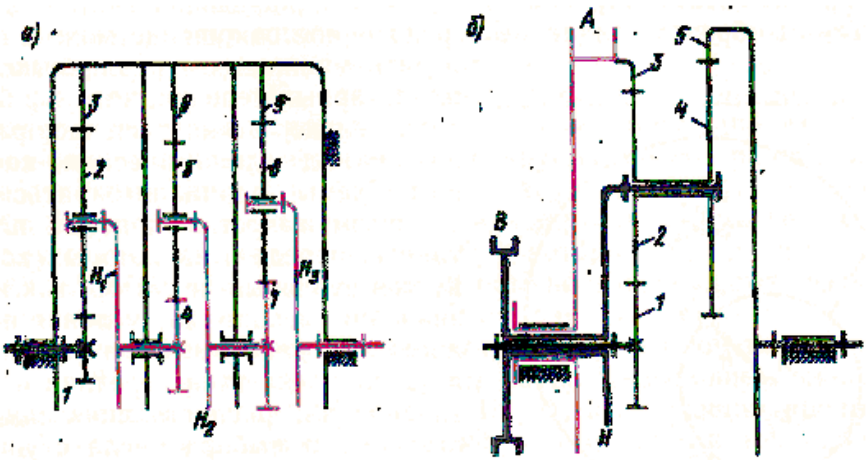


Рисунок 15.10

Усі вони мають три співвісних вала, один з яких нерухомий. По чергове гальмування одного з валів дає можливість отримати у кожному механізмі три різні швидкості. Передаточне відношення усіх цих редукторів визначається формулою (15.6), з якої виходить, що в

залежності від знака $U_{ij}^{(H)}$ механізми мають різні кінематичні можливості. Якщо $U_{ij}^{(H)} > 0$, то передаточне відношення реального планетарного механізму $U_{ped} = U_{Hi}^{(j)}$ може бути значно більшим за передаточне відношення оберненого механізму $U_{ij}^{(H)}$, складеного з тих же коліс. Якщо $U_{ij}^{(H)} < 0$, то передаточне відношення планетарного механізму $U_{iH}^{(j)}$ лише на одиницю більше$U_{ij}^{(H)}$ оберненого механізму. У відповідності з цим будуть різними втрати на тертя й динамічні якості передач. Усі ці якості в значній мірі передбачається принципом утворення структурних схем найпростіших планетарних механізмів. Тому усі схеми простих механізмів за своїми якостями розподіляються на дві основні групи: механізми з додатним передаточним відношенням оберненого механізму$U_{ij}^{(H)} > 0$ - рис.15.6,*а,6*, і механізми з від'ємним передаточним відношенням оберненого механізму $U_{ij}^{(H)} < 0$ - рис. 15.5, 15.10.

Механізми першої групи мають подвійні сателіти і можуть бути складені з коліс тільки зовнішнього або тільки внутрішнього зачеплення.

Передаточні відношення реального механізму буде $U_{H1}^{(H)} = 1 - \frac{z_2 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_3}$. Як правило такі механізми працюють як редуктори, тобто ведучим є водило**.**

Тоді маємо

$$U_{H1}^{(4)} = \frac{1}{U_{1H}^{4}} = \frac{z_1 \cdot z_3}{z_1 \cdot z_3 - z_2 \cdot z_4}.$$

На рис. 15.6 наведено механізм, який є дворядним (колеса 1-2 і 3-4). Підбором чисел зубців коліс можна отримати великі передаточні відношення, Наприклад, якщо для схеми 15.6,*а* прийняти $z_1 = z_3 = 100$; $z_1 = 99;\ \ z_4 = 101;$

$$U_{H1}^{(4)} = \frac{1}{1 - U_{14}^{(H)}} = \frac{1}{1 - (9999/100000)} = 10000.$$

Однак коефіцієнт корисної дії менше 1%. Тому , незважаючи на великі кінематичні можливості, планетарні механізми цієї групи використовують лише у тих випадках, коли корисні навантаження

невеликі. Переваги мають механізми з двома внутрішніми зачепленнями**,** які мають менші габарити і більший ККД.

Механізми другої групи обов'язково складаються з коліс різнотипного зачеплення з подвійним (Рис.15.5) або поодиноким (Рис.15.9) сателітом.

У відповідності з цим обернений механізм є дворядним (Рис.15.5), у якого $U_{14}^{(H)} = (-z_2/z_1) \cdot (+z_4/z_3) < 0$, або однорядним (Рис. 15.9) **.** Напрямки руху вихідного й вхідного валів у редукторів цього типу завжди однакові. Механізми цих схем мають широке застосування у силових передачах багатосателітних редукторів середньої і великої потужності при $U_{1H}^{(4)}$ = 3...15 і високому ККД (η = 0.96...0.98). Однорядний механізм має ті ж переваги, що й дворядний, але вигідно відрізняється малим осьовим розміром. Механізм такої схеми широко використовується в силових передачах, в багатоступеневих планетарних коробках швидкостей (Рис.15.10,а) або як самостійна передача й особливо у якості вмонтованих редукторів електроприводів, устаткування дистанційного управління, літальних апаратів, тощо.

Наступний розвиток структури планетарних механізмів в осьовому напрямку приводить до схем з трьома центральними колесами (Рис. 15.7), біпланетарних механізмів (Рис. 15.8). Якщо два співвісних вала зубчатого диференціала з'єднуються (замикаються) з ведучим або веденим валом через яку-небудь передачу (просту зубчату або планетарну), то отримаємо замкнуту планетарну передачу (рис. 12.9). Замкнуті диференціальні механізми мають більш високий ККД, що пояснюється можливістю розподілення потужності, що передається, на два паралельні потоки й дозволяє реалізувати значно більші крутні моменти на виході при малих габаритах. Такі передачі використовують в силових приводах.

Для отримання великих передаточних відношень використовують багатоступеневі планетарні механізми, які утворюються послідовним з'єднанням простих планетарних механізмів (Рис.15.10,а). Механізм, який включає дві планетарні ступені з загальним водилом (Рис.15.10.б),зветься спареним планетарним механізмом.

15.4 Визначення чисел зубців коліс планетарних механізмів

Після вибору схеми планетарної передачі, призначення числа сателітів ($к$) й модуля (m), проводиться підбір чисел зубців коліс так, щоб найбільш точно забезпечити задане передаточне відношення, а також умови співвісності, сусідства, складання й відсутності заклинення коліс передачі. Задане передаточне відношення забезпечують підбором чисел зубців так, щоб при підстановці їх значень у формулу (15.6) отримане фактичне значення передаточного відношення максимально наближалось до заданого. Допустиме відхилення фактичного від заданого 1...4%.

Умова співісності вхідного й вихідного валів **вказує на те, що обидва центральні зубчаті колеса й водило повинні мати спільну геометричну вісь обертання,** завдяки чому забезпечується зачеплення сателітів з центральними колесами**.** Для цього (див**.** Рис.15.6,а,б; Рис.15.5,а; Рис.15.10,а - одна ступінь) повинно бути:

$$\begin{aligned} r_{H1} &= r_1 + r_2 = r_3 + r_4; \quad z_1 + z_2 = z_3 + z_4; \\ r_{H2} &= r_1 - r_2 = r_4 - r_3; \quad z_1 - z_2 = z_4 - z_3; \\ r_{H3} &= r_1 + r_2 = r_4 - r_3; \quad z_1 + z_2 = z_4 - z_3; \\ r_{H4} &= r_1 + r_2 = r_3 - r_2; \quad z_1 + z_2 = z_3 - z_2; \end{aligned} \qquad (15.7)$$

Ця умова обмежує вибір розмірів одного з чотирьох коліс при довільному призначенні радіусів трьох інших.

Умова сусідства (умова спільного розташування декількох сателітів по колу в одній площині) **вимагає, щоб при багатосателітній конструкції сусідні сателіти не зачіпали своїми зубцями один одного**.

Для цього треба призначати числа зубців (радіуси) коліс так. щоб відстань між осями сусідніх сателітів не була більше діаметра кола голівок d_{ac}^{max} найбільшого з сателітів 3 (див.рис.15.5,в), тобто $a_c > d_{ac}^{max}$, або $a_c > d_{ac}^{max}$, де Δс - зазор між колами голівок сусідніх сателітів, величина якого визначається допусками на точність складання. З трикутника C_1OC_2 цього рисунка $a_c = 2 \cdot (r_1 + r_2) \cdot Sin(\pi/k)$, де $к$- кількість сателітів. Тоді

$$Sin\left(\frac{\pi}{k}\right) > \frac{d_{ac}^{max}}{2 \cdot (r_1 + r_2)}.$$

Для коліс без зміщення ця умова має вигляд

$$Sin\left(\frac{\pi}{k}\right) > \frac{z_c^{max_a^*}}{(r_1+r_2)}. \qquad (15.8)$$

Якщо в механізмі $z_2 > z_3$, то в чисельнику береться $z_c^{max_2}$; якщо $z_2 < z_3$, то ставлять $z_c^{max_3}$. У знаменнику береться плюс при зовнішньому зачепленні й мінус при внутрішньому зачепленні коліс 1 -2.

Умова складання при рівних кутах між сателітами **враховує необхідність одночасного зачеплення усіх сателітів з центральними колесами при снметричній геометрії зон зачеплення.** Після установки першого сателіта рухоме центральне колесо займає строго визначене положення, і якщо не виконати деякі вимоги, то при установці наступних сателітів їх зубці можуть й не бути розташованими точно навпроти западин одного з центральних коліс і тоді здійснити подальше складання механізму неможливо. Щоб цього уникнути, треба так підібрати числа зубців коліс, щоб зубці усіх сателітів (колеса 2 і 3) (див.рис.15.5.в) точно увійшли у западини центральних коліс (1 і 4).

Простіше всього правильне складання здійснюється, якщо сателіти рівномірно розташовані по колу $r_н$, тобто якщо центральні кути між радіусами-векторами центрів сателітів однакові й рівні 360/$к$. Це спрощує виготовлення й експлуатацію механізму (дозволяє уникнути застосування противаг). Щоб сформулювати цю умову, розглянемо процес складання редуктора (див.рис.15.5,в). Умовимось ставити сателіти на свою вісь у водилі в одному й тому ж положенні, коли центр сателіта розташований на вертикалі, яка проходить через вісь центральних коліс й вісь симетрії западини зуба цих коліс. Приймемо, що обидва колеса блока сателітів мають однакову орієнтацію зубців один відносно другого у всіх $\boldsymbol{к}$ блокових сателітів. Поставимо перший сателіт на вісь, коли вона займає «вертикальне» положення, повернемо водило на кут $\phi_H = 2 \cdot \pi \cdot (1/k + N)$, де N - кількість повних поворотів водила. При цьому перше колесо повернеться також на деякий кут $\phi_1 = \phi_H \cdot U_{1H}$. Ставимо другий сателіт на свою вісь, яка знаходиться тепер на тому місці, яке займав сателіт до повороту водила («вертикальне» положення). При однакових сателітах другий сателіт

увійде на своє місце у тому ж «вертикальному» положенні тільки тоді, коли центральне колесо, яке знаходиться з ним у зачепленні (перше) повернеться на ціле число кутових кроків (ціле число зубців), тобто коли $\phi_1 = C \cdot \tau = C \cdot 2 \cdot \pi / z_1$, де С- будь-яке ціле число. Підставивши ці значення, маємо $C \cdot 2\pi / z_1 = \phi_H \cdot U_{1H}$. Або

$$C \cdot 2\pi / z_1 = (2\pi / k + 2\pi \cdot N) \cdot U_{1H}.$$

Звідки

$$\frac{z_1 \cdot U_{1H}}{k} \cdot (1 + k \cdot N) = C. \qquad (15.9)$$

Виконання цієї умови означає, що якщо один з сателітів установити у вибраному вертикальному положенні, то й усі інші сателіти вільно увійдуть в зачеплення з відповідними центральними колесами у тому ж положенні при повороті водила на кут

$$\phi_H = \frac{2\pi}{k} \cdot (1 + k \cdot N)\ . \qquad (15.10)$$

Умова правильного зачеплення - умова відсутності заклинення передачі (при призначенні кількості зубців коліс, виконаних без підрізання й зрізу зубців). Щоб уникнути заклинення передач внутрішнього зачеплення, складених з евольвентних нульових коліс з прямими зубцями, необхідно вибирати Z кожного колеса передач більше допустимого мінімуму Z_{min}. Для коліс з внутрішніми зубцями при α = 20° й $h_a^* = 1.0$ маємо $z_{min\,\text{вн}} = 85$; для коліс з зовнішніми зубцями гоїш $z_{min\,\text{зов}}$= 20 або 18 зубців, а для усієї передачі різниця чисел зубців коліс, що знаходяться в зачепленні, $z_{вн} - z_{зов}$ повинна бути не менше 8.

Таким чином, задача визначення числа зубців зводиться до складання вихідних рівнянь, які відображають вказані умови для кожної конкретної схеми, й спільному їх розв'язку.

16. ХВИЛЬОВІ ЗУБЧАТІ ПЕРЕДАЧІ

Хвильова зубчата передача (Рис. 16.1) відрізняється від інших зубчатих механізмів тим, що один з її елементів - гнучке колесо - потерпає хвильову деформацію, за рахунок якої відбувається передача обертального руху.

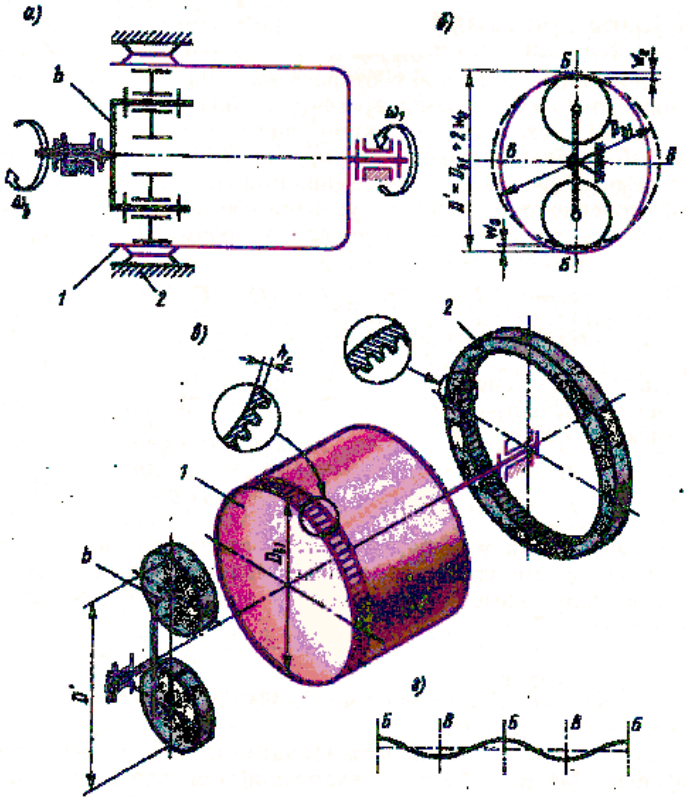


Рисунок 16.1

Хвильова зубчата передача складається з трьох основних елементів: гнучкого зубчатого колеса 1 (Рис.16.1,*а,в*, Рис.16.2,*а,б*), жорсткого колеса 2 і генератора хвиль ***b (6)***.

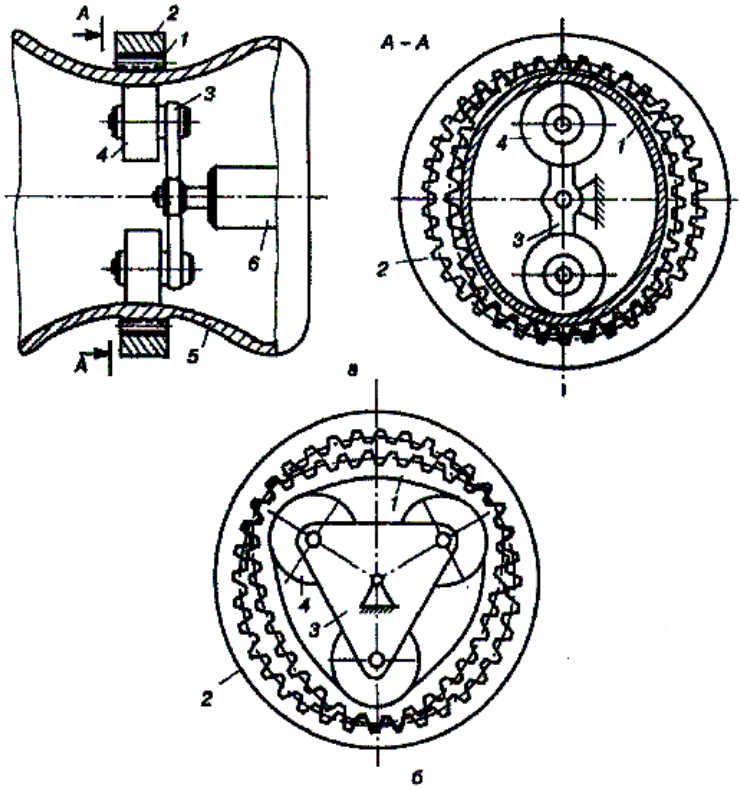


Рисунок 16.2

Гнучке зубчате колесо представляє з себе тонкостінну оболонку. Один кінець її з'єднаний з валом й зберігає циліндричну форму, на другому кінці її торця нарізано зубчате колесо з числом зубців Z_1. Цей кінець оболонки деформується на величину $2w_0$ генератором хвиль, який введений у її середину.

У торцевому перерізі гнучке колесо відносно початкової круглої отримує криволінійну форму під дією генератора хвиль (Рис. 16.1 *,б)*. Контур деформованого гнучкого колеса утворює відносно недеформованого дві хвилі деформації (Рис. 16.1,*г*), або три хвилі деформації (Рис.16.2,*б*). Вісь *ББ* зветься великою оссю, а вісь *ВВ* - малою оссю кривої деформації. На осі *ББ* розташовані вершини хвилі деформації, а на осі *ВВ* - западини. Число хвиль деформації може бути

рівним 1,2,3, і тд. Найчастіше використовують двоххвильові передачі, у яких числа зубців гнучкого й жорсткого коліс мають різницю у два зуба:

$$z_2 - z_1 = 2.$$

Гнучкі колеса для хвильових передач, які призначені для передачі руху через герметичну стінку, представляють з себе закриту з одного боку оболонку.

Генератор хвиль призначений для утворення й руху хвилі деформації на гнучкому зубчатому колесі. Генератори хвиль бувають механічними, електромагнітними, пневматичними й гідравлічними. Використовуються декілька видів механічних генераторів: двохроликовий, чотирироликовий, дисковий, кільцевий й кулачковий. Генератор хвиль може розташовуватись усередині гнучкого колеса і ззовні.

16.1 Кінематика хвильової передачі

При обертанні генератора кожна хвиля деформації переміщується по периметру гнучкого колеса, в результаті чого кожен зуб гнучкого колеса за один оберт генератора хвиль двічі входить у зачеплення з жорстким колесом. При нерухомому жорсткому колесі після повного оберту генератора хвиль ($\varphi_b = 2\pi$) вал гнучкого колеса повернеться у протилежному генераторові напрямку на кут, рівний $\phi_1 = 2\pi \cdot (z_1 - z_2)/z_1$, де $2\pi/z_1$- кутовий крок гнучкого колеса.

Від кутів повороту можна перейти до кутових швидкостей, тоді передаточне відношення від генератора хвиль до гнучкого колеса при нерухомому жорсткому

$$U_{b1}^{(2)} = \frac{\omega_b}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{z_1}\cdot(z_1 - z_2)} = -\frac{z_1}{(z_2 - z_1)}. \qquad (16.1)$$

Якщо зупинити гнучке колесо, то після повороту генератора хвиль на кут $\phi_b = 2\pi$ жорстке колесо повернеться у тому ж напрямку, що і генератор хвиль, на кут $\phi_2 = 2\pi \cdot (z_2 - z_1)/z_2$, де $2\pi/z_2$- кутовий крок жорсткого колеса.

У цьому випадку передаточне відношення від генератора хвиль до жорсткого колеса:

$$U_{b2}^{(1)} = \frac{\omega_b}{\omega_2} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{z_2}\cdot(z_2 - z_1)} = \frac{z_2}{(z_2 - z_1)}. \qquad (16.2)$$

З формул (16.1) і (16.2) видно, що передаточне відношення хвильової передачі залежить тільки від чисел зубців коліс. Хвильова передача може бути двоступеневою (Рис. 16.3).

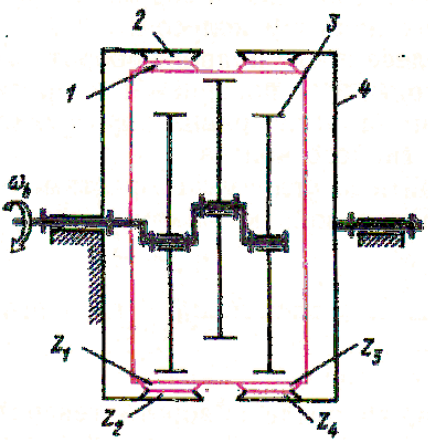


Рисунок 16.3

У цьому випадку гнучке колесо 1 виконується у вигляді кільця з двома зубчатими вінцями Z_1 і Z_3, які входять у зачеплення з жорсткими колесами 2 і 4 (з числами зубців Z_2 і Z_4 відповідно). Жорстке колесо 2 нерухоме; рух передасться за допомогою двох хвильових зачеплень від генератора хвиль 3 жорсткому колесу 4. Передаточне відношення многоступеневої хвильової передачі (Рис. 16.3) визначається за формулою

$$U_{b4} = \frac{z_1 \cdot z_4}{z_1 \cdot z_4 - z_2 \cdot z_3}. \qquad (16.3)$$

В передачі з хвильовою зубчатою муфтою, якщо $\boldsymbol{z_3 = z_1}$ і $\boldsymbol{z_4 = z_1}$, то вихідний вал зв'язаний з колесом 4 муфти, і передаточне відношення

$$U_{b4} = \frac{z_1}{z_2 - z_1}. \quad (16.4)$$

Якщо$\boldsymbol{z_3 = z_1}$ і $\boldsymbol{z_2 = z_1}$ то вихідний вал зв'язаний з колесом 4 передачі, і передаточне відношення

$$U_{b4} = \frac{z_4}{z_4 - z_1}. \quad (16.5)$$

16.2 Особливості хвильового зачеплення

При обертанні генератора хвиль через кожну точку обода гнучкого колеса за один оберт генератора проходять дві хвилі деформації. Напруги в матеріалі гнучкого колеса не повинні перевищувати допустимих при знакозмінному навантаженні і у всякому разі не виходять за межі лінійної ділянки кривої закону Гука. Тому для сталевих коліс величина деформації $\boldsymbol{w_0}$ і товщина обода гнучкого колеса під зубом $\boldsymbol{h_c}$ відносно невеликі:

$$w_0 = (0.003 \cdots 0.015) \cdot d_1; \qquad h_c = (0.005 \cdots 0.03) \cdot d_1.$$

Мала величина деформації $\boldsymbol{w_0}$ визначає малу різницю ділильних радіусів жорсткого і гнучкого коліс до деформації й малу різницю чисел коліс, а співвідношення величин $\boldsymbol{w_0}$ і d_1відповідають великій кількості зубців. При таких співвідношеннях величин $\boldsymbol{w_0}$, Z_1, Z_2 зазори між зубцями в зоні вершини хвилі деформації малі і у значній степені зникають при навантаженні й навіть при складанні передачі. Завдяки цьому у хвильовій передачі дуже велике число пар зубців (до 40 %) одночасно знаходиться у зачепленні.

З усього цього можна відмітити такі особливості хвильової зубчатої передачі:

- велике передаточне відношення U, яке получається в одній ступені. Для передач зі сталевими гнучкими колесами (Рис.16.1) U = 50 ... 300, для двоступеневої передачі (Рис. 16.3) U = 2000 ... 10^4 й більше;
- при одночасному зачепленні великої кількості числа пар зубців коліс передача сприймає значні навантаження при відносно малих габаритах;

- многопарність зачеплення і декілька однакових зон зачеплення викликають значне усереднення помилок виготовлення й монтажу коліс і забезпечують високу кінематичну точність хвильових передач;

- з цієї ж причини рівень шуму хвильової передачі менше, ніж в звичайних многоланкових зубчатих або планетарних передачах;

- відносно невелика величина деформації гнучкого колеса дає можливість виконати його у вигляді глухої оболонки й виготовити герметичні хвильові механізми, які передають обертальний рух з одного середовища у інший без рухомих ущільнень;

- коефіцієнт корисної дії для передаточних відношень U = 50 ... 200 достатньо високий й лежить у межах 70 ... 85 %.

17. КУЛАЧКОВІ МЕХАНІЗМИ

17.1 Загальні відомості

Робочий процес багатьох машин викликає необхідність мати у їх складі механізми, рух вихідних ланок яких повинен виконуватись строго за заданим законом і бути узгодженим з рухами інших механізмів. Для виконання цієї задачі найбільш простими, надійними й компактними є кулачкові механізми.

Кулачковим механізмом називається триланковий механізм, складений із стояка і двох рухомих ланок, сполучених між собою за допомогою вищої кінематичної пари, і призначений для відтворення заданого періодичного закону руху веденої ланки.

Відтворення руху вихідної ланки штовхача вони здійснюють теоретично точно. Вхідна ланка кулачкового механізму зветься **кулачком**. Закон руху штовхача, який задається передаточною функцією, визначається профілем кулачка і є основною характеристикою кулачкового механізму, від якої залежать його функціональні властивості, а також динамічні і вібраційні якості. Позитивними якостями кулачкових механізмів порівняно з іншими механізмами є простота, надійність, компактність. Головний недолік кулачкових механізмів полягає в тому, що на елементах **вищої** кінематичної пари діють значні питомі навантаження, що призводить до їх спрацювання (зміна геометричної форми профілю кулачка) і, як наслідок, до зміни закону руху штовхача. Отже, заданий закон руху штовхача може буги досягнутий тільки при підвищеній точності виготовлення. Так, для кулачків, що працюють на великих швидкостях, рекомендують, щоб відхилення профілю кулачка від теоретично точного не перевищувало $\Delta = 0.0075$ мм. В зв'язку з цим забезпеченню точності профілю кулачка в процесі його проектування і виготовлення слід приділяти особливу увагу. Проектування кулачкового механізму розподіляється на ряд етапів: призначення закону руху штовхача, вибір структурної схеми, визначення основних і габаритних розмірів. розрахунок координат профілю кулачка.

17.2 Види кулачкових механізмів та їх особливості

Загальну уяву про кінематичні схеми кулачкових механізмів можна отримати на прикладі газорозподільних механізмів двигунів внутрішнього згоряння, які показані на рисунках 17.1 і 17.2.

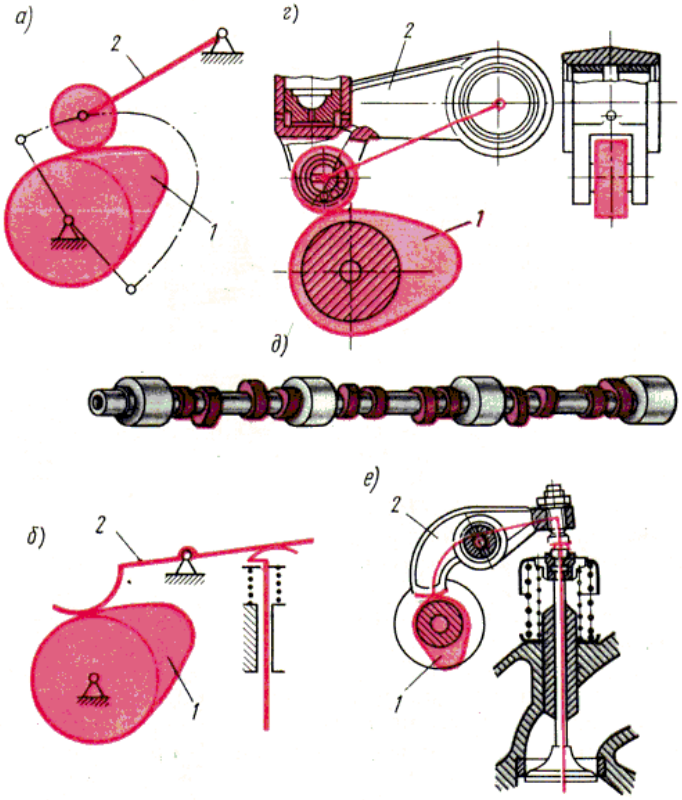


Рисунок 17.1

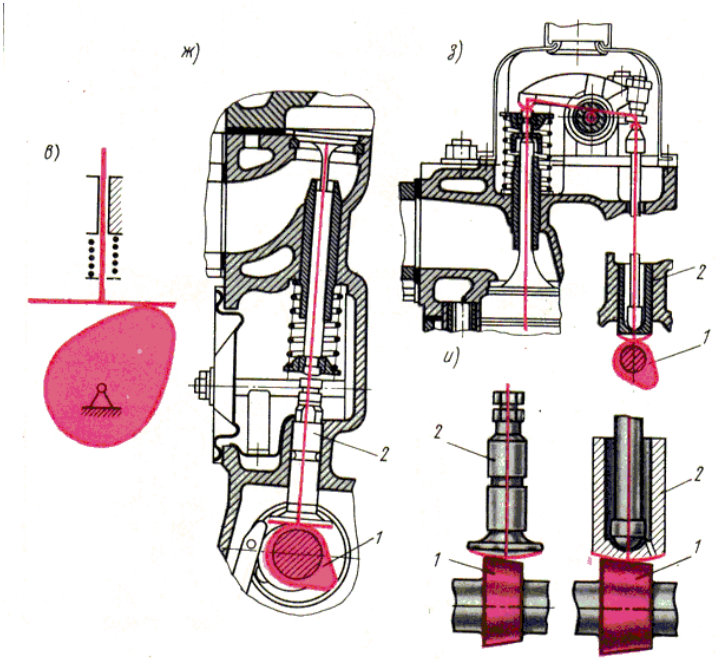


Рисунок 17.2

Ці механізми призначені для відкриття та закриття клапанів, що дає змогу наповнювати циліндри двигунів пальною сумішшю (або повітрям), випускати відпрацьовані гази і надійно ізолювати камеру згоряння від навколишнього середовища під час тактів стиску й робочого ходу.

Кінематичні схеми механізмів газо розподілення, а також конструктивне оформлення їх ланок 1 і *2*, наведені на Рис 17.1 і Рис.17.2.

В залежносіі від особливостей конструкцій, функціонального призначення машини і низки інших факторів використовують різні види кулачків (Рис. 17.3), основними з яких є: *а, б* - плоскі з поступальним переміщенням кулачка; *в, г* - циліндричні; *д, е, ж* - дискові; *з* - конічні; *й* - гіперболоїдні; *к* – коноїдні. Штовхач кулачкового механізму здійснює рухи: *а.в, г, д. ж, з* -поступальні; *б, е, й* - обертальний; *к* - поєднання двох поступальних.

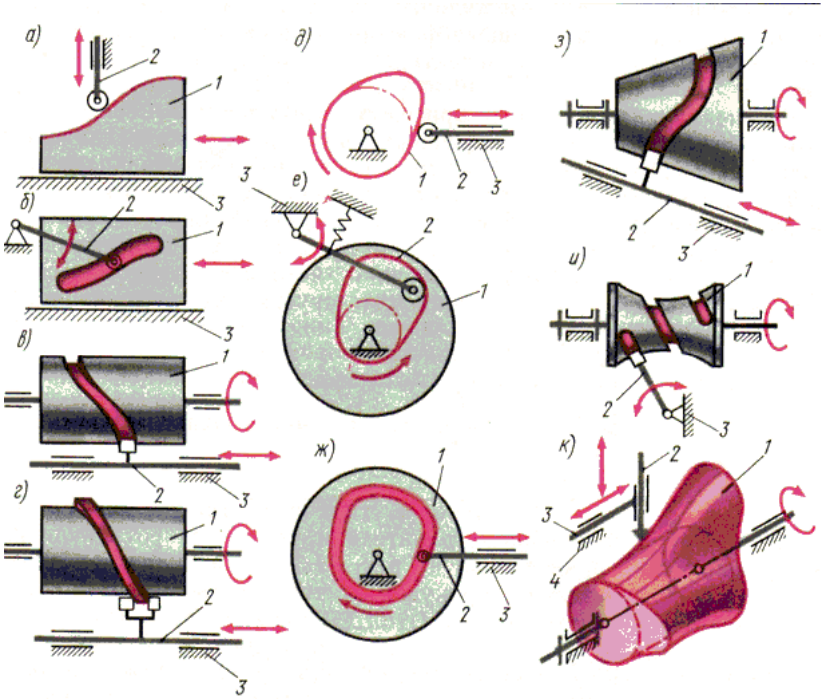


Рисунок 17.3

Контакт елементів у вищій кінематичній парі може забезпечуватись **геометричним замиканням** за рахунок пазів (Рис. 17.3, *б, ж, и),* охоплюючих роликів (Рис. 17.3, *г*) і таке інше, або **силовим замиканням** пари шляхом дії снли: ваги, пружності пружин (див. Рис.17.1, б, в, е, ж, з*)*, тиску рідини або повітря і т. і. Робоча поверхня штовхачів. яка сприймає навангаження від кулачка, зношується. Щоб зменшити знос, розподілити його рівномірно по контактній поверхні штовхача і підвищити надійність й довговічність механізму, використовують штовхачі різної конструкції; найбільше поширення мають (див на рис. 17.1) : *а, г* - роликові; в, *ж* - тарільчаті з плоскою, *б, е* -циліндричною й *з, й* - сферичною контактними поверхнями, а також гострі зі сферою дуже малого радіуса. Виконання штовхачів з роликами на кінці дає можливість уникнути тертя ковзання, замінюючи його на тертя кочення, зменшити знос елементів вищої кінематичної пари й підвищити надійність механізму.

Кількість можливих сполучень кулачків і штовхачів, способів замикання кінематичної пари та їх конструктивного оформлення дуже велика. Найбільш доцільне сполучення вибирається з урахуванням великої кількості факторів. Вдале рішення отримують на підставі досвіду експлуатації й даних про надійність та довговічність кулачкових механізмів найрізноманітніших машин. Однак є основні фактори й показники, які необхідно враховувати при проектуванні конкретних кулачкових механізмів.

Кулачкові механізми мають одну **ступінь волі** і можуть відтворювати закон руху веденої ланки залежно від кута повороту кулачка. Так, механізм з обертальним кулачком і штовхачем, який рухається поступально, відтворює закон руху:

$$S = S_0 + S(\phi),$$

де S – переміщення штовхача; S_0 – початкове положення штовхача; φ – кут повороту кулачка.

Кулачковий механізм з коливальним штовхачем відтворює закон руху:

$$\beta = \beta_0 + \beta(\phi),$$

де β – кут повороту штовхача; β_0 – початкове положення штовхача.

17.3 Закон руху штовхача та його вибір

Жодного критерію, який враховував би увесь складний комплекс питань, пов'язаний з вибором закону руху штовхача, не існує. Тому, оцінюючи ефективність профілю кулачка встановлюють комплекс заданих умов та обмежень і розташовують їх у послідовності зменшення важливості. На перших етапах проектування знаходять рішення для обов'язкових умов, а потім уточнюють, виходячи з економічних, технологічних, експлуатаційних та інших практичних міркувань. Найбільш типовим графіком залежності між переміщенням штовхача і кутом повороту кулачка є крива, що наведена на Рис 17.4,*б* для кулачкового механізму з поступально рухаючим шювхачсм (Рис.17.1,а).

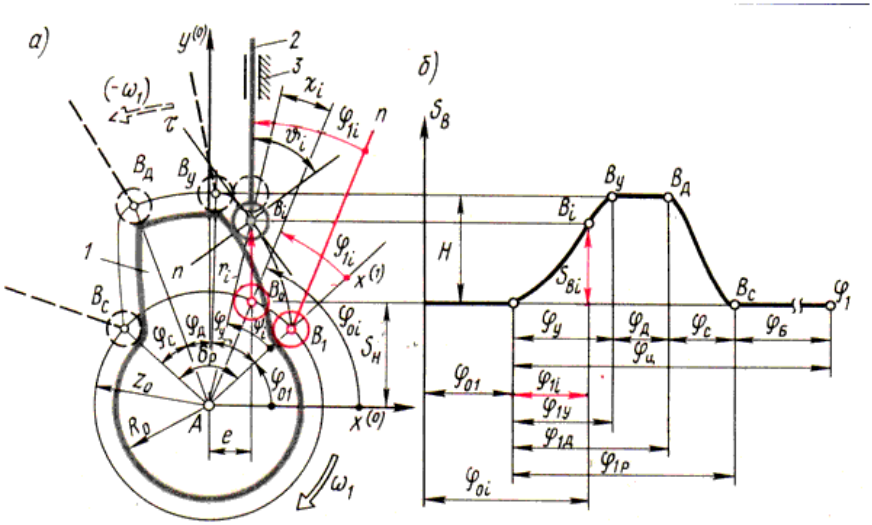


Рисунок 17.4

На цьому графіку всередині **циклу** (кут $\varphi_ц$) можна виділити чотири фази і відповідні їм **фазові кути** повороту кулачка: кут віддалення ($\varphi_в = \varphi_1$), кут дальньою стояння ($\varphi_{дс} = \varphi_2$) , кут наближення ($\varphi_н = \varphi_3$) і кут ближнього стояння($\varphi_{бс} = \varphi_4$) Прості кулачки мають тільки по одній з вказаних фаз. Деякі з цих фаз можуть бути відсутніми, але фаза віддалення обов'язкова.

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 = 2 \cdot \pi.$$

Сума $\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = \phi_p$ - зветься **робочим профільним кутом**, який є центральним кутом, усередині якого розташовано робочий профіль кулачка (Рис. 17.4,*б*).

При геометрнчному замиканні контакту у **вищій кінематичній парі** кулачок є ведучою ланкою на обох фазах руху штовхача: як при віддаленні, так і при наближенні. При силовому замиканні контакту (Рис. 17.1,*б*) рух штовхача на фазі наближення забезпечується силою пружини (або силою ваги, тиску повітря, тощо), а на фазі віддалення під дією профілю кулачка, який збуджує силу у контакті, напрямлену по спільній нормалі n - n (Рис.17.4,*а*). Кут між нормаллю n - n і напрямком руху вихідної ланки 2 називають **кутом тиску υ**.

Кут тиску: 1 - кут між нормаллю до контактуючих профілів і напрямком руху вихідної ланки; 2 – кут між повною реакцією між контактуючими ланками та її корисною складовою.

Фазові кути – це центральні кути профілю кулачка, які забезпечують відповідні фази (віддалення, дальнього стояння, наближення і ближнього стояння) руху штовхача.

Поточний кут тиску υ є величиною змінною і може мати знак (плюс або мінус) в залежності від розташування нормалі відносно вектора швидкості штовхача.

Координати $x_B^{(0)}$, $y_B^{(0)}$ точки В на профілі кулачка визначають положення штовхачів у нерухомій системі координат $Ax^{(0)}y^{(0)}$. Координата $x_B^{(0)}= e$ визначає зміщення осі штовхача 2 відносно осі А обертання кулачка 1. Координата $y_B^{(0)}$ може бути представлена у вигляді суми $(S_H + S_{Bi})$ у якій перша складова $S_H = \sqrt{r_0^2 + e^2}$ є величиною сталою, а $S_{Bi(\phi_i)}$функцією кута повороту кулачка φ_1. Радіус r_0 називають початковим радіусом центрового профілю, який є траєкторією осі ролика у відносному коченні по конструктивному профілю з початковим радіусом R_0. Слід звернути увагу на те, що полярний кут φ_i точки B_i на профілі кулачка у загальному вигляді не дорівнює куту повороту кулачка φ_{1i}:

$$\psi_i = \phi_{1i} + \chi_i,$$

де $\chi_i = arctg\left[(S_H + S_{Bi}) \ \ /e\right] - arctg(S_H/e)$.

В окремому випадку, коли $e = 0$ кут $\chi_i = 0$ і $\varphi_{1i} = \chi_i$.

Радіус-вектор АВ точки В, r_i і його найбільше значення $r_{найб}$, визначаються з співвідношень:

$$r_i = \sqrt{(S_H + S_{Bi})^2 + e^2}; \quad r_{найб} = \sqrt{(S_H + H)^2 + e^2}.$$

Координати точки В в рухомій системі координат $Ax^{(1)}y^{(1)}$, яка зв'язана з кулачком 1, визначають з співвідношень:

$$x_B^{(1)} = r_i \cdot cos\,\psi_i, \quad y_B^{(1)} = r_i \cdot sin\,\psi_i.$$

Використання обчислювальної техніки в процесі проектування кулачкових механізмів вимагає, щоб закон руху веденої ланки був поданий в аналітичному вигляді. Практика показала, що цей закон доцільно виражати через **аналоги швидкостей** та прискорень.

У практиці проектування найбільше застосування отримали відносно прості закони руху шговхача, що показані на Рис.17.5 для фази віддалення штовхача: *а* - лінійний; *б* - параболічний; *г* - косинусоїдальний; *д* - синусоїдальний; *в* , *е* , *ж* - описані поліномами.

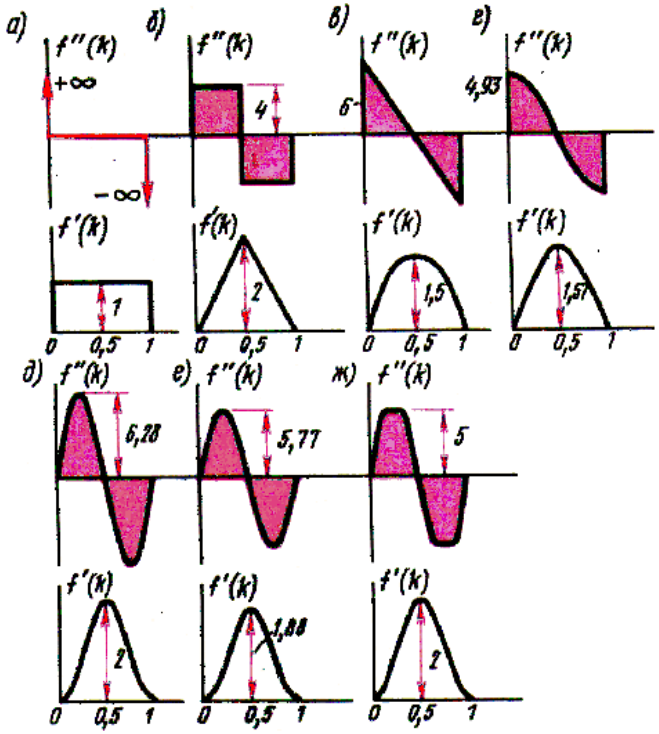


Рисунок 17.5

Багато з цих законів можна представити у формі, наведеній на рис. 17.5.

При лінійному законі швидкість руху штовхача на фазі віддалення постійна, а прискорення рівне нулю, але на початку і в кінці фази прискорення дорівнює нескінченності, що проявляється у формі «жорсткого» удару.

Такий закон припустимий при малих масах штовхача і малих швидкостях руху.

В точках розриву кривої прискорення, характерних для параболічного (*б, в*) і косинусоїдального (*г*) законів руху, прискорення й сили інерції шговхача змінюються на кінцеву величину («м'який» удар). Якщо криві зміни прискорення плавні (*д, е, ж)* удари теоретично відсутні за умовою, що похибки виготовлення профілів достатньо малі.

Закон руху веденої ланки кулачкового механізму при сталій кутовій швидкості кулачка можна записати:

а) для поступально рухаючого штовхача

$$S = S(\phi),$$
$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{dS}{d\phi} \cdot \frac{d\phi}{dt} = \frac{dS}{d\phi} \cdot \omega_1;$$
$$a = \frac{d^2S}{dt^2} = \frac{d^2S}{d\phi^2} \cdot \frac{d\phi^2}{dt^2} = \frac{d^2S}{d\phi^2} \cdot \omega^2. \qquad (17.1)$$

де *S, V, a* - відповідно переміщення, швидкість і прискорення штовхача; φ_1 - кут повороту кулачка; $\frac{dS}{d\phi}$, $\frac{d^2S}{d\phi^2}$ - аналоги швидкості та прискорення шговхача; ω_1 - кутова швидкість кулачка.

б) для коливального штовхача кулачковою механізму

$$\beta = \beta(\phi),\ \omega_2 = \frac{d\beta}{dt} = \frac{d\beta}{d\phi} \cdot \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\beta}{d\phi} \cdot \omega_1;$$
$$\varepsilon_2 = \frac{d^2\beta}{dt^2} = \frac{d^2\beta}{d\phi^2} \cdot \frac{d\phi^2}{dt^2} = \frac{d^2\beta}{d\phi^2} \cdot \omega^2. \qquad (17.2)$$

де β - кутове переміщення шговхача; ω_2 *і* ε_2 - кутова швидкість та кутове прискорення штовхача; $\frac{d\beta}{d\phi_1}$ *і* $\frac{d^2\beta}{d\phi_1^2}$ - аналоги кутової швидкості й кутового прискорення штовхача.

Під час **синтезу** кулачкових механізмів аналітичними методами доцільно закон руху веденої ланки подавати за допомогою безрозмірних коефіцієнтів (інваріантів подібності), що дозволяє записати його без зв'язку з фазовими кутами.

Якщо позначити переміщення штовхача за інтервал руху (віддалення або наближення) через S_m, а відповідний йому кут

повороту кулачка через ϕ_i, то закон руху шговхача при $\omega_1 = Const$ можна подати у вигляді таких рівнянь :

$$S = \varsigma \cdot S_m; \quad S' = \frac{dS}{d\phi_1} = \delta \cdot \frac{S_m}{\phi_1}; \quad S'' = \frac{d^2S}{d\phi^2} = \xi \cdot \frac{S_m}{\phi_1^2}, \qquad (17.3)$$

де ς, , δ, ξ - безрозмірні коефіцієнти відповідно переміщення, швидкості і прискорення, значення яких перемінні і визначаються вибраним законом руху.

Подібний вид мають рівняння закону руху веденої ланки для коливального штовхача в кулачкових механізмах.

Коефіцієнти ς, , δ, ξ є функціями безрозмірної величини $\boldsymbol{\kappa}$, яка змінюється від 0 до 1 і дорівнює відношенню кута повороту кулачка від початку фази руху до кута повороту за весь інтервал ϕ_i. Для фази віддалення $k = \phi/\phi_1$, для фази наближення $k = 1 - \phi/\phi_1$.

У випадку обертання кулачка з прискоренням $\varepsilon_1 = d\omega_1/dt$ переміщення і швидкість веденої ланки визначаються за рівняннями (17.3).

Прискорення поступально рухаючого штовхача

$$a = \xi \cdot \frac{S_m}{\phi_i^2} \cdot \omega_1^2 + \delta \cdot \frac{S_m}{\phi_i^2} \cdot \varepsilon_1,$$

а кутове прискорення коливального штовхача

$$\varepsilon = \xi \cdot \frac{\beta_m}{\phi_i^2} \cdot \omega_1^2 + \delta \cdot \frac{\beta_m}{\phi_i^2} \cdot \varepsilon_1.$$

Оскільки в практиці інженерних розрахунків випадки сінтезу кулачкових механізмів з урахуванням нерівномірності руху кулачка зустрічаються рідко, то надалі будемо вважати, що швидкість кулачка є сталою.

17.4 Складання рівнянь закону руху

Характер зміни прискорення веденої ланки задається призначенням кулачкового механізму або вибирається конструктором. Щоб подати закон руху в аналітичній формі, необхідно встановити

початкові та кінцеві умови на кожному інтервалі руху, а потім інтегруванням визначити залежність зміни прискорення, швидкості й переміщення веденої ланки від часу або кута повороту кулачка.

Методику складання рівнянь закону руху розглянемо на прикладі визначення залежності переміщення, аиалогів швидкостей і прискорень штовхача на фазі віддалення у випадку сталого прискорення (Рис.17.6)

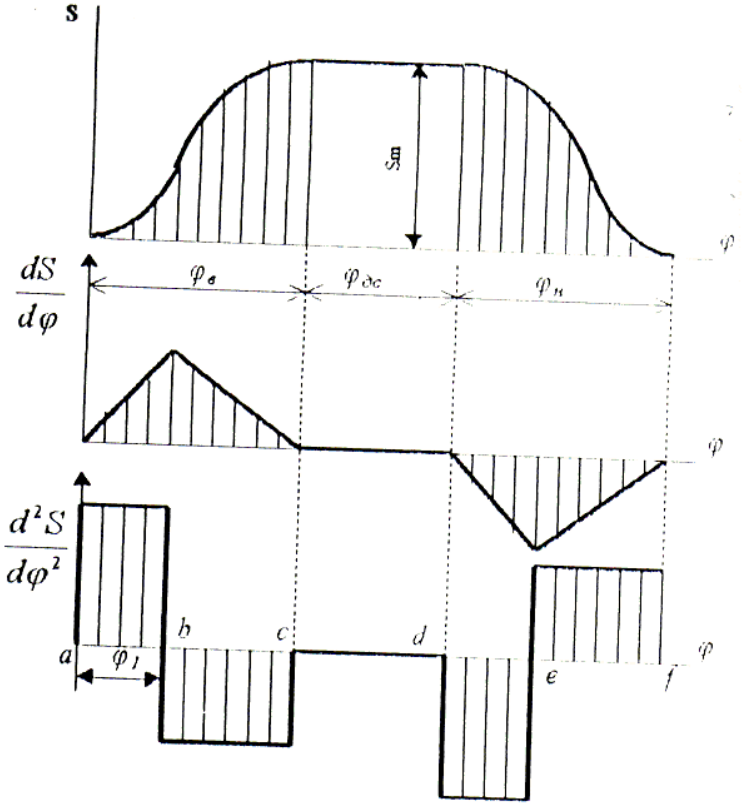


Рисунок 17.6

Будемо вважати відомими хід S_m шговхача, кут ϕ_1 віддалення і кут ϕ_i Повороту кулачка, при якому міняється напрям прискорення на протилежний. В інтервалі кута ϕ_i аналог прискорення $d^2S/d\phi^2 = a_i$, де a_i - стала невідома величина.

Тоді

$$\frac{dS}{d\phi} = \int a_1 \cdot d\phi = a_1 \cdot \phi + C_{11},$$

$$S = \int (a_1 \cdot \phi + C_{11}) d\phi = a_1 \cdot \frac{\phi^2}{2} + C_{11} \cdot \phi + C_{12}.$$

Якщо $\varphi = 0$, $S_0 = 0$, $dS/d\phi = 0$, то постійні інтегрування $C_{11}=0$ і $C_{12}=0$. Отже, на інтервалі $\phi_1 - \phi_i$ закон руху буде:

$$\frac{d^2S}{d\phi^2} = a_1; \quad \frac{dS}{d\phi} = a_1 \cdot \phi; \quad S = a_1 \cdot \frac{\phi^2}{2}. \tag{17.4}$$

Значення величин S і $dS/d\varphi$ в кінці інтервалу φ_1 будуть початковими для інтервалу $\varphi_в - \varphi_1$, на якому аналог прискорень дорівнює невідомій сталій величині – a_2:

$$\frac{d^2S}{d\phi^2} = -a_2; \quad \frac{dS}{d\phi} = -a_2 \cdot \phi + C_{21}; \quad S = -a_2 \cdot \frac{\phi^2}{2} + C_{21} \cdot \phi + C_{22}.$$

Підставивши в ці рівняння значення S і $dS/d\varphi$ при $\varphi=\varphi_1$ визначимо сталі невідомі:

$$C_{21} = (a_1 + a_2) \cdot \phi_1, \quad C_{22} = -(a_1 + a_2) \cdot \frac{\phi_1}{2}.$$

Отже, закон руху на фазі $\varphi_в - \varphi_1$ буде :

$$\frac{d^2S}{d\phi^2} = -a_2; \quad \frac{dS}{d\phi} = a_1 \cdot \phi_1 - a_2 \cdot (\phi - \phi_1);$$

$$S = a_1 \cdot \left(\phi_1 \cdot \phi - \frac{\phi_1^2}{2}\right) - \frac{a_2}{2} \cdot (\phi - \phi_1)^2. \tag{17.5}$$

Відомо, що в кінці фази віддалення $\varphi=\varphi_2$ переміщення $S= S_m$ і аналог швидкості $dS/d\varphi =0$. Тоді з (17.5) одержимо

$$a_1 = \frac{2 \cdot S_m}{\phi_в \cdot \phi_1}; \quad a_2 = \frac{2 \cdot S_m}{\phi_в \cdot (\phi_в - \phi_1)}.$$

Підставивши $k = \frac{\phi}{\phi_1}$, $\vartheta = \phi_1/\phi_i$, a_1 і a_2 в (17.4) та (17.5), одержимо закон руху :

а) на інтервалі $0 \le \phi \le \phi_1 \quad (0 \le k \le \vartheta)$

$$S = \frac{k^2}{\vartheta} \cdot S_m = \varsigma \cdot S_m; \quad \frac{dS}{d\phi} = \frac{2k}{\vartheta} \cdot \frac{S_m}{\phi_i} = \delta \cdot \frac{S_m}{\phi_i};$$
$$\frac{d^2S}{d\phi^2} = \frac{2}{\vartheta} \cdot \frac{S_m}{\phi_i^2} = \xi \cdot \frac{S_m}{\phi_i^2}. \qquad (17.6)$$

б)) на інтервалі $\phi_1 \le \phi \le \phi_в \quad (\vartheta \le k \le 1)$

$$S = \left[1 - \frac{(1-k)^2}{1-\vartheta}\right] \cdot S_m = \varsigma \cdot S_m;$$
$$\frac{dS}{d\phi} = \frac{2(1-k)}{1-\vartheta} \cdot \frac{S_m}{\phi_i} = \delta \cdot \frac{S_m}{\phi_i};$$
$$\frac{d^2S}{d\phi^2} = \frac{2}{(1-\vartheta)} \cdot \frac{S_m}{\phi_i^2} = \xi \cdot \frac{S_m}{\phi_i^2}. \qquad (17.7)$$

Рівняння (17.6) при $k = \frac{\phi}{\phi_1} = 0 \cdots 1$, і $\phi_i = \phi_в$ є законом руху штовхача на фазі віддалення, а рівняння (2.7) при $k = \frac{\phi}{\phi_1} = 1 \cdots 0$, $і\ \phi_i = \phi_н$ є законом руху штовхача на фазі наближення. На початку фази віддалення та в кінці фази наближення *к* = 0, а в кінці фази віддалення і на початку фази наближення *к = 1*.

17.5 Аналіз кулачкових механізмів

Як і для будь яких інших механізмів, вивчення кулачкових механізмів поділяється на аналіз та синтез. Задачею аналізу є визначення закону руху штовхача по відомому профілю кулачка, а задачею синтезу - побудова профілю кулачка за відомим законом руху штовхача

Аналіз кулачкових механізмів будемо проводити використовуючи метод оберненого руху, який полягає в тому, що усьому механізмові, разом із стійкою, задаємо обернений рух з кутовою швидкістю кулачка. Тоді кулачок буде нерухомим, а штовхач буде

обертатись навколо кулачка з його кутовою швидкістю увесь час знаходячись з ним у контакті.

Розглянемо аналіз кулачкових механізмів на прикладах.

Приклад 1. Кулачковий механізм з гострим поступально рухаючим штовхачем (Рис. 17.7*).*

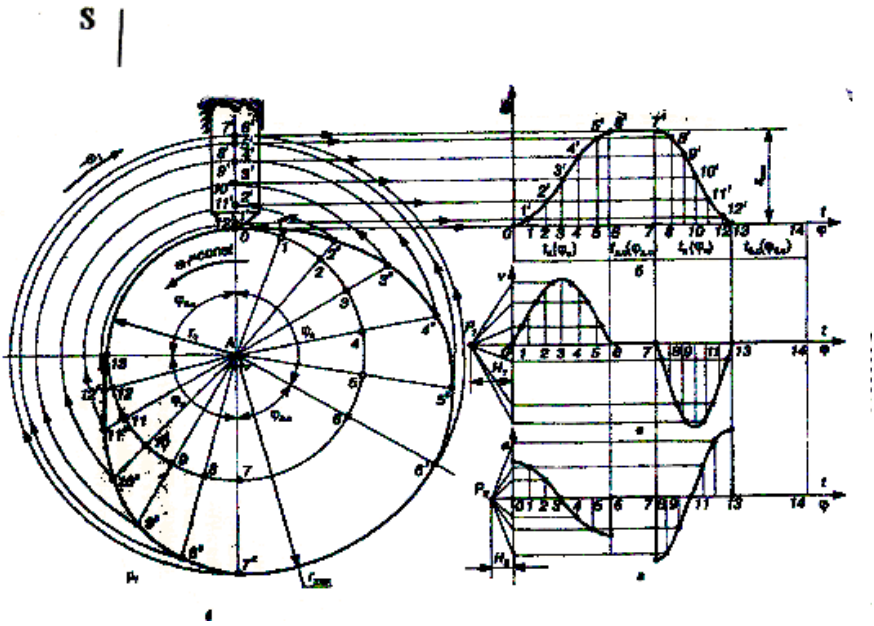


Рисунок 17.7

На профілі кулачка (Рис. 17.8) визначимо два кола - найменший та найбільший радіусами відповідно r_{min} і r_{max}.

Штовхач розташовуємо так, щоб його кінець, точка A_0 знаходилась на початку фази віддалення і лінія руху його проходила на відстані e від центра обертання кулачка. Проведемо дугу великого радіуса r_{max} до пересічення з лінією руху штовхача у точці A_6. Відстань A_0A_6 визначає хід штовхача h. Дугу A_6B_6 поділяємо на декілька (наприклад, на рисунку 17.8 ця дуга поділена на 6 частин) рівних частин точками B_o, B_1, B_2....B_6. З цих точок проведемо дотічні до кола радіуса e. Точки пересічення цих дотичних з профілем кулачка позначимо як C_0, C_1, C_2...C_6. З точки О, центра обертання кулачка, радіусами OC_1,

OC_2, OC_3, і так далі, проводимо дуги до пересічення з лінією руху штовхача у точках A_1, A_2, A_3 і т. д.

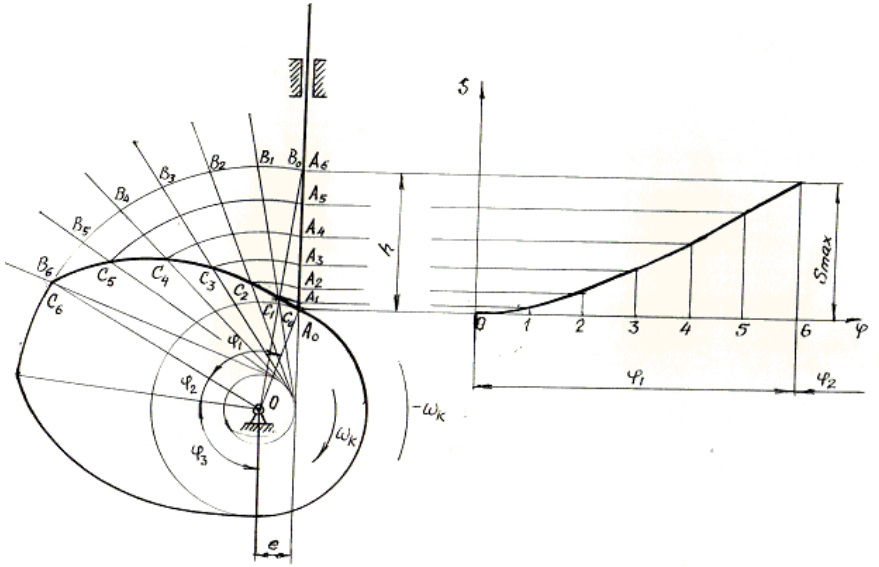


Рисунок 17.8

Лінії B_1C_1, B_2C_2 , B_3C_3 і т.д. показують положення штовхача у оберненому русі, а точки A_1, A_2, A_3 і т. д. - положення кінця штовхача в абсолютному русі. Відрізки A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3 і т.д є переміщенням штовхача в абсолютному русі.

Побудуємо систему координат в якій по осі абсцис будемо відкладати кут повороту кулачка, а по осі ординат - переміщення штовхача. На осі абсцис беремо відрізок 06, який буде пропорційним куту віддалення φ_1. **Масштабний коефіцієнт** $\mu_\phi = \phi_1/\overline{06}$ [рад/мм]. Цей відірізок розділимо па таку ж кількість відрізків на яку ми поділяли дугу A_6B_6. З точок 1, 2, 3 і т.д. осі абсцис відновлюємо перпендикуляри на яких відкладаємо відрізки рівні A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3 і т.д.

Кінці цих відрізків з'єднуємо плавною лекальною лінією. Це і буде закон руху штовхача на куті віддалення. На куті наближення діаграма переміщення штовхача будується так само. На кутах дальнього та ближнього стояння діаграма переміщення буде мати вигляд прямих горизонтальних ліній.

Примітка*:* 1 Синтез кулачкового механізму проводиться у порядку, протилежному аналізу.

2 Для синтезу кулачкового механізму необхідно мати такі вхідні дані: закон руху штовхача, **фазові кути** φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, кут тиску υ, хід шговхача h, мінімальний радіус-вектор r_{min}, величину ексцентриситету e.

Приклад 2. Кулачковий механізм з гострим коливальним коливальним штовхачем (Рис.17.9).

На профілі кулачка визначимо два кола -найменший та найбільший радіусами відповідно r_{min} і r_{max}.

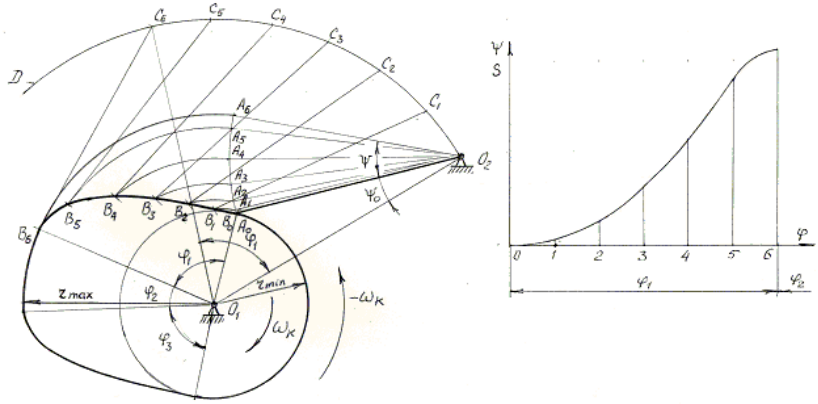


Рисунок 17.9

Штовхач, який обертається навколо точки O_2, розташовуємо так, щоб його кінець, точка A_0 знаходилась на початку фази віддалення кулачка. Проведемо дугу великою радіуса r_{max} до пересічення з траєкторією руху кінця штовхача у точці A_6. Кут ψ визначає хід штовхача тобто найбільший кут повороту штовхача. Хід штовхача можна визначити також і через переміщення кінця штовхача $S_A = l \cdot \psi$. Позначимо на профілі кулачка **фазові кути** φ_1, φ_2, φ_3, φ_4. Застосуємо **метод оберненого руху**. У відносному русі штовхача навколо кулачка точка O_2 буде обертатись відносно точки O_1 по колу радіуса O_1O_2. В момент коли точка контакту кулачка і штовхача, точка А, буде у найвищій точці, тобто в точці B_6, штовхач буде займати положення B_6C_6. Причому кут $O_2O_1C_6 = \varphi_1$. Розділимо дугу O_2C_6 на декілька рівних

частин (на рисунку 17.9 ця дуга розділена на шість рівних частин точками С). З точок C_1, C_1, C_3 і т.д. радіусом, що дорівнює довжині шповхача l робимо засіки на профілі кулачка (точки B_i). Лінії C_1B_1, C_2B_2, C_3B_3 і т.д. показують положення штовхача при його обертанні навколо кулачка за кожну φ_1/n кута віддалення. З центра O_1 радіусами O_1B_1, O_1B_2, O_1B_3 і т.д. проводимо дуги до пересічення з дугою A_0A_6 (точки A_1, A_2. A_3, тощо). З'єднавши ці точки з центром O_2, маємо положення штовхача в абсолютному русі при кожному φ_1/n куті повороту кулачка.

Вибираємо систему координат в якій вздовж осі абсцис відкладаємо кут повороту кулачка, а вздовж осі ординат - кути повороту штовхача, або переміщення точки А кінця штовхача. Ці переміщення вимірюємо дугами $S_1 = A_0A_1$, $S_2 = A_0A_2$, $S_3 = A_0A_3$ і т.д. З'єднавши кінці цих переміщень плавною лекальною лінією, ми отримаємо діаграму переміщення шговхача, тобто - закон його руху. На куті наближення діаграма переміщення штовхача будується так само. На кутах дальнього та ближнього стояння діаірама переміщення буде мати вигляд прямих горизонтальних ліній.

Примітка*:* 1 Синтез кулачкового механізму проводиться у порядку, протилежному аналізу.

2 Для синтезу кулачкового механізму необхідно мати такі вхідні дані: закон руху штовхача, фазові кути φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, кут тиску υ, хід шговхача h, мінімальний радіус-вектор r_{min}, величину міжосьової відстані 0_10_2.

Приклад 3. Кулачковий механізм з тарільчатим (плоским) штовхачем (Рис. 17.10).

На профілі кулачка визначимо два кола -найменший та найбільший радіусами відповідно r_{min}і r_{max}. Штовхач розташовуємо так, щоб його тарілка, точка A_0. доторкувалась профілю кулачка на початку фази віддалення і лінія руху його проходила через центр обертання кулачка. Проведемо дугу великого радіуса r_{max} до пересічення з лінією руху штовхача у точці A_6 . Відстань A_0A_6 визначає хід штовхача h. Покажемо на профілі кулачка кут віддалення $\phi_1 = \Delta A_6A_0B_6$, кут дальнього стояння φ_2 та кут наближення φ_3. Крайню точку фази віддалення позначимо B_6. Розділимо дугу A_0B_6 на декілька рівних частин (у нашому прикладі на шість частин) точками A_i,. З'єднаємо точки B_1, B_2, B_3 і т. д. з центром кулачка.

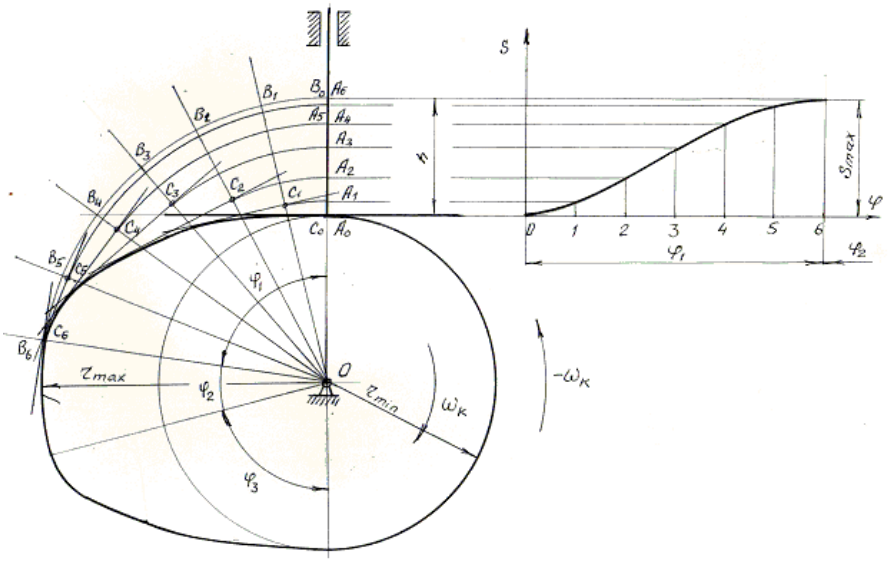


Рисунок 17.10

До кожної лінії ОВі, ОВг ОВз і т. д . проведемо нсрпенднкуляри таким чином, нюб воіпі одночасно доторкувались і профілю кулачка. Точки пересічення іщх перпендикулярів з лініями OB_1, OB_2, OB_3 і т. д. позначимо літерами C_1, C_2, C_3 і т. д. Лінії B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 і т. д. разом з перпендикулярами показують положення штовхача і тарілки у оберненому русі. З ценіра О обертання кулачка проведемо дуги радіусами OC_1, OC_2, OC_3 і т. д. до пересічення з траєкторією руху точки А штовхача.

Відрізки A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3 і т. д. с переміщенням штовхача у абсолютному русі. Діаграму переміщення будуємо так само, як і в прикладі 1.

Примітка: 1 Синтез кулачкового механізму проводиться у пюрядку, протилежному аналізу.

2 Для синтезу кулачкового механізму необхідно мати такі вхідні дані: закон руху штовхача, фазові кути φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, кут тиску υ, хід шговхача h, мінімальний радіус-вектор r_{min}..

17.6 Передача сил в кулачкових механізмах. Кут тиску при передачі руху вищою парою

При проектуванні механізмів з вищою парою, до яких належить і кулачковий механізм, **кути тиску** $\theta(\upsilon)$ і передачі руху μ грають важливу роль. Особливо доводиться враховувати умови передачі сил і моментів сил й призначати у зв'язку з цим певні обмеження. Наприклад, часто застосовують обмеження по куту тиску$\theta \le \theta_{доп}$, при якому змінні кути тиску θ не повинні перевищувати відповідний допустимий рівень $\theta_{доп}$,.

Зв'язок між кутом тиску і кінематичними параметрами механізму можна визначити з рис. 17.11:

$$tg\theta = \frac{DC}{CO_1} = \frac{(AD - AC)}{CO_1} = \frac{[AD - (CO_2 - BO_2)]}{CO_1},$$

де CO_1 - перпендикуляр до променю O_2D, відновлений з центра O_1.

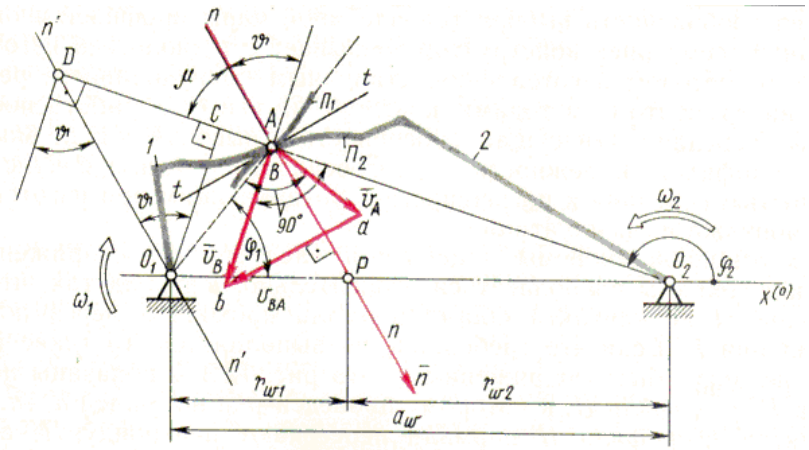


Рисунок 17.11

Підставимо у цей вираз значення відрізків:

$$AD = \mu_l \cdot \left(\frac{V_B}{\omega_1}\right); \quad BO_2 = \mu_l \cdot r_B;$$

$$CO_1 = O_1O_2 \cdot sin\,\phi_2 = \mu_l \cdot a_W \cdot sin\,\phi_2\,;$$

$$CO_2 = O_1O_2 \cdot \cos\phi_2 = \mu_l \cdot a_W \cdot \cos\phi_2.$$

Отримаємо формулу у такому вигляді:

$$tg\theta = \frac{(V_B/\omega_1)-(a_W \cdot \cos\phi_2 - r_B)}{a_W \cdot \sin\phi_2}. \quad (17.8)$$

Якщо у механізмі з вищою парою ведена ланка здійснює прямолінійно - поступальний рух, то ця формула має вигляд:

$$tg\theta = \frac{(V_B/\omega_1)\pm e}{S_H + S_B}, \quad (17.9)$$

де e – ексцентриситет, тобто зміщення осі руху веденої ланки відносно осі обертання ведучої ланки; $S_H + S_B = y_B$ - координата точки на веденій ланці у напрямку руху відносно координатних осей, які мають початком вісь обертання ведучої ланки.

Теорему про кут тиску можна сформулювти так:

Кут тиску при передачі обертального руху у простому плоскому механізмі з вищою парою залежить від передаточної функції $V_{qB} = V_B/\omega_1$, між осьової відстані a_W і координат r_{B2} і φ_2 контактної точки веденої ланки й визначається формулою *(17.8)*.

17.7 Передача сил в кулачкових механізмах з гострим штовхачем

Розглянемо сили, які діють на ланки кулачкового механізму. Вважаємо, що на штовхач діють сили: нормального тиску N з боку кулачка, сила опору руху Q (або момент сили опору руху M_0), реакіції в опорах штовхача N_1 і N_2, сили тертя F_{11} і F_{12} (або момент тертя M_T). На рис. 17.12 показані сили, які діють на кулачковий механізм з гострим поступально рухаючим штовхачем. Силу N роскладемо на силу P, яка діє вздовж штовхача, і силу T, яка направлена перпендикулярно лінії руху штовхача. Таким чином, силу P можна назвати корисною, бо вона напрямлена на долання сил корисного опору, а сила T снричиняє виникненню сил тертя в опорних елементах штовхача.

Сили тертя можна визначити за формулами:

$$F_{t1,2} = -f \cdot N_{1,2},$$

де $N_1 = T \cdot \frac{b}{a}$, $N_2 = T \cdot \frac{(b+a)}{a}$ і $T = N \cdot Sin\theta$.

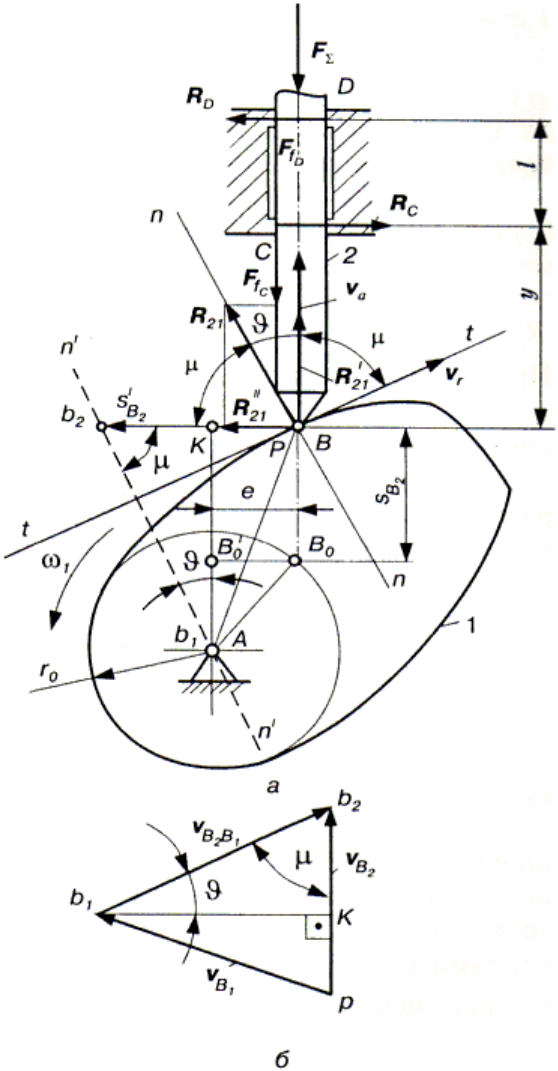


Рисунок 17.12

Умова забезпечення передачі руху буде мати вигляд:

$$P \geq Q + F_{t1} + F_{t2}, \quad \text{де} \quad P = N \cdot Cos\theta. \tag{17.10}$$

В якості параметра для оцінки впливу кута тиску на умову передачі сил в кулачкових механізмах **Л.Н. Решетов**[23] запропонував використати відношення сил $\nu_F = N/Q$, яке називається **коефіцієнтом зростання зусиль**.

Чим менше коефіцієнт тертя **f** і більше допустиме значення ν_F, тим більші кути тиску θ можна використовувати при проектуванні кулачкових механізмів.

Ми бачимо, що сила Р буде тим більше, чим більше буде розмір ***a***, меншим розмір ***b*** і кут θ. Розміри ***a*** і ***b*** ми можемо міняти незалежно від існуючого профілю кулачка, а кут θ зменшується зі збільшенням r_{min}. Таким чином, збільшуючи r_{min} ми зменшуємо кут тиску , але при цьому зростають і габарити передачі.

На Рис. 17.13 показано кулачковий механізм з коливальним шговхачем і сили та моменти сил, що діють на штовхач.

Сила Т спричиняє виникненню моменту сил тертя в опорі O_2.

Умова забезпечення передачі руху буде мати вигляд:

$$P \cdot l \geq M_Q + M_T.$$

Тут M_Q - момент сил корисного опору, M_T - момент сил тертя в опорі O_2. В цьому кулачковому механізмі, так само, як і в попередньому, кут тиску θ залежить від розмірів кулачка, тобто від r_{min}. При одному й тому ж ході штовхача зі збільшенням r_{min} зменшується кут тиску.

Оптимальним рішенням називають таке при якому вихідні параметри синтезу, у даному випадку габаритні розміри механізму, будуть найменшими.

---

[23] Л. Н. Решетов – професор кафедри ТММ МВТУ (технічного університету) ім.. М.Е.Баумана, розвив теорію кулачкових механізмів і поклав початок теорії самоустановчих механізмів.

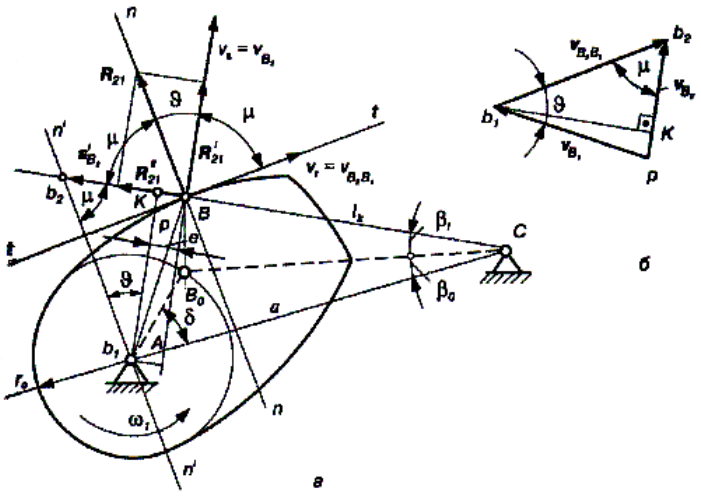


Рисунок 17.13

17.8 Передача сил в кулачковому механізмі з тарільчатим штовхачем

На Рис. 17.14 показані сили, що діють на кулачковий механізм з плоским тарільчатим штовхачем. Якщо площина тарілки перпендикулярна напрямляючій руху штовхача, то сила нормального тиску кулачка на штовхач буде завжди перпендикулярною тарілці, або паралельною напрямку його руху.

Умова передачі сил у такому випадку буде мати вигляд:

$$N \geq Q + F_{t1} + F_{t2}, \text{ де } F_{t1,2} = f \cdot N_{1,2}; \quad N_{1,2} = N \cdot \frac{b}{a}.$$

Розміри a і b не залежать від профілю кулачка і тому ніякого впливу на розміри кулачка не мають.

Кут тиску у даному випадку дорівнює нулю (θ = О). Таким чином габарити передачі не залежать від сил, що діють в ньому, а розміри a і b можуть прийматись конструктивно. Треба відзначити, що головною умовою конструювання кулачків з плоскім, тарільчатим штовхачем є

те, що його профіль повинен бути усюди опуклим, інакше закон руху штовхача на ділянках перегину, плоских прямолінійних , або гострих, частинах його не буде виконуватись.

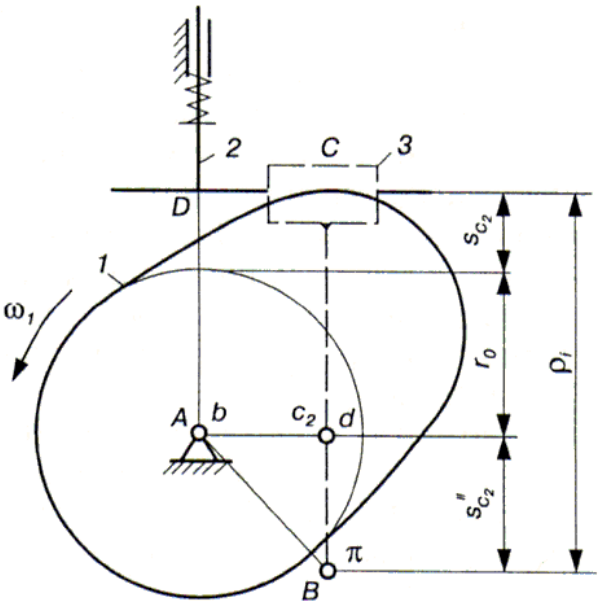


Рисунок 17.14

18. ВИЗНАЧЕННЯ МІНІМАЛЬНОГО РАДІУСА ВЕКТОРА ПРОФІЛЮ КУЛАЧКА

Як було вказано вище, для побудови профілю кулачка за заданим законом руху штовхача треба визначити мінімальний радіус-вектор його профілю. Це можна зробити двома методами: графічним та аналітичним.

18.1 Графічний метод визначення мінімального радіуса-вектора профілю кулачка

Побудуємо план швидкостей для кулачкового механізму, прийнявши **масштабний коефіцієнт** рівним

$$\mu_V = \omega_K. \tag{18.1}$$

Швидкість точки A_1 кулачка $V_{A1} = \omega_k \cdot \rho$, де ρ - радіус вектор точки профілю кулачка, ω_K - кутова швидкість кулачка.

Швидкість точки A_2 штовхача визначимо за теоремою про складання швидкостей точок твердого тіла у плоскому русі:

$$\vec{V}_{A2} = \vec{V}_{A1} + \vec{V}_{A2A1},$$

де $\vec{V}_{A2A1}$ - швидкість ковзання штовхача по поверхні кулачка. Ця швидкість напрямлена по дотичній до поверхні кулачка.

Проведемо у точці контакту загальну нормаль до профілів, а з точки О проведемо лінію перпендикулярну до лінії руху штовхача.

Точку пересічення цих ліній позначимо літерою D. Розглянемо трикутники AOD і Aa_1a_2. Ці трикутники подібні тому що усі їх сторони взаємно перпендикулярні. З подібності цих трикутників запишемо: $\frac{OD}{OA} = \frac{Aa_2}{Aa_1}$, звідки $OD = OA \cdot \frac{Aa_2}{Aa_1}$.

Тут $OA = \rho$, $Aa_1 \cdot \mu_V = \omega_K \cdot \rho$,

$$Aa_2 \cdot \mu_V = \frac{dS_2}{dt} \cdot \frac{d\phi_1}{d\phi_1} = \frac{dS_2}{d\phi_1} \cdot \frac{d\phi_1}{dt} = V_{qS2} \cdot \omega_1$$

Приймаючи до уваги рівняння (18.1), маємо: $OD = V_{qS2}$

Розглянемо трикутник ADC , з якого запішемо:

$$tg\theta = \frac{CD}{AC} = \frac{OD+e}{r2_{min}\frac{V_{qS2}+e}{r2_{min}}}. \qquad (18.2)$$

З формули (18.2) видно, що, якщо ми з точки А проведемо перпендикуляр до лінії руху штовхача і відкладемо на ньому відрізок рівний OD та з його кінця проведемо лінію під кутом тиску, то ця лінія повинна обов'язково пройти через центр обертання кулачка. Якраз це і використовується у графічному методі визначення мінімального радіуса-вектора кулачка. Будуємо фазові діаграми. Ці діаграми будуються по різному в залежності від типу штовхача.

18.2 Визначення мінімального радіуса-вектора профілю кулачка з гострим поступально - рухаючим штовхачем

Щоб визначити мінімальний радіус-вектор профілю кулачка будуємо фазову діаграму у координатах [S,V_q]. Закон руху штовхача та діаграму передаточної функції показано на Рис. 18.1.

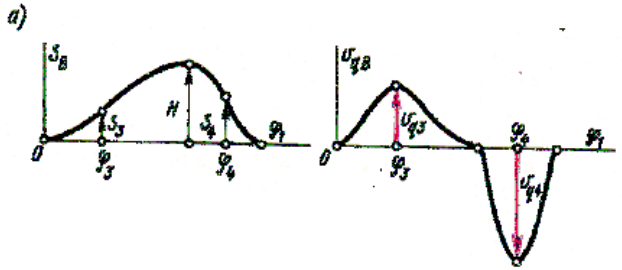


Рисунок 18.1

На фазовій діаграмі додатний напрямок передаточної функції V_q, відповідає куту віддалення, а від'ємний - куту наближення. Максимально допустимі кути тиску приймаються однаковими і на куті віддалення, і на куті наближення, і для цього типу кулачкового механізму – рівним 30°. Можна також вважати, що загальні дотичні до діаграми будуть співпадати з тими положеннями штовхача де значення

V_q набувають максимальних значень. Кінці відрізків V_{q1} і V_{q2} позначимо точками 1 і 3.

В цих точках проведемо промені під кутами θ_{max}. Точка пересічення цих променів позначена літерою А. Зона, яка розташована нижче цих променів (затемнена) є зоною розташування центра (ЗРЦ) обертання кулачка.

Треба зазначити, що ЗРЦ, яка вказана на рисунку 18.2, буде такою тільки в разі реверсивного кулачка, тобто кулачка, який під час своєї роботи може міняти напрямок свого обертання.

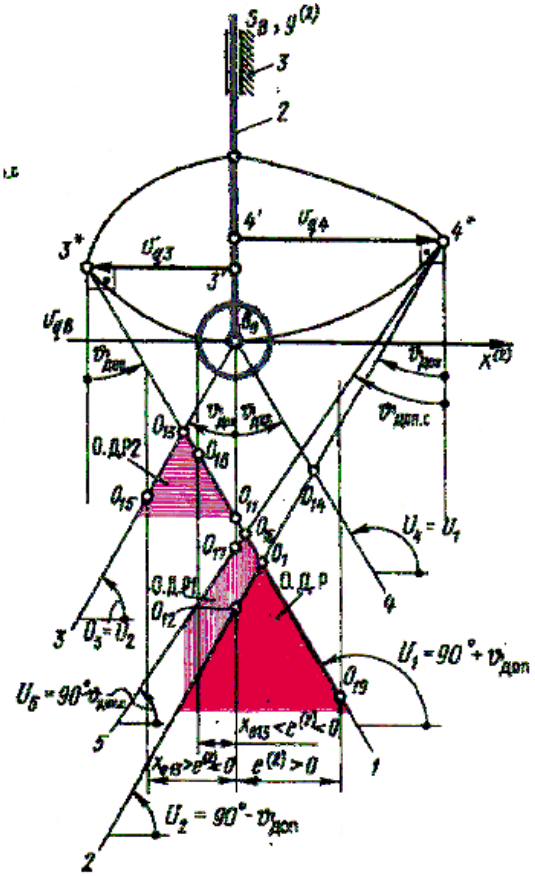


Рисунок 18.2

Якщо ж кулачок не реверсивний, то центр обертання його може бути розташованим будь-де правіше лінії А1.

Дійсно, візьмемо за центр обертання кулачка точку М. Дотичні, проведені з цієї точки до фазової діаграми, мають кути тиску менші максимальних$\theta < \theta_{max}$. Якщо для не реверсивного кулачка взяти за центр обертання кулачка точку К, то ми бачимо, що кут тиску на фазі віддалення буде меншим за максимальний, а на фазі наближення навпаки - буде більшим за θ_{max}. Але ми повинні зважити на те, що на фазі наближення кулачок вислизає з-під штовхача і, практично, заклинення не може відбутися за будь-яких умов.

Центр обертання кулачка не можна приймати на границі ЗРЦ, або прямо на лінії А1, тому що під час роботи кулачкового механізму у вищій кінематичній парі кулачок - штовхач виникає сухе тертя, яке призводить до зносу поверхні кулачка. При цьому зменшується радіус r_{min} і на фазі віддалення може відбутись заклинення. Крім того треба зважити на те, що профіль кулачка виготовляється з певним допуском і це теж може призвести до зменшення цього радіуса. Тому дійсне значення мінімального радіуса-вектораr_{min} приймається більшим на 10-15 мм, тобто: $r0_l(0.01 \div 0.02)_{min}$.

18.3 Визначення мінімального радіуса-вектора профілю кулачка з гострим коливальним штовхачем

Для визначення мінімального радіуса - вектора кулачка з коливальним штовхачем побудуємо фазову діаграму у криволінійних координатах. При цьому вісь S покажемо по траєкторії руху кінця штовхача, а вісь V_q - по штовхачу. Додатний напрямок осі V_q приймається до центра обертання штовхача.

Розіб'ємо дугу A_0A_6 у відповідності закону руху штовхача. Покажемо усі положення штовхача на куті віддалення. З точок A_1, A_2, A_3 і т. д. відкладемо відрізки V_{q1}, V_{q2}, V_{q3} і т.д. у напрямку до центра обертання штовхача. З кінців цих векторів відновлюємо перпендикуляри до ліній штовхачів і проводимо промені під максимальним кутом тиску, який для даного типу кулачкового механізму приймається від 45° до 60° (за умовою передачі сил), (Рис.18.3).

З точок A_6A_{12} відкладаємо відрізки V_{q7}, V_{q8}, V_{q9} цих векторів і т д вздовж лінії штовхача у напрямку від центра обертання штовхача. З кінців відновлюємо перпендикуляри до ліній штовхачів і проводимо промені під максимальним кутом тиску (Рис.18.3). Кінці усіх векторів V_{qi} з'єднуємо плавною лекальною лінією. Це і є фазова діаірама. Визначимо таку зону, куди не заходить жоден з променів, проведених під кутом тиску. Це і є ЗРЦ для нашого кулачка (рисунок 5.4).

Найкоротша відстань від найвищої точки ЗРЦ до точки A_0 є мінімально допустимий радіус-вектор кулачка. Дійсне значення мінімального радіуса-вектора r_{min} приймається більшим на 10-15 мм.

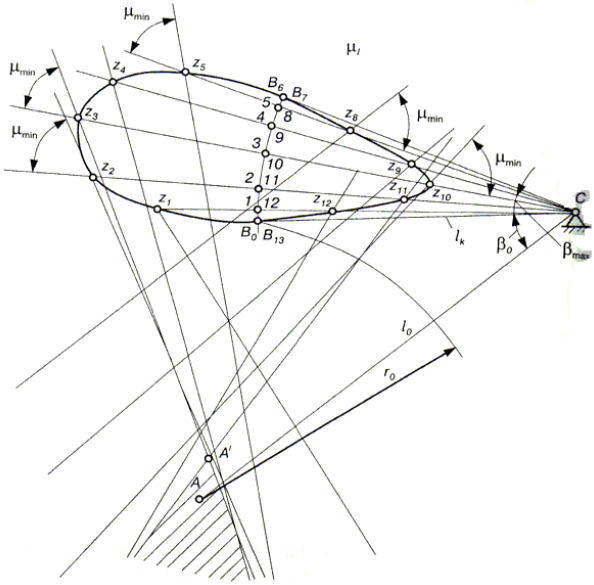


Рисунок 18.3

18.4 Визначення мінімального радіуса - вектора профілю кулачка з тарільчатим штовхачем

Головною умовою конструювання кулачків з плоским, тарільчатим штовхачем є те, що його профіль повинен бути усюди опуклим, інакше закон руху штовхача на ділянках перегину, плоских прямолінійних , або гострих, частинах його не буде виконуватись.

Найчастіше використовуються кулачкові механізми *з* тарільчатим штовхачем в якому тарілка перпендикулярна напрямляючій руху штовхача. Кут тиску у даному випадку дорівнює нулю.

У відповідності до позначень, наведених на Рис. 18.4,*а*, ця умова може бути виражена такою нерівністю:

$$\rho_i = S_H + S_{Bi}(\phi_1) - l_{CD}. \qquad (18.4)$$

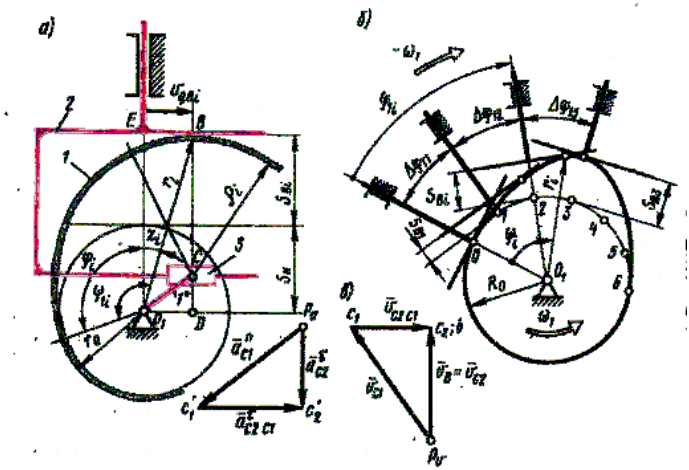


Рисунок 18.4

Туї $S_H = r_0$; $S_{Bi}(\phi_1)$ - поточне значення функції переміщення. l_{CD}- відрізок, що має певний геометричний смисл, який легко з'ясувати порівнюючи $\Delta O_1 CD$ на схемі механізму з $\Delta p_a c_1' c_2'$ плана прискорень (Рис.18.6, в), побудованого для заміняючого стержневого механізму з ланок 1', 2 ,3 , за рівнянням

$$\vec{a}^t_{C2} = \vec{a}^n_{C1} + \vec{a}^t_{C2C1} + \vec{a}^k_{C2C1},$$

в якому $\vec{a}^k_{C2C1} = 2 \cdot \vec{\omega}_e \times \vec{V}_r = 2 \cdot \vec{\omega}_3 \times \vec{V}_{C2C1} = 0.$

З подібності трикутників витікає

$$\frac{OC}{a^n_{C1}} = \frac{CD}{a^t_{C2}}, \quad \text{або} \quad l_{CD} = a^t_{C2} \cdot \frac{l_{OC}}{a^n_{C1}} = \frac{a_{C2}}{\omega_1^2} = a^t_{qC2},$$

тобто відстань між точками C і D чисельно дорівнює передаточній функції прискорення точки C_2 (або B) пгтовхача 2:

$$a_{qC2}^t = a_{qB}^t = \frac{a_{C2}^t}{\omega_1^2} = l_{CD}.$$

Таким чином, співвідношення (18.4) можна записати так:

$$\rho_i = r_0 + S_B(\phi_1) + a_{qBi}^t(\phi_1) \geq 0.$$

або розв'язати його відносно радіуса r_0 початкового кола кулачка:

$$r_0 = -S_{Bi}(\phi_1) - a_{qBi}^t(\phi_1).$$

В окремому випадку, коли $\rho_i = 0$ і $a_{qBi}^t = a_{qBmax}^t$ $_{Bi}$ значення r_0 мінімальне.

Аналітичний метод визначення мінімального радіуса-вектора профілю кулачка. Аналітичний метод визначення мінімального радіуса-вектора профілю кулачка з гострим поступально – рухаючим штовхачем. Аналітичний метод визначення мінімального радіуса-вектора профілю кулачка з гострим поступально – рухаючим штовхачем. Аналітичний метод визначення мінімального радіуса-вектора профілю кулачка з коливальним штовхачем. Аналітичний метод визначення мінімального радіуса-вектора профілю кулачка з тарільчатим штовхачем.

19. АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ МІНІМАЛЬНОГО РАДІУСА-ВЕКТОРА ПРОФІЛЮ КУЛАЧКА

19.1 Аналітичний метод визначення мінімального радіуса-вектора профілю кулачка з гострим поступально рухаючим штовхачем

Маючи закон руху штовхача і **передаточні функції** (аналог швидкості штовхача), будуємо фазову діаіраму (Рис. 19.1,*а,б,в*).

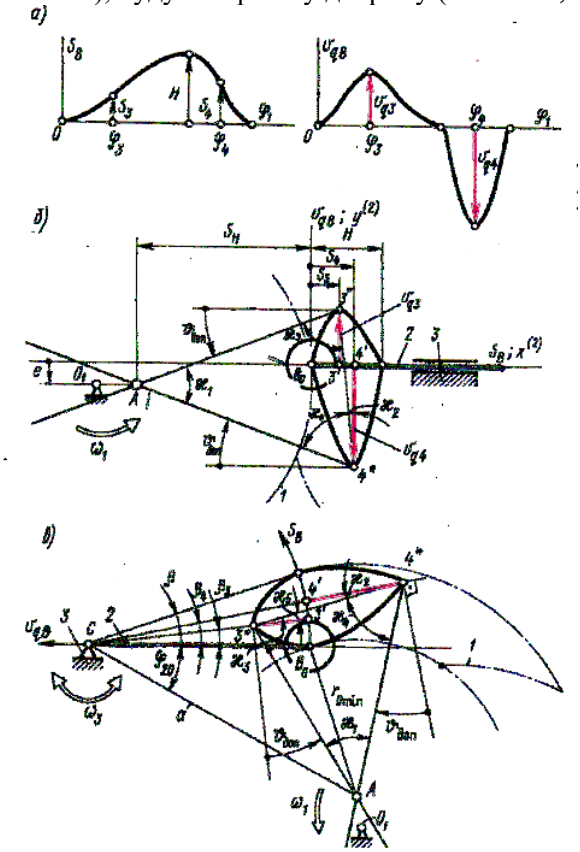


Рисунок 19.1

Визначаємо положення штовхача S_3 і S_4 при яких передаточна функція V_q набуває найбільшого значення на фазах віддалення V_{q3} і наближеіпія V_{q4}.

Фазову діаграму будуємо в координатах $[S, V_q]$, які для кулачка з коливальним штовхачем є криволінійними, а для кулачка з поступально - рухаючим штовхачем - прямокутні (Рис.19.1,*б,в*).

З кінців векторів V_{q3} і V_{q4} проводимо промені під максимальним кутом тиску $\upsilon_{доп}$. Точка перетину цих променів позначена літерою А.

З'єднуємо кінці векторів V_{q3} і V_{q4} і позначимо кути χ_1, χ_2, χ_3 і χ_4.

$$\chi_2 = arctg\left[\frac{S_3 - S_4}{V_{q3} - V_{q4}}\right].$$

Відстань між точками 3 і *4*: $l_{34} = (V_{q3} - V_{q4}) / \cos\chi_2$

Інши кути $\chi_3 = \frac{\pi}{2} - \upsilon_{доп} - \chi_2$, $\chi_4 = \frac{\pi}{2} - \upsilon_{доп} + \chi_2$, $\chi_1 = 2 \cdot \upsilon_{доп}$.

Відстань А3 позначимо l_{31}. З трикутника *A34* можемо записати

$$\frac{A3}{\sin\chi_4} = \frac{l_{34}}{\sin\chi_1}; \quad \text{Звідси} \qquad l_{31} = l_{34} \cdot \sin\chi_4 / \sin\chi_1.$$

Зміщення осі напрямляючої руху штовхача відносно точки А:

$$e = l_{31} \cdot \sin\upsilon_{доп} - V_{q3}.$$

Координата $S_H = l_{31} \cdot \cos\upsilon_{доп} - S_3$; $\quad r_0 = AB_0 = \sqrt{S_H^2 + e^2}$.

Заштрихована зона є зоною розташування центра обертання реверсивного кулачка. Для нереверсивного кулачка центр обертання можна розташовувати будь-де лівіше і вище лінії А3.

Мінімальний радіус кулачка визначається за формулою:

$$r0_l(0.01 \div 0.02)_{min}\text{м}.$$

19.2 Аналітичний метод визначення мінімального радіуса-вектора профілю кулачка з гострим коливальним штовхачем

Побудуємо фазову діаграму у криволінійних координатах (Рис. 19.1,*в*).

Кути $\beta_3 = \frac{S_3}{l_2}$, $\beta_4 = S_4/l_2$, де l_2 - довжина штовхача. З трикутника С34, враховуючи, що $C3 = l_2 - V_{q3}$, $C4 = l_2 - V_{q4}$ $\left(V_{q4} \le 0\right)$, запишемо:

$$\frac{C3}{\sin\chi_2} = \frac{l_{34}}{\sin(\beta_3 - \beta_4)}; \quad \chi_2 = arcsin\left[\left(l_2 - V_{q3}\right) \cdot \sin(\beta_3 - \beta_4)\,/l_{34}\right],$$

де $l_{34} = \sqrt{C3^2 + C4^2 - 2 \cdot C3 \cdot C4 \cdot cos(\beta_3 - \beta_4)}$

Кути

$$\chi_5 = (\beta_3 - \beta_4) + \chi_2, \quad \chi_4 = \pi/2 - \upsilon_{доп} + \chi_2,$$
$$\chi_3 = \pi/2 - \upsilon_{доп} - \chi_2, \quad \chi_1 = 2 \cdot \upsilon_{доп} - (\beta_3 - \beta_4).$$

З трикутника *A34* :$l_{31} = l_{34} \cdot \sin\chi_4 \,/\, \sin\chi_1$.

Міжосьову відстань $a_1 = l_{31}$ визначимо за теоремою косинусів з трикутника С3А:

$$a_1 = \sqrt{C3^2 + l_{31}^2 + 2 \cdot C3 \cdot l_{31} \cdot cos\,\upsilon_{доп}}.$$

Кут $\phi_{20}^{'}$визначимо за теоремою синусів:

$$A3/\sin\left(\phi_{20}^{'} + \beta_3\right) = a_1/\sin(\pi/2 + \upsilon_{доп});$$
$$\sin\left(\phi_{20}^{'} + \beta_3\right) = (A3 \cdot cos\,\upsilon_{доп})/a_1;$$
$$\phi_{20}^{'} = arc\,sin(A3 \cdot cos\,\upsilon_{доп}\,/a_1) - \beta_3.$$

Відстань $AB_0 = r_0 = \sqrt{a_1^2 + l_2^2 - 2 \cdot a_1 \cdot l_2 \cdot cos\,\phi_{20}}$.

Розділимо кут χ_1 пополам і на бісектрисі його відкладемо відстань

$$AO_1 = (0.01 \div 0.02)м$$

Тоді

$$a = arcsin(l_2 \cdot sin\,\phi_{20}\,/r_0); \quad a_1 = arcsin(C3 \cdot sin(\phi_{20} + \beta_3)\,/l_{31})$$
$$\angle B_0 AO_1 = \pi - \chi_1/2 - a_1 + a$$

Мінімальний радіус профілю кулачка

$$r\sqrt{r_0^2 + AO_1^2 - 2 \cdot r_0 \cdot AO_1 \cdot cos(\angle BAO_1)}_{min}.$$

Нова міжосьова відстань і початковий кут

$$a = \sqrt{a_1^2 + AO_1^2 - 2 \cdot a_1 \cdot AO_1 \cdot cos(\pi - \chi_1/2 - \alpha_1)};$$
$$\phi_{20}^{'} = arccos\left[\left(l_2^2 + a^2 - r_{min}^2()(2 \cdot l_2 \cdot a)\right)\right].$$

19.3 Аналітичний метод визначення мінімального радіуса-вектора з тарільчатим штовхачем

Згідно з теорією, для такого кулачка повинна виконуватись умова опуклості, тобто ρ_{min}. Це забезпечується якщо найменший радіус-вектор профілю кулачка буде відповідати умові:

$$r\left(S(\phi_1) + a_{qBi}^t(\phi_1)\right)(0.01 \div 0.02)_{min}$$

Дивись п.5.1.3.

20. ВИЗНАЧЕННЯ КООРДИНАТ ПРОФІЛЮ КУЛАЧКА

20.1 Кулачковий механізм з гострим поступально рухаючим штовхачем

В технічній документації або на робочих кресленнях необхідно приводити дані про координати профілю кулачка. Координати розраховуються або для центрового, або для конструктивного профілів в залежності від технології виготовлення кулачків.

Розрахункова схема наведена на Рис. 20.1.

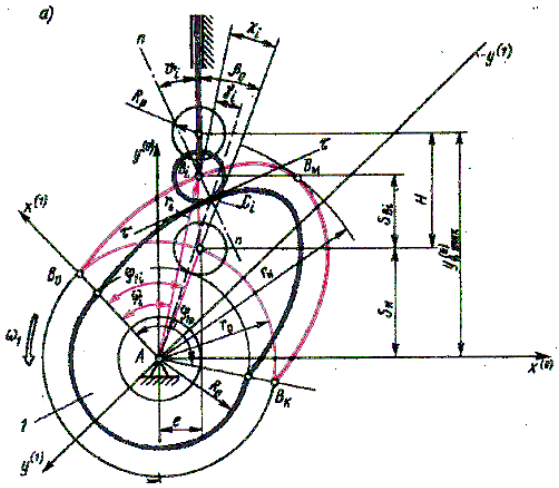


Рисунок 20.1

Координати поточної точки B_i на центровому профілі: в полярній системі координат r_i і ψ_i; в декартовій системі координат Аху, зв'язаній з кулачком : $x_{B,}\ y_B$.

З трикутника ADBi: $r_i = \sqrt{(S_H + S_{Bi})^2 + e^2}$.

Найбільший радіус - вектор $r\sqrt{(S_H + H)^2 + e^2}_{max}$.

Де $S_H = \sqrt{r_{min}^{2^2}}$.Кут γ_i знайдемо як різницю $\gamma_i = \angle B_i AD - \angle B_0 AD$.

Положення радіуса - вектора визначається кутом $\psi_i = \phi_{1i} - \gamma_i$.

Координати точок профілю в прямокутній системі координат

$$X_{Bi} = r_i \cdot cos\,\psi_i, \quad Y_{Bi} = r_i \cdot sin\,\psi_i.$$

Для центрального кулачкового механізму

$$\psi_i = \phi_{1i}, \quad X_{Bi} = r_i \cdot cos\,\phi_{1i}, \quad Y_{Bi} = r_i \cdot sin\,\phi_{1i}.$$

20.2 Кулачковий механізм з гострим коливальним штовхачем

Покажемо штовхач у його найнижчому положенні C_0B_0 (Рис. 20.2), яке визначається початковим кутом β_0.

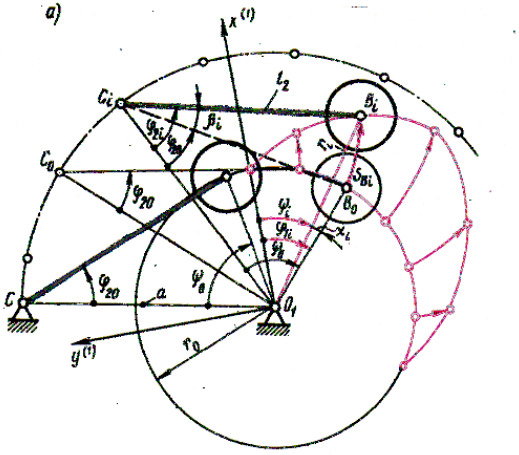


Рисунок 20.2

Потім покажемо штовхач, який знаходиться в оберненому русі, в поточному положенні C_iB_i. По відношенню до лінії міжосьової відстані це положення визначається КУТОМ ϕ_{2i}.

З трикутника $C_i\,B_i\,O_2$: $r_i = \sqrt{l_2^2 + d^2 - 2 \cdot l_2 \cdot d \cdot cos\,\phi_{2i}}$,

де $\phi_{2i} = \beta_0 + \beta_i$; $\beta_0 = arccos\left[\left(l_2^2 + d^2 - r_{min}^2()(2 \cdot l_2 \cdot d)\right)\right]$.

$$\beta_1 = \frac{S_{Bi}}{l_2}; \quad \psi_0 = arccos\left[\left(r_{min}^{2^{2^2}}()(2 \cdot r_{min}())\right)\right].$$

З трикутника $C_iB_iO_2$: $l_2 / sin(\psi_0 + \gamma_i) = r_i / sin\,\phi_{2i}$.

Звідси

$$\psi_0 + \gamma_i = arcsin\left(l_2 \cdot \frac{sin\,\phi_{2i}}{r_i}\right);$$
$$\gamma_i = arcsin(l_2 \cdot sin\,\phi_{2i}/r_i) - \psi_0; \quad \psi_i = \phi_{1i} + \gamma_i.$$

В прямокутній декартовій системі координат з осями X та У правої системи

$$X_{Bi} = r_i \cdot cos\,\psi_i, \quad Y_{Bi} = r_i \cdot sin\,\psi_i.$$

20.3 Кулачковий механізм з тарільчатим штовхачем

Полярні координати поточної точки В профілю кулачка (див.рисунок 18.4) позначені r_i і ψ_i.

Будуємо план швидкостей для замінюючого механізму з полюсом p_V. Трикутники $p_V cb$і O_1DC подібні. З цієї подібності запишемо $O_1D/V_B = CO_1/V_{C1}$

Звідки $BE = O_1D = CO_1 \cdot V_B/V_{C1} = CO_1 \cdot V_B/(\omega_1 \cdot CO_1) = V_B/\omega_1 = V_{qB}$

Таким чином відстань ВЕ чисельно дорівнює кінематичній передаточній функції V_{qB} швидкості штовхача. Куг β_i визначимо з відношення:

$$tg\beta_i = \frac{BE}{EO_1} = \frac{V_{qBi}}{(rBi_{min}(\quad))}.$$

Полярні координати точки В:

$$r_i = \sqrt[i_{1i_i}]{\left(rBi_{min}()^{2^2}_{qBi}\right)}.$$

В декартовій прямокутній системі координат: $X_{Bi} = r_i \cdot cos\,\psi_i$, $Y_{Bi} = r_i \cdot sin\,\psi_i$.

20.4 Вибір радіуса ролика для кулачків з гострим штовхачем

На кінці штовхача з гострим кінцем для зменшення зносу профілю кулачка встановлюється ролик. Радіус ролика в силових механізмах призначають за умов контактної міцності, тобто з урахуванням ширини ролика, механічних властивостей робочих поверхонь ролика і кулачка і заданої довговічності. В кінематичних

передачах геометричним обмеженням є допустимі похибки положення і відсутність самопересічення конструктивного профілю, коли радіус ролика помилково призначають більшим, ніж мінімальний радіус кривизни на якій-небудь ділянці центрового профілю (Рис. 20.3).

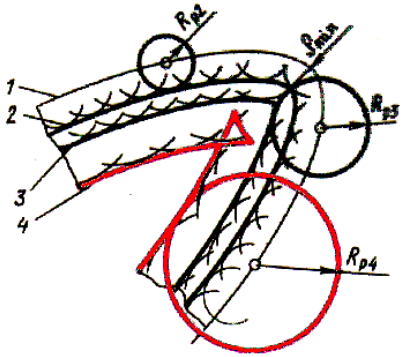


Рисунок 20.3

Подібне самопересічення профілю показано на рис.20.4 для профілю 4 при $R_{\rho 4} > \rho_{min}$. Якщо $R_{\rho 3} = \rho_{min}$ на конструктивному профілі має місце теоретичне загострення профілю ($\rho_i = 0$). При виконанні УМОВИ $R_{\rho 2} < \rho_{min}$ кривизна констрктивного профілю у всіх точках не досягає критичного значення. На практиці приймають $R_\rho > 0.7 \cdot \rho_{min}$, призначаючи конкретні значення у відповідності зі стандартним рядом діаметрів і довжин у машинобудуванні (ДСТ 6636-69). Крім того, радіус ролика обмежують умовою $R_\rho \leq 0.4 \cdot r_{min}$.

20.5 Умова кочення ролика

Для того, щоб не було ковзання ролика по поверхні кулачка, необхідно виконати таку умову:

$$\boldsymbol{F_{зач} \leq f \cdot F_{21}}\,, \qquad (20.1)$$

де $F_{зач}$ модуль сили зачеплення, яка приводить ролик у рух; f - коефіцієнт тертя ковзання ролика по кулачку; F_{21} - модуль нормальної реакції на ролик з боку кулачка.

Рівняння моментів сил, що діють на ролик (включаючи і момент пари сил інерції), мають вигляд

$$F_{зач} \cdot r - k \cdot F_{21} - f_1 \cdot F_{21} \cdot r_p - I \cdot \tilde{\varepsilon}_p = 0. \qquad (20.2)$$

де k - коефіцієнт тертя кочення ролика по кулачку; r_p - радіус опорної часнтини ролика; f_1 - коефіцієнт тертя опорної частини ролика у підшипнику; I - момент інерції ролика відносно його осі; $\tilde{\varepsilon}_p$ - кутове прискорення ролика, яке вважається додатним при прискореному русі і від'ємним - при уповільненому.

З урахуванням (20.2) умова кочення ролика (20.1) має вигляд

$$\frac{k}{r} + \frac{r_p}{r} \cdot f_1 + \frac{I \cdot \tilde{\varepsilon}_p}{F_{21} \cdot r} \leq f. \qquad (20.3)$$

Для тихохідних механізмів (ε_p =0), а також при малих значеннях коефіцієнта тертя кочення k умова кочення ролика спрощується

$$\frac{r_p}{r} \cdot f_1 \leq f, \text{ або } \quad r \geq r_p \cdot \frac{f_1}{f}.$$

Для швидкохідних механізмів найбільше значення в умові кочення (20.2) має складова, яка залежить від кутового прискорення, тобто

$$\frac{I \cdot \varepsilon_p}{F_{21} \cdot r} \leq f, \text{ або } \quad r \geq \frac{I \cdot \varepsilon_p}{f \cdot F_{21}}.$$

При силовому замиканні ця умова може бути забезпечена підбором пружини, яка повинна не тільки усунути можливість відриву ролика від кулачка (сила пружності повинна бути більшою за силу інерції при гальмуванні), а і забезпечити достатню силу тиску у фрикційній парі "ролик - кулачок".

21. ПРОЕКТУВАННЯ ПРОСТОРОВИХ КУЛАЧКОВИХ МЕХАНІЗМІВ

21.1 Циліндричний кулачок з коливальним роликовим штовхачем

Цей тип просторового кулачкового механізму є найбільш розповсюдженим.

21.1.1 Вивід залежності кута тиску від основних параметрів

Для того, щоб зв'язати конструктивні розміри кулачка з кінематичними величинами, використаємо **план швидкостей**, побудований на кінематичній схемі механізму (Рис. 21.1,*а*).

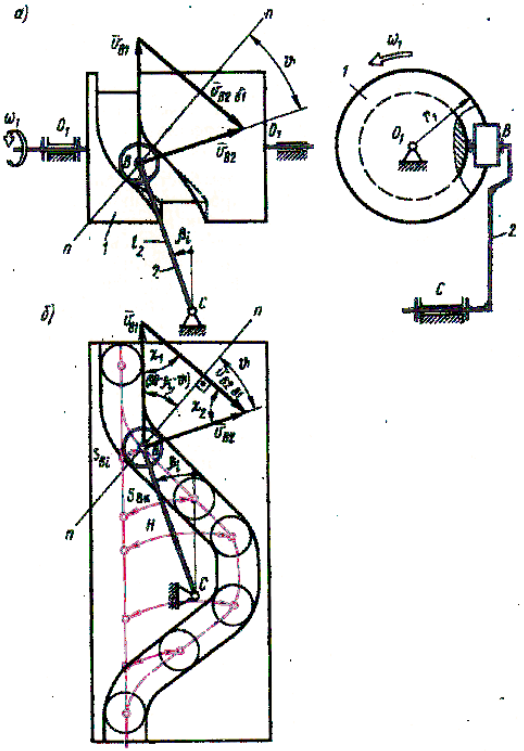


Рисунок 21.1

При заданій кутовій швидкості кулачка ω_1 його колова швидкість, яка визначена по розрахунковому радіусу паза циліндричного кулачка $\boldsymbol{r_i}$, дорівнює $V_B = \omega_1 \cdot r_1$, де $r_1 = r/\cos\psi$, а $\angle\psi = \angle BAY$. Ця швидкість перпендикулярна радіусу АВ.

Будуємо план швидкостей в площині ZY (Рис.21.1,б) по векторному рівнянню $\vec{V}_{BZ} = \vec{V}_{B1} + \vec{V}_{BZB1}$, де $\vec{V}_{BZ}$- складова швидкості, паралельна осі *Z*; $\vec{V}_{BZB1}$ - складова швидкості відносного руху ролика в пазі кулачка, паралельна осі *Y*. Вектори $\vec{V}_{BZ}$і$\vec{V}_{BZB1}$, взаємно перпендикулярні, тому

$$V_{BZ} = V_{B1} \cdot \cos\psi = \omega_1 \cdot r, \quad V_{BZB1} = V_{B1} \cdot \sin\psi = \omega_1 \cdot r \cdot tg\psi.$$

Побудова плану швидкостей в площині *ZX* (Рис.21.1,а) відповідає рівнянню

$$\vec{V}_{B2} = \vec{V}_{BZ} + \vec{V}_{B2BZ}.$$

Тут $V_{B2} = \omega_2 \cdot l_{BC}$ - швидкість точки В коливального штовхача, $\vec{V}_{B2BZ}$ - друга складова швидкості відносного руху ролика в пазі кулачка, паралельна дотичній *t - t*.

З плану швидкостей маємо

$$\frac{V_{B2}}{V_{BZ}} = \frac{V_{B2}}{\omega_1 \cdot r} = \frac{\sin\sigma}{\sin\mu}, \text{ де } \sigma = 90^0 - (\mu - \beta).$$

Тоді

$$\frac{V_{B2}}{\omega_1 \cdot r} = \frac{\cos(\mu - \beta)}{\sin\mu} - ctg\mu \cdot \cos\beta + \sin\beta.$$

Враховуючії, що кут тиску $\angle\theta = 90^0 - \mu$, отримаємо формулу

$$tg\theta = ctg\mu = \frac{V_{B2}}{\omega_1 \cdot r \cdot \cos\beta} - tg\beta = \frac{l}{r} \cdot \frac{d\beta}{d\phi} \cdot \frac{1}{\cos\beta} - tg\beta.$$

21.1.2 Геометрична умова визначення радіуса кулачка

Якщо план швндкостей (Рис.21.1,*в*) побудувати в масштабі, який чисельно дорівнює $\mu_V = \omega_1$, то фактично получимо план аналогу швидкостей (**передаточних функцій**), з якого для коливального штовхача

$$\frac{V_{B2}}{\omega_1} = \frac{dS}{d\phi} = S_2'.$$

а для кулачка при значенні кута ψ = 0

$$\frac{V_{BZ}}{\omega_1} \approx r.$$

З Рис.21.1,*в* витікає спосіб, який дає можливість визначити розрахунковий радіус кулачка, якщо дано $S(\phi)$ або $S'(\phi)$ і кут μ.

21.1.3 Графічне визначення найменшого радіуса кулачка

Для визначення радіуса кулачка користуються викладеним вище планом аналогів швидкостей. Проведемо дугу радіусом *l - BC* з центра С згідно заданій діаірамі $\beta(\phi)$ або $S(\phi)$ та проведемо розмітку траєкторії точки В від обраного початкового положення штовхача CB_0 (Рис.21.2,*а*). Так отримують точки B_2, B_4, B_6 і т.д.

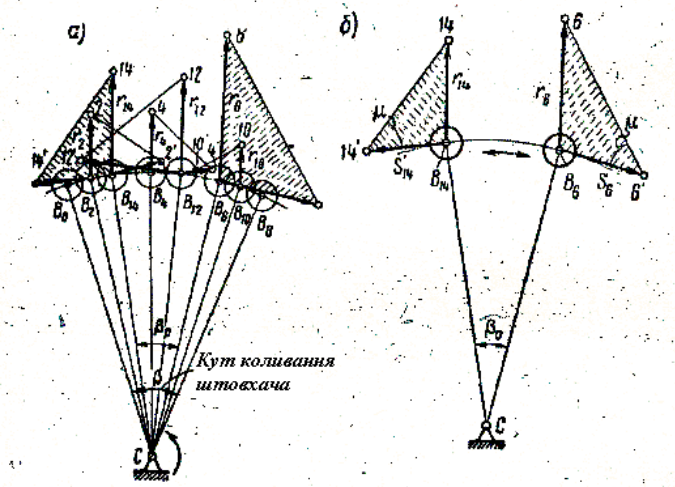


Рисунок 21.2

Побудова діаграми $S'(\phi)$ дає значення величин аналогів S' для кожного положення штовхача ВС. Після цього відкладаємо значення аналогів швидкостей S' у кожному положенні штовхача по дійсному напрямку швидкості точки В. Таким чином**,** з точки B_2 відкладаємо перпендикулярно CB_2 відрізок $S_2' = B_2 2'$, з точки B_4 відкладаємо перпендикулярно CB_4 відрізок $S_4' = B_2 4'$ і т.д.

Потім з кінців відрізків S_i' проводимо промені під кутом передачі μ і далі з точок В кінця штовхача СВ проводимо промені, які перпендикулярні до осі обертання кулачка 0-0. Знаходимо точки пересічення одноіменних променів 2, 4, 6,..., 10 і т.д., вимірюємо відстані від точок B_i до відповідних точок пересічення.

В кожному положенні заміряна величина цих відстаней дає радіус циліндричного кулачка, допустимий для заданого кута передачі. Вочевидь, що для практичного здійснення конструкції в якості найменшого радіуса кулачка прийдеться вибирати максимальний розмір, у нашому прикладі $r_b = r_{max}$. Для ясності на рис. 21.2,*б* дано окрема побудова двох найбільших значень для прямого (6-е положення) і зворотного (14-е положення) ходів штовхача.

Виготовивши кулачок знайденого розміру (у даному випадку $r_б$), - тільки в одному положенні кут передачі буде досягати заданого мінімального значення, у всіх інших положеннях кулачка кут передачі буде більшим.

Зазначимо, що не обов'язково виконувати повні графічні побудови, достатньо, безпосередньо розрахувавши значення для кожного положення штовхача, відкласти їх у дійсному напрямку швидкості точки В, після чого визначення найменшого радіуса кулачка проводити аналогічно викладеному вище.

21.1.4 Аналітичний метод визначення радіуса кулачка

По куту β відхилення штовхача від лінії, перпендикулярній проекції осі обертання кулачка, з трикутника Bb_1b_2 (Рис.21.3,*б*), подібного плану швидкостей, знаходимо

$$\frac{r}{S'} = \frac{r}{l \cdot \dfrac{d\beta}{d\phi}} = \frac{cos\,\theta}{sin(\theta + \beta)}.$$

Звідки $r = l \cdot \frac{dS}{d\phi} \cdot \frac{cos\,\theta}{sin(\theta+\beta)}$

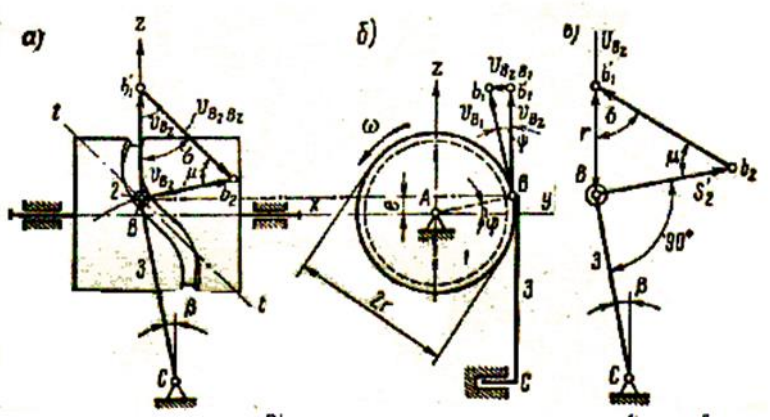


Рисунок 21.3

З цієї формули видно, радіус пропорційний обраній довжині шговхача *l*.

21.2 Циліндричний кулачок *з* поступально рухаючим штовхачем

Цей тип кулачкового механізму можна розглядати як окремий випадок попереднього.

Кут тиску θ, так само, як і кут передачі μ, можна визначити з плану сил або плану швидкостей (Рис 21.4).

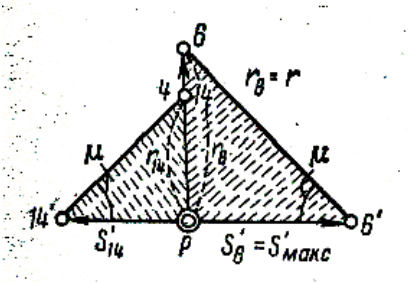


Рисунок 21.4

Як видно з побудови, кут передачі утворений дотичною до центровою профілю кулачка і лінією руху штовхача. Так як лінія руху штовхача є прямою, то перевірка існуючого кута тиску зводиться до

проведення нормалей до розгортки центрового профілю кулачка і виміру відповідних кутів між нормаллю і лінією руху штовхача. Практично важливими є критичні значення кутів .

Метод проектування зводиться до побудови трикутника апалогів швидкостей. Достатньо відкласти у напрямку руху штовхача абсолютні максимуми значень $S_i'(S_6'$ і $S_{14}')$ і провести під заданим кутом передачі промені 66′ і 14′14 до пересічення з променями, проведеними з точки Р перпендикулярно осі обертання кулачка ***xx***. В результаті геометрично визначають допустимий радіус кулачка $r = r_6$. Можливе і аналітичне рішення. Як видно з трикутника швидкостей

$$r = S_{max.}^{'max'}$$

21.3 Графічний метод побудови профілю просторового кулачка

Після того, як визначені основні розміри просторового кулачкового механізму, задачу проектування центрового профілю циліндричного кулачка розв'язують по його розгортці методом оберненого руху.

По наданому закону руху штовхача (Рис.21.5,*а*) виконують побудову його положень й ромічають траєкторію центра ролика точки В (Рис.21.5,*б*).

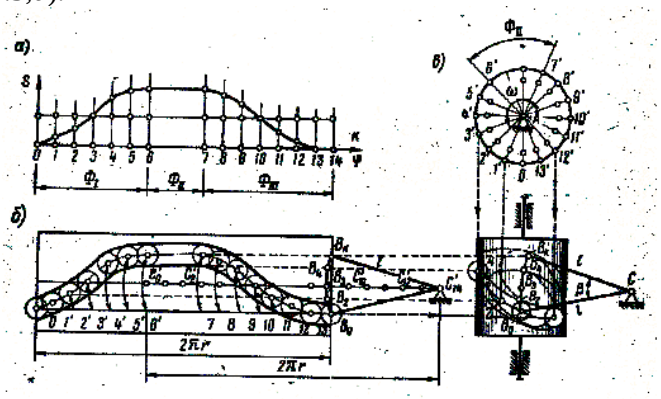


Рисунок 21.5

Через отримані таким чином точки B_1, B_2, B_3 і т.д. проводять горизонтальні промені. Виконавши розгортку по середньому циліндру кулачка, розглядають замість обертального циліндричного кулачка поступально рухаючу розгортку.

Використовуючи **метод оберненого руху** до розгортки кулачка, довжина якої дорівнює $2 \cdot \pi \cdot r$ (де г - середній радіус паза циліндричного кулачка), представляють її умовно нерухомою, а шарнір штовхача С -поступально рухаючим у зворотному напрямку коловій швидкості циліндричного кулачка Повна довжина траєкторії точки С в оберненому русі також повинна буті рівною $2 \cdot \pi \cdot r$. Цю траєкторію ділять подібно до того, як була розбита вісь абсцис графіка закону руху.

Потім з намічених таким чином точок C_1', C_2', C_3' і т.д. робимо засіки радіусом, рівним довжині штовхача $\boldsymbol{l = BC}$ на раніш проведених відповідних горизонтальних променях. Так знаходять точки 1,2,3 і т.д. розгортки середнього центрового профілю кулачка. Побудова паза на розгортці циліндричного кулачка при вибраному радіусі ролика проводять звичайним способом (Рис.21.5, *б*).

Загальну побудову паза на циліндричній поверхні кулачка проводять методом проекцій (Рис.21.5,*в*). Викладений метод проектування дає достатньо точні результати тоді, коли середня точка ролика при будь-якому положенні штовхача близька до циліндричної поверхні, що описана по середньому радіусу паза кулачка.

Для циліндричного і конічного кулачка з поступальним рухом штовхача заданий графік руху S(φ) штовхача характеризує розгортку профіля кулачка (Рис. 21.6).

При конічній поверхні кулачка загальна послідовність проектування його паза аналогічна проектуванню циліндричного кулачка. Побудова розгортки паза конічного кулачка і його проекцій для випадку, коли штовхач здійснює поступальний рух, показано на рис.21.6.

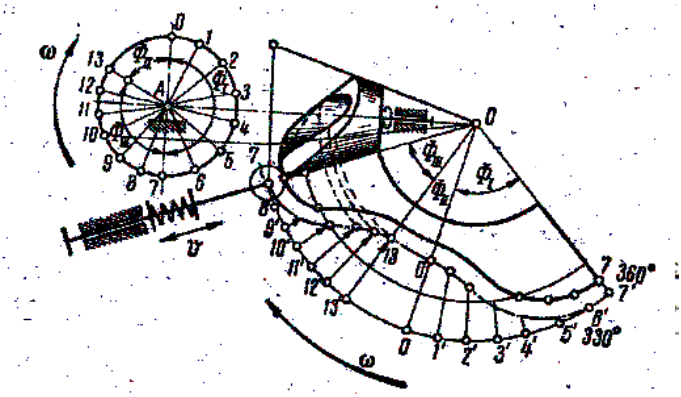


Рисунок 21.6

ЛІТЕРАТУРА

1 Теоретична механіка. Збірник завдань для розрахунково-графічних робіт [Текст] / Укл. П.К. Штанько, В.Г. Шевченко, О.С. Омельченко / За ред. Штанька П.К. – Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2019. − 228 с.

2 Теоретична та прикладна механіка (Theoritical and Applied Mechanics) [Текст]: навчальний посібник в 4 ч., ч.1Теоретична механіка / Укл. В.Г. Шевченко, А.Д. Фурсіна, С.О. Шумикін, С.Ю. Кружнова – Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2022. – 188 с.

3 **Артоболевский, И.И**., Эдельштейн В.В. Сборник задач по теории механизмов и машин. Учеб. пособие, 2-е изд / И.И. Артоболевский, В.В. Эдельштейн В – М.: Наука, 1975. – 20 прим.

4 **Артоболевский, И.И.** Теория механизмов и машин [Текст]: учеб. для вузов – 4- е изд., перераб. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 640 с.

5 **Фролов, К.В.** Теория механизмов и машин [Текст]: учеб. для вузов / К.В. Фролов, С.А. Попов, А.К. Мусатов и др.: под ред. К.В. Фролова. – М.: Высш. шк., 1987. – 496 с.

6 **Попов, С.А.** Курсовое проектирование по теории механизмов и машин [Текст]: учеб. пособие для машиностроит. спец. вузов / Под ред. К.В. Фролова. – М.: Высш. шк., 1986. – 295 с.

7 **Кіницький, Я.Т.** Теорія механізмів і машин [Текст]: підручник / Я.Т. Кіницький – Київ: Наукова думка, 2002. – 660 с.

8 **Крижанівський, Є.І.** Курсове проектування з теорії механізмів і машин [Текст]: учбовий посібник / Є.І. Крижанівський, Б.Д. Малько, В.М. Сенчішак – Івано-Франківськ, 1996. – 357 с.

9 Теорія механізмів і машин. Термінологія [Текст] /Укл. Б.М. Кутепов – Запоріжжя: ЗМІ, 1993. – 23 с.

10 Конспект лекцій з дисципліни “Теорія механізмів і машин”. Структурний аналіз та синтез механізмів [Текст] / Укл. Б.М. Кутепов – Запоріжжя: ЗДТУ, 2000. – 44 с.

11 Конспект лекцій з дисципліни “Теорія механізмів і машин”. Кінематика [Текст] / Укл. Б.М. Кутепов. – Запоріжжя: ЗДТУ, 1997. – 25 с.

12 Конспект лекцій з дисципліни “Теорія механізмів і машин”. Динаміка [Текст] / Укл. Б.М. Кутепов. – Запоріжжя: ЗДТУ, 1997. – 44 с.

13 Конспект лекцій з дисципліни “Теорія механізмів і машин”. Зубчаті передачі [Текст] / Укл. Б.М. Кутепов – Запоріжжя: ЗДТУ, 1998. – 74 с.

14 Конспект лекцій з дисципліни “Теорія механізмів і машин”. Кулачкові механізми [Текст] / Укл. Б.М. Кутепов – Запоріжжя: ЗДТУ, 1999. – 56 с.

15 Конспект лекцій з дисципліни “Теорія механізмів і машин” [Текст] / Укл. Б.М. Кутепов. – Запоріжжя: ЗДТУ, 1999 (Існує тільки у комп’ютерному класі бібліотеки ЗНТУ і на вказаному нижче сайті інтернету.).

16 Методичні вказівки і завдання до курсового проекту з теорії механізмів і машин з використанням ЕОМ. Для студентів спеціальностей: 8.090206 – обладнання для обробки металів тиском, 8.092301 – технологія та устаткування зварювання [Текст] / Укл. Б.М. Кутепов – Запоріжжя: ЗНТУ, 2001. – 85 с.

17 Методичні вказівки до виконання контрольних робіт з теорії механізмів і машин [Текст] / Укл. Б.М. Кутепов, Л.П. Воробйова – Запоріжжя: ЗНТУ, 2003. – 150 с.

18 Методичні вказівки до виконання розділів курсової проекту (роботи) з дисципліни Теорія механізмів і машин у програмних засобах комп’ютерного класу кафедри «Механіка» для студентів механічних спеціальностей всіх форм навчання [Текст] / Укл.: А.А. Скребцов, С.Ю. Кружнова, В.Г. Шевченко – Запоріжжя: ЗНТУ, 2019. – 10 с.

19 Методичні вказівки до виконання окремих розділів курсового проекту (роботи) з дисципліни Теорія механізмів і машин для студентів механічних спеціальностей всіх форм навчання [Текст] / Укл.: А.А. Скребцов, С.Ю. Кружнова, В.Г. Шевченко - Запоріжжя: ЗНТУ, 2019. – 19 с.

20 Положення про курсовий проект з дисципліни «Теорія механізмів і машин. Для студентів спеціальностей: 6.050502 – технологія машинобудування, – металорізальні верстати та системи, – обладнання для обробки металів тиском, – обладнання ливарного виробництва, 6.050503 – двигуни внутрішнього згоряння, – колісні та гусеничні транспортні засоби, – підйомно-транспортні, будівельні, дорожні машини і обладнання, 6.051102 – технологія будування авіаційних двигунів, всіх форм навчання [Текст] / Укл. С.Ю. Кружнова, А.Д. Фурсіна, А.А. Скребцов - Запоріжжя: ЗНТУ, 2016.- 23 с.

21 Методичні вказівки до практичних занять з теорії механізмів і машин [Текст] / Укл. Б.М. Кутепов, С.Ю. Кружнова, А.А. Скребцов – Запоріжжя: ЗНТУ, 2018. – 18 с.

22 Методичні вказівки до лабораторних робіт з теорії механізмів і машин [Текст] / Укл. Б.М. Кутепов, С.Ю. Кружнова – Запоріжжя: ЗНТУ, 2020. – 40 с.