

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ**

Запорізький національний технічний університет

**КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ І
МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**

до виконання самостійних розрахунково-графічних робіт
з курсу „Теоретична механіка. Кінематика”
для студентів механічних спеціальностей
денної та заочної форм навчання

Запоріжжя

2011

Контрольні завдання і методичні вказівки до виконання самостійних розрахунково-графічних робіт з курсу „Теоретична механіка. Кінематика” для студентів механічних спеціальностей денної та заочної форм навчання / Укл. *П.К. Штанько, І.І. Кузьменко, О.Д. Лутова, О.М. Поляков, Л.Ф. Дзюба* – Запоріжжя: ЗНТУ. 2011, – 82 с.

Укладачі: *П.К. Штанько*, доцент, к.т.н., ЗНТУ
І.І. Кузьменко, доцент, к.т.н., ЗНТУ
О.Д. Лутова, ст. викл., ЗНТУ
О.М. Поляков, доцент, к.т.н., СевНТУ,
Л.Ф. Дзюба, доцент, к.т.н., Львівський
державний університет БЖД

Рецензент: *Б.О. Трескунов*, доцент, к.т.н.

Експерт: *А.Д. Фурсіна*, доцент, к.т.н., ЗНТУ

Відповідальний
за випуск: *В.Г. Шевченко*, доцент, к.т.н.,
зав. каф. механіки ЗНТУ

Комп’ютерна графіка
та верстка:

Г.А. Кот

Видання перероблене та доповнене.

ЗАТВЕРДЖЕНО

на засіданні кафедри
механіки

Протокол № 5
від 9.06.2011 року

ЗМІСТ

1	ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ	4
2	ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ	4
2.1	К.1 Дослідження руху точки	4
	Приклад 2.1	8
2.2	К.2 Дослідження поступального і обертального рухів твердого тіла	13
2.1.1	К.2.1 <i>Визначення закону поступального руху тіла 1</i>	13
2.2.2	К.2.2 <i>Визначення закону обертального руху колеса 3</i>	13
	Приклад 2.2	18
	Приклад 2.3	21
2.3	К.3 <i>Визначення швидкостей і пришвидшень точок твердого тіла, що виконує плоский рух</i>	24
	Приклад 2.4	29
2.4	К.4 <i>Кінематичний аналіз багатоланкового механізму</i>	34
	Приклад 2.5	39
2.5	К.5 <i>Визначення абсолютних швидкості та пришвидшення точки</i>	53
	Приклад 2.6	58
2.6	К.6 <i>Визначення кутових швидкостей ланок планетарного редуктора</i>	63
	Приклад 2.7	68
	ЛІТЕРАТУРА	72
	Додаток А Перелік питань до модульного контролю	74
	Додаток Б Кінематика точки	77
	Додаток В Кінематика твердого тіла	78
	Додаток Г Плоскопаралельний рух твердого тіла	79
	Додаток Д Складний рух точки	81
	Додаток Е Титульний лист завдання	82

1 ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Кожен студент виконує самостійно контрольні роботи, передбачені навчальною програмою. Якісне засвоєння курсу теоретичної механіки вимагає не тільки глибокого вивчення теорії, але й набуття твердих навиків у розв'язанні задач.

Викладач задає кожному студенту номер завдання та номер варіанту.

Самостійну роботу слід виконувати у відповідності до вимог стандарту, згідно з яким виконуються контрольні, курсові та дипломні роботи.

Перед розв'язуванням кожної задачі потрібно:

- виписати повністю її умову з числовими даними;
- викреслити акуратно ескіз розрахункової схеми в масштабі;
- вказати на ескізі позначення літерами тих величин, які необхідні для розрахунку.

Розв'язок кожної задачі потрібно супроводжувати короткими поясненнями і чіткими кресленнями, вказуючи розмірності всіх величин, отриманих за розрахунками. Всі розрахунки виконувати до двох знаків після коми.

Самостійну роботу необхідно оформити як звіт у відповідності зі стандартом [12] на папері. Вигляд титульного листа наведено у додатку Е. Після перевірки самостійної роботи студент повинен виправити в ній всі зазначені помилки і виконати всі вказівки викладача. Якщо робота не зарахована, потрібно в найкоротший термін виправити зазначені помилки і подати її повторно на перевірку. Усі виправлення, як в зарахованій, так і в незарахованій самостійній роботі, потрібно виконувати в тому самому звіті після рецензії викладача. До іспиту з дисципліни контрольна робота має бути зарахована.

2 ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

2.1 К.1 Дослідження руху точки

- За заданими рівняннями руху точки M установити вид її траєкторії, побудувати траєкторію і вказати положення точки на траєкторії для часу t_i , c ($t = 1, 2, 3$).

- Визначити швидкість, тангенціальне, нормальне та повне пришвидшення точки, радіус кривизни траєкторії, а також закон руху точки.
- Побудувати ці вектори на траєкторії для точки в заданий момент часу.
- Побудувати графіки швидкості, нормального, тангенціального і повного пришвидшень та графік руху точки.
Необхідні для розрахунку величини наведено в таблицях 2.1 і 2.2.

Таблиця 2.1

Варіант	Рівняння руху точки		Час, с		
	$x = f(t)$, м	$y = f(t)$, м	t_1	t_2	t_3
1	$2 \cos \omega t$ *	$4 \cos^2(\omega t/2)$	$\pi/6$	0	$\pi/2$
2	$2t$	$2 - (1 - 2t)^2$	0	1	0.5
3	$6 \sin(\pi/4) + 2$	$3 - 3 \cos(\pi/4)$	0	2	4
4	$-2t^2 + 3$	$-5t$	0	0.5	1
5	$4 \cos^2(\pi/3) + 2$	$4 \sin^2(\pi/3)$	1	0	0.5
6	$1 + 6 \sin(\pi/6)$	$4 \cos(\pi/6) - 2$	0	3	6
7	$3 - 2 \cos(\pi/4)$	$2 \sin(\pi/4) - 1$	0	4	2
8	$3t$	$6t - 5t^2$	1	2	3
9	$20 \cos(3\pi/2)$	$20 \sin(3\pi/2)$	0	1	0.5
10	$-\cos(\pi^2/3) + 3$	$\sin(\pi^2/3) - 1$	1	0	0.5
11	$4t + 4$	$-4/(t + 1)$	1	2	0
12	$5 - 2 \cos(\pi/3)$	$3 \sin(\pi/3) - 2$	1.5	3	4.5

* $\omega = 1 \text{ рад/с}$

Продовження таблиці 2.1

Варіант	Рівняння руху точки		Час, с		
	$x = f(t)$, м	$y = f(t)$, м	t_1	t_2	t_3
13	$10\cos(3t)$	$3+3t$	0	$\pi/3$	$\pi/6$
14	$4\cos(2\pi t)$	$-4\sin(\pi t)$	0	1	0.5
15	$3(1+t^2)$	$3/(1+t^2)$	1	0	0.5
16	$5\sin(\pi^2/4)+3$	$2-5\cos(\pi^2/4)$	1	$\sqrt{2}$	2
17	$t+2$	$2\cos(2t)$	0	π	$\pi/2$
18	$12\cos(3t)$	$-2\sin(6t)$	0	$\pi/4$	$\pi/2$
19	$3-8\sin(\pi/6)$	$-6\cos(\pi/6)$	0	3	1.5
20	$2-3t-6t^2$	$3-3t/2-3t^2$	0	1	2
21	$\cos^3 t$	$\cos t$	0	$\pi/4$	$\pi/6$
22	$5e^{2t}$	$5e^{-2t}$	0	0.5	0.3
23	$3t$	$4t^2-1$	0	0.5	1
24	$\cos(\pi^2)$	$2\sin(\pi^2)-1$	0	1	2
25	$2\cos(\pi^2)$	$\cos(2\pi^2)$	0	1	$\sqrt{3}/2$
26	$3-t^2$	t^2+1	1	2	3
27	$2\cos(6t)$	$12\sin(3t)$	0	$\pi/4$	$\pi/6$
28	$5\operatorname{ch}(2t)$	$5\operatorname{sh}(2t)$	0	0.5	1
29	$1+3\cos(\pi^2/3)$	$3\sin(\pi^2/3)+3$	0	1	$\sqrt{3}$
30	$20\cos^2(\pi)$	$20\sin(\pi)-10$	1/4	1/3	1

Таблиця 2.2

Варіант	Рівняння руху точки		Час, с		
	$x = f_1(t)$, м	$y = f_2(t)$, м	t_1	t_2	t_3
1	$2\cos^2(\pi/3)$	$-2\sin^2(\pi/3) - 4$	0	1	0.5
2	$2t^2 + 4$	$-2t$	0	1	1.5
3	$\cos(\pi^2/3) - 2$	$\sin(\pi^2/3) + 3$	0	1	2
4	$6\cos(3t)$	$-2\sin(6t)$	$\pi/4$	0	$\pi/6$
5	$t + 3$	$(t + 3)^3$	0	0.3	0.5
6	$2\sin(\pi/3)$	$-3\cos(\pi/3) + 4$	0.5	1	3
7	$3t^2 + 2$	$-4t$	0	0.5	1
8	$\frac{1}{2}(e^{4t} + e^{-4t})$	$\frac{1}{2}(e^{4t} + e^{-4t})$	0	1/4	0.5
9	$5\cos^2(\pi/4)$	$2\sin(\pi/4)$	1	2	3
10	$3\cos(\pi^2) - 1$	$1 + 3\sin(\pi^2)$	0	$\sqrt{0.5}$	1
11	$5\sin(\pi^2/6) - 2$	$3 + 5\cos(\pi^2/6)$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
12	$3/(t+2)$	$3t+6$	1	0.5	2
13	$3\cos(\pi/6) - 2$	$10\sin(\pi/6)$	0	1	1.5
14	$4t$	$(2t+5)^{-1}$	0	0.5	1
15	$5 - 4\cos(\pi/3)$	$-4 + \sin(\pi/3)$	0	1	0.5
16	$5 - 4\cos^2(\pi/3)$	$-4 + 3\sin^2(\pi/3)$	0	0.5	1
17	$2t$	$4e^{-2t}$	0	0.5	1
18	$8\cos(\pi/6) - 3$	$16\sin^2(\pi/6)$	1	2	3

Продовження таблиці 2.2

Варіант	Рівняння руху точки		Час, с		
	$x = f_1(t)$, м	$y = f_2(t)$, м	t_1	t_2	t_3
19	$-4t^2+1$	$-3t$	0	0.5	1
20	$6\cos(\pi/4)-4$	$-9\sin(\pi/4)+4$	1	2	3
21	$-2t-2$	$-2/(t+1)$	0	1	2
22	$4\cos(\pi/3)$	$-3\sin(\pi/3)$	0	1	2
23	$3t$	$4t^2-1$	0	0.5	1
24	$1/2\sin(2t)$	$\cos^2(t)$	0	$\pi/4$	$\pi/2$
25	$3/2(e^t+e^{-t})$	$3/2(e^t-e^{-t})$	0	1	2
26	$4t$	$16t^2-1$	1/4	0.5	1
27	$7\sin^2(\pi/6)-5$	$7\cos^2(\pi/6)$	0	0.5	1
28	$-5t^2-4$	$3t$	0	1	0.5
29	$-10\cos(\pi/3)$	$3\sin(\pi/3)$	1	0.5	1.5
30	$5t$	$-7t^2+3$	0	1	0.5

Приклад 2.1. За заданими рівняннями руху точки M установити:

- вид її траєкторії, побудувати траєкторію і вказати положення точки на траєкторії для заданого моменту часу;
- визначити швидкість, тангенціальне, нормальне та повне прискорення точки, радіус кривизни траєкторії, а також закон руху точки.
- побудувати вектори \vec{V} , \vec{a} , \vec{a}^τ , \vec{a}^n для точки M на траєкторії в заданий момент часу;
- побудувати графіки $V(t)$, $a(t)$, $a^\tau(t)$, $a^n(t)$ та $S(t)$.

Задано: $t = 1.0$ с; $\omega = 1$ рад/с;

$$x = -2 \cos(t) + 3 \text{ м}; \quad y = t \text{ м}; \quad (2.1)$$

Розв'язання.

Виключаючи з рівнянь (2.1) час t , дістаємо рівняння траєкторії в координатній формі $x = f(y)$

$$x = -2 \cos(y) + 3. \quad (2.2)$$

Рівняння (2.2) вказує на те, що траєкторія рухомої точки має вигляд косинусоїди (рис. 2.1).

Координати рухомої точки M для $t = 1.0$ с

$$x = -2 \cos(1.0) + 3 = -2 \cdot 0.54 + 3 = 1.92 \text{ м}; \quad y = 1.0 \text{ м}.$$

За цими координатами наносимо на рис. 2.1 точку M .

Вектор швидкості точки

$$\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j}. \quad (2.3)$$

Вектор пришвидшення точки

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}. \quad (2.4)$$

У рівняннях (2.3), (2.4) \vec{i} , \vec{j} – орти координатних осей x та y ; V_x , V_y , a_x , a_y – проекції швидкостей і пришвидшень точки на ці осі.

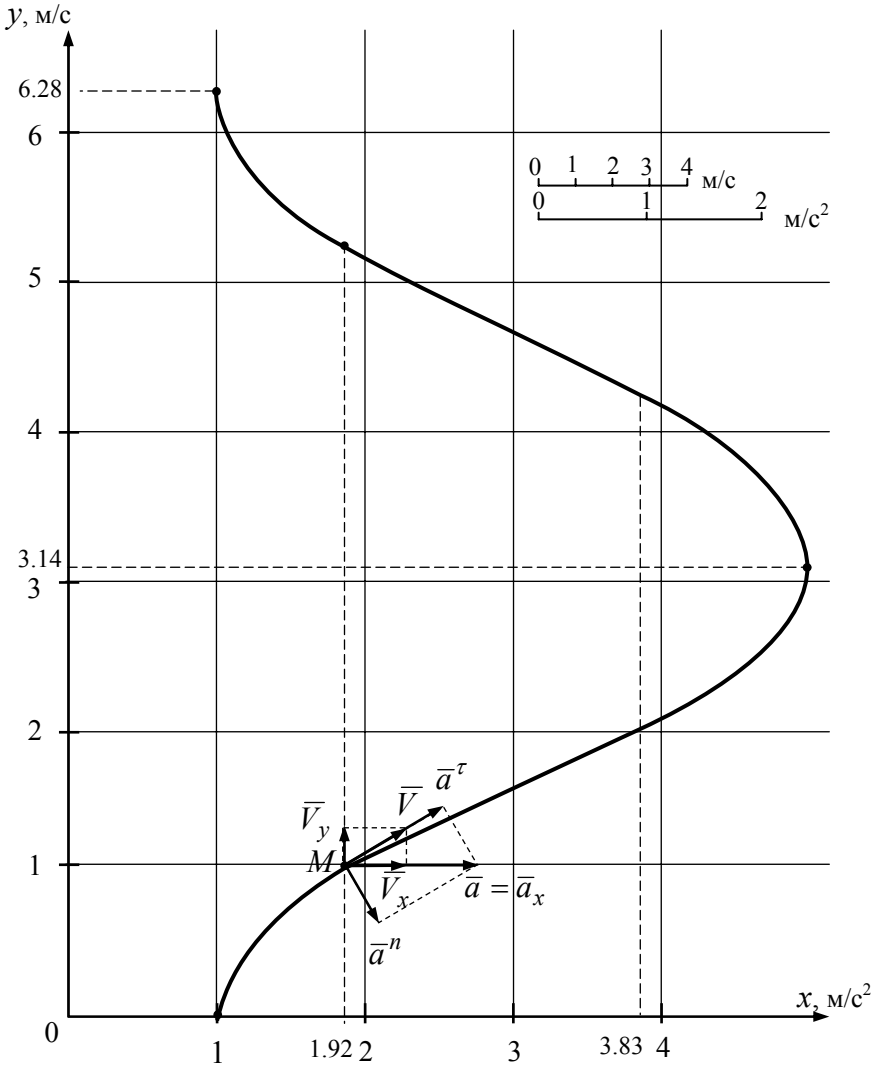
Для розглядуваного прикладу маємо

$$V_x = \dot{x} = \frac{d}{dt}[-2 \cos(t) + 3] = 2 \sin(t); \quad V_y = \dot{y} = \frac{d}{dt}[t] = 1;$$

$$a_x = \ddot{x} = \dot{V}_x = \frac{d}{dt}[2 \sin(t)] = 2 \cos(t); \quad a_y = \ddot{y} = \dot{V}_y = \frac{d}{dt}[1] = 0.$$

Модуль швидкості

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{4 \sin^2(t) + 1} = f_1(t). \quad (2.5)$$

Рисунок 2.1 – Траекторія руху точки M

Модуль пришвиднення

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{4\cos^2(t)} = 2\cos(t) = f_2(t). \quad (2.6)$$

Модулі тангенційного та нормального пришвидшень точки

$$\begin{aligned} a^\tau &= \frac{dV}{dt} = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{v} = \frac{d}{dt} \left[\sqrt{4 \sin^2(t) + 1} \right] = \\ &= 4 \frac{\sin(t) \cdot \cos(t)}{\sqrt{4 \sin^2(t) + 1}} = f_3(t), \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$a_n = \sqrt{(a)^2 - (a^\tau)^2} = 2 \sqrt{\cos^2(t) - 4 \left(\frac{\sin(t) \cdot \cos(t)}{4 \sin^2(t) + 1} \right)^2} = f_4(t). \quad (2.8)$$

Радіус кривизни траєкторії

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{4 \sin^2(t) + 1}{2 \sqrt{\cos^2(t) - 4 \left(\frac{\sin(t) \cdot \cos(t)}{4 \sin^2(t) + 1} \right)^2}}.$$

Аналітичний вираз закону руху на траєкторії визначається за формулою

$$S = \int_0^t V dt = \int_0^t \sqrt{4 \sin^2(t) + 1} dt = f_5(t). \quad (2.9)$$

В даному випадку це еліптичний інтеграл II-го роду, його треба розв'язати за допомогою ЕОМ.

Для даного прикладу закон руху можливо представити у вигляді ряду

$$S = t + \frac{2}{3} t^3 - \frac{8}{15} t^5 + \dots = f_6(t). \quad (2.10)$$

Для побудови графіка $S(t)$ достатньо в (2.10) залишити три члена ряду.

Побудова графіків. Графіки зміни швидкості, тангенціального, нормального і повного пришвидшень, а також графік руху точки по траєкторії будуються за формулами (2.5), (2.6), (2.7), (2.8) та (2.9) або (2.10). Для даного прикладу ці графіки наведені на рис. 2.2...2.4.

Результати обчислень всіх величин наведено в таблиці 2.3.

Таблиця 2.3

Час t_i, c	Координати, м		Швидкості, м/с			Пришвидшення, м/с ²					Радіус кривизни $\rho, м$
	x	y	V_x	V_y	V	a_x	a_y	a	a^t	a^n	
1.0	1.92	1.00	1.68	1.00	1.95	1.08	0.00	1.08	0.93	0.55	6.98

За даними табл. 2.3 на рис.2.1 побудовані вектори \vec{V} , \vec{a} , \vec{a}^t , \vec{a}^n .

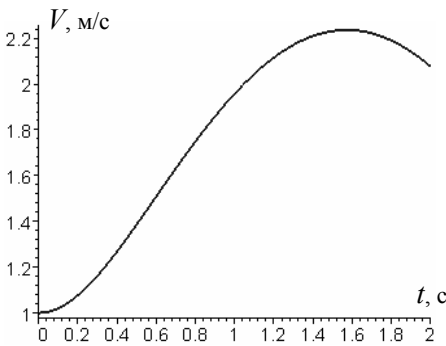
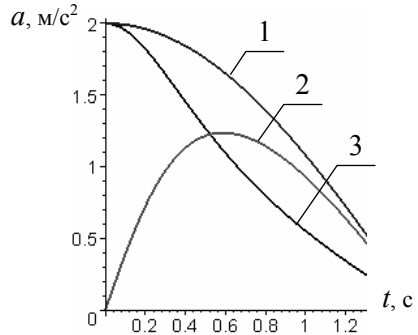


Рисунок 2.2 – Модуль швидкості точки



- 1 – модуль повного пришвидшення;
2 – модуль тангенційного пришвидшення;
3 – нормальне пришвидшення.

Рисунок 2.3 – Пришвидшення точки

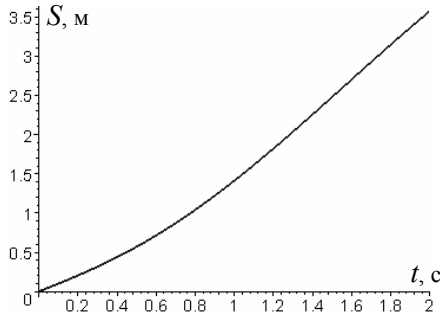


Рисунок 2.4 – Графік руху

2.2 К.2 Дослідження поступального й обертального рухів твердого тіла

Механізми складаються (рис. 2.5) із поступально рухомого тіла 1 та із ступінчастих коліс 2 і 3, з'єднаних пасовими або зубчастими передачами.

Радіуси коліс і закон поступального руху першого тіла $z_1(t)$ та обертального руху колеса 3 $\varphi_3(t)$ наведено в таблиці 2.4.

Додатний напрямок $\varphi_3(t)$ прийняти таким, як показано на схемах механізмів (рис. 2.5).

2.2.1 К.2.1 Визначення закону поступального руху тіла 1

При заданому законі обертального руху тіла 3 $\varphi_3(t)$ для моментів часу t_i ($i=1, 2$) визначити:

- швидкість, нормальне, тангенціальне і повне пришвидшення точки M ;
- закон поступального руху тіла 1;
- швидкість і пришвидшення тіла 1;
- кутові швидкість і пришвидшення тіл 2, 3;
- показати на рисунку вектори швидкостей та пришвидшень тіла 1 і точки M , а також вектори кутових швидкостей і пришвидшень тіл 2, 3.

2.2.2 К.2.2 Визначення закону обертального руху колеса 3

При заданому законі поступального руху першого тіла $z_1(t)$ для моментів часу t_i ($i=1, 2$) визначити:

- швидкість, нормальне, тангенціальне і повне пришвидшення точки M ;
- закон обертального руху тіла 3;
- швидкість і пришвидшення тіла 1;
- кутові швидкість і пришвидшення тіл 2, 3;
- показати на рисунку вектори швидкостей та пришвидшень тіла 1 і точки M , а також вектори кутових швидкостей і пришвидшень тіл 2, 3.

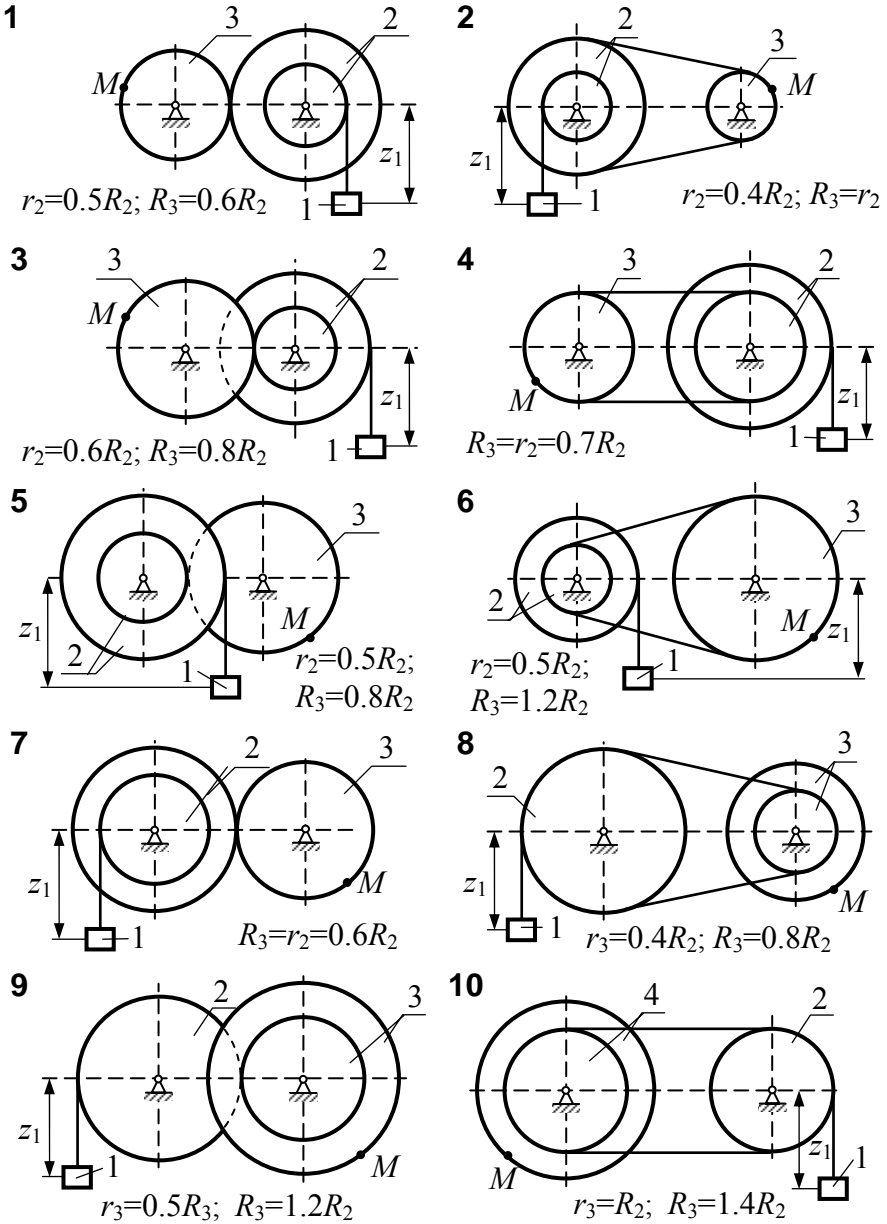
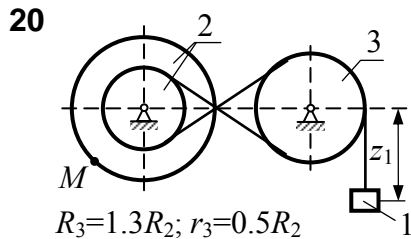
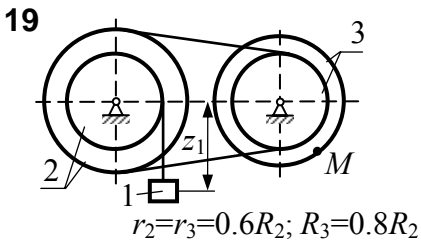
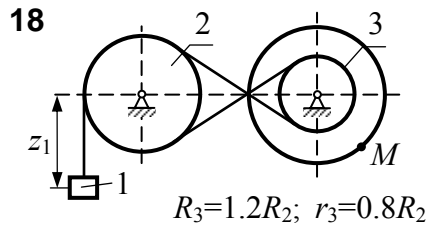
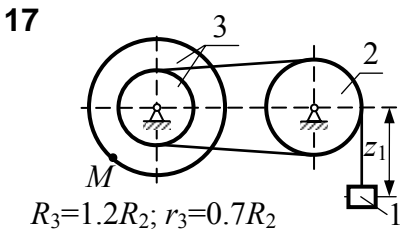
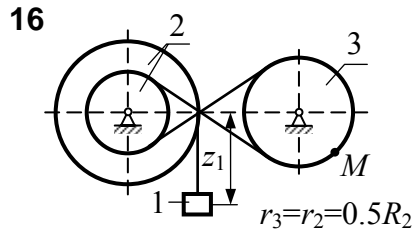
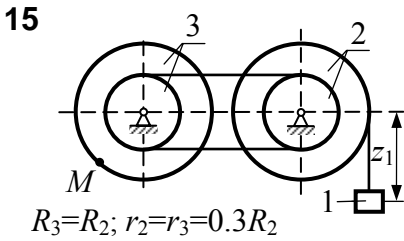
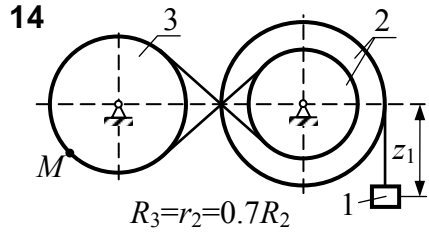
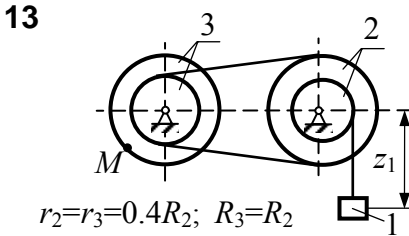
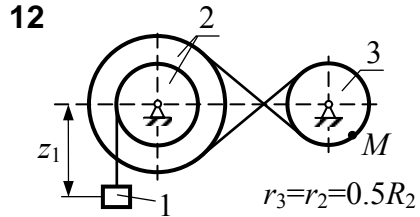
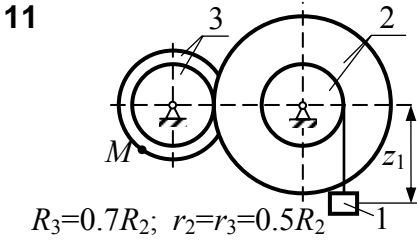
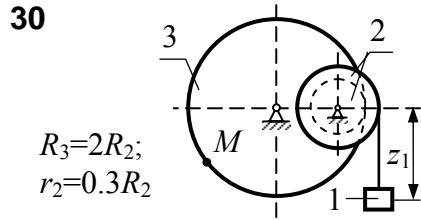
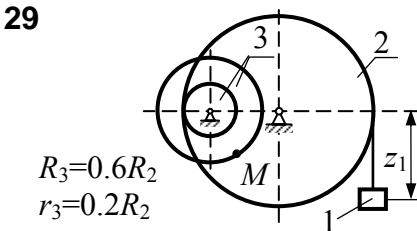
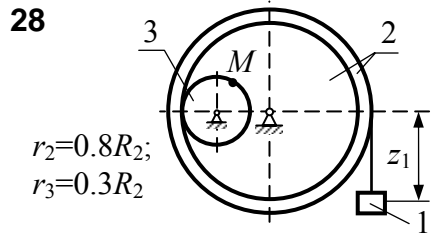
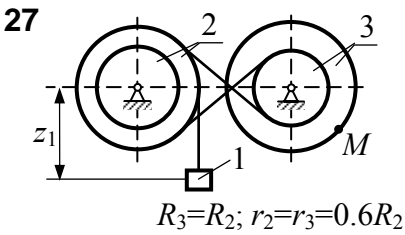
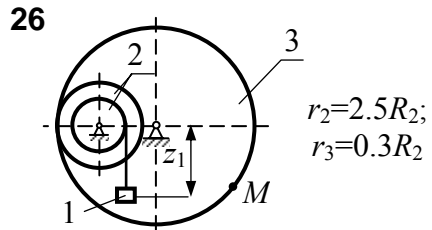
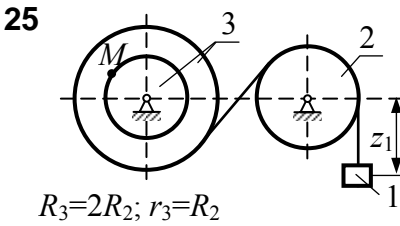
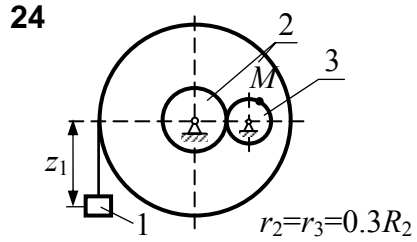
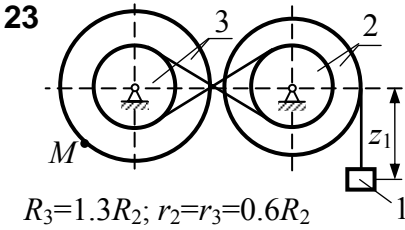
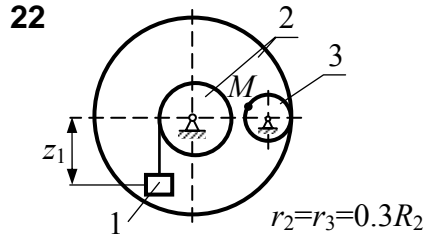
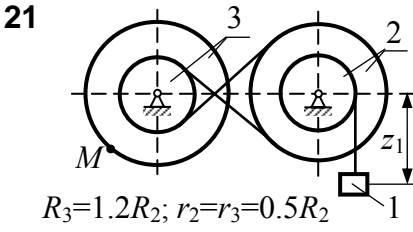


Рисунок 2.5





Продовження рисунка 2.5

Таблиця 2.4

Варіант	$\varphi_3(t)$, рад (до К.2.1)	$z_1(t)$, м (до К.2.2)	R_2 , м	Час, с	
				t_1	t_2
1	$10t - 0.1t^2$	$2t - 0.02\pi^2$	0.20	2	1
2	$0.2t^3 + t$	$0.02t^3 + 0.1t$	0.10	2	1
3	$0.75t + 1.5t^3$	$0.075t + 0.15t^3$	0.10	2	1
4	$5t - 3t^2$	$t - 0.3t^2$	0.20	1	0.5
5	$0.25t^2 - 2t$	$0.025t^2 - 0.2t$	0.10	2	1
6	$4t^2 + 2t$	$1.2t^2 + 0.6t$	0.30	0.25	0.5
7	$4t - 0.5t^2$	$1.2t - 0.15t^2$	0.30	1	3
8	$3t + 2t^2$	$1.2t + 0.8t^2$	0.40	0.25	0.3
9	$\pi \cos(\pi/3)$	$0.45 \cos(\pi/3)$	0.15	1	3
10	$1 + 2\sin(2t)$	$0.3\sin(2t)$	0.15	$\pi/6$	$\pi/4$
11	$t - 0.2t^2$	$0.1t - 0.02t^2$	0.1	2	1
12	$1.4t - t^2$	$0.28t - 0.2t^2$	0.2	0.4	0.6
13	$4t - 6t^2$	$0.8t - 1.2t^2$	0.2	1	0.5
14	$3t - 1.5t^2$	$0.3t - 0.15t^2$	0.1	2	3
15	$8t^2 - 4.5t$	$0.8t^2 - 0.9t$	0.2	1	4
16	$1 + \sin(3t)$	$0.1\sin(3t)$	0.1	$\pi/6$	$\pi/9$
17	$4\cos t$	$0.8\cos t$	0.2	$\pi/4$	$\pi/6$
18	$2\sin^2(t) + t$	$0.6\sin(2t) + 4$	0.3	$\pi/2$	$\pi/6$
19	$2\cos(2t) + 1$	$0.8\sin(2t) + 1$	0.4	$\pi/8$	$\pi/6$

Продовження таблиці 2.4

Варіант	$\varphi_3(t)$, рад (до К.2.1)	$z_1(t)$, м (до К.2.2)	R_2 , м	Час, с	
				t_1	t_2
20	$1.5\sin(2t)$	$0.75\sin(2t)+5$	0.5	$\pi/12$	$\pi/6$
21	$2t^2+3t$	$0.28t^2+0.42t$	0.14	0.5	0.25
22	$3t^2-4t$	$0.9t^2-1.2t$	0.30	1	2
23	$0.5\pi^2$	$0.1\pi^2 + 2$	0.20	1	2
24	$0.5e^{2t} + 1$	$0.25e^{2t} + 5$	0.10	0.5	1
25	$2\pi - 1.2\pi^2$	$0.36\pi - 0.22\pi^2$	0.18	0.3	1.2
26	$2\cos(\pi/6)+1$	$0.8\cos(\pi/6)+5$	0.40	1	2
27	$5t^2+3t$	$0.6t^2+0.36t$	0.12	0.25	0.5
28	$4e^{3t} + 2$	$0.96e^{3t} + 6$	0.24	1/3	0
29	$4\pi \cos(\pi/6)+1$	$0.56\pi \cos(\pi/6)$	0.14	2	3
30	$5(t-0.25t^2)$	$t-0.05t^2$	0.2	1	2

Приклад 2.2. Приклад виконання завдання К.2.1

Задано: $\varphi_3(t) = 4 \sin \frac{\pi}{2} t$ рад; $R_2 = R_3 = 0.1$ м; $r_2 = 0.5R_2 = 0.05$ м.

Визначити:

- для заданого моменту часу $t=0.5$ с:
 - кутові швидкості і пришвидшення коліс 2 і 3;
 - швидкості та пришвидшення тіла 1 і точки M ;
 - показати на рисунку вектори $\bar{\omega}_3$, $\bar{\varepsilon}_3$, $\bar{\omega}_2$, $\bar{\varepsilon}_2$, \bar{a}_M^n , \bar{a}_M^t , \bar{a}_M , \bar{V}_M , \bar{V}_1 , \bar{a}_1 ;
- закон поступального руху тіла 1 $z_1(t)$.

Розв'язання.

За вихідними даними викреслюємо задану схему механізму (рис. 2.6).

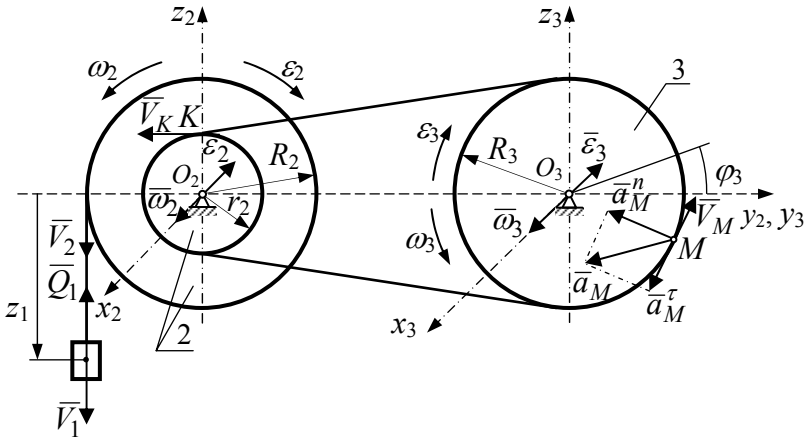


Рисунок 2.6

Кутові швидкість та пришвидження колеса 3

$$\omega_3 = \frac{d\varphi_3}{dt} = \dot{\varphi}_3 = 2\pi \cos \frac{\pi}{2} t;$$

$$\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = -\pi^2 \sin \frac{\pi}{2} t.$$

При $t=0.5$ с

$$\omega_3 = 2\pi \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0.5\right) = 1.414\pi \text{ рад/с};$$

$$\varepsilon_3 = -\pi^2 \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0.5\right) = -0.707\pi^2 \text{ рад/с}^2.$$

Швидкість та пришвидження точки M

$$V_M = \omega_3 \cdot R_3 = 1.414\pi \cdot 0.1 = 0.1414\pi \text{ м/с};$$

$$a_M^\tau = \varepsilon_3 \cdot R_3 = -0.707\pi^2 \cdot 0.1 = -0.0707\pi^2 \text{ м/с}^2;$$

$$a_M^n = \omega_3^2 \cdot R_3 = (1.414\pi)^2 \cdot 0.1 = 0.2\pi^2 \text{ м/с}^2;$$

$$\begin{aligned} a_M &= \sqrt{(a_M^n)^2 + (a_M^\tau)^2} = R_3 \sqrt{\omega_3^4 + \varepsilon_3^2} = \\ &= 0.1 \sqrt{(1.414\pi)^4 + (-0.707\pi^2)^2} = 0.212\pi^2 \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

Через те, що швидкості на ободах коліс 2 і 3 і на пасовій передачі однакові, то $V_K = V_M$, $V_K = \omega_2 r_2$ і $V_K = \omega_3 R_3$. Звідси *кутова швидкість колеса 2*

$$\omega_2 = \frac{R_3}{r_2} \omega_3 = \frac{0.1}{0.05} 2\pi \cos \frac{\pi}{2} t = 4\pi \cos \frac{\pi}{2} t.$$

Кутове пришвидшення тіла 2

$$\varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = -2\pi^2 \sin \frac{\pi}{2} t.$$

При $t=0.5$ с

$$\omega_2 = 4\pi \cos \left(\frac{\pi}{2} \cdot 0.5 \right) = 2.828\pi \text{ рад/с};$$

$$\varepsilon_2 = -2\pi^2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \cdot 0.5 \right) = -1.414\pi^2 \text{ рад/с}^2.$$

Швидкість на зовнішньому ободі колеса 2 дорівнює швидкості тіла 1

$$V_1 = V_2 = \omega_2 \cdot R_2 = 4\pi \cos \frac{\pi}{2} t \cdot 0.1 = 0.4\pi \cos \frac{\pi}{2} t.$$

Прискорення тіла 1

$$a_1 = a_2^\tau = \dot{V}_1 = \varepsilon_2 \cdot R_2; \quad a_1 = -0.2\pi^2 \sin \frac{\pi}{2} t.$$

При $t=0.5$ с

$$V_1 = 0.4\pi \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0.5\right) = 0.2828\pi \text{ м/с};$$

$$a_1 = -0.2\pi^2 \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0.5\right) = -0.1414\pi^2 \text{ м/с}^2.$$

Закон поступального руху тіла 1

Через те, що $V_1 = \frac{dz_1}{dt}$, то $dz_1 = V_1 dt$ і

$$z_1 = \int_0^t V_1 dt = \int_0^t \left(0.4\pi \cos \frac{\pi}{2} t\right) \cdot dt = 0.8 \sin \frac{\pi}{2} t \text{ м.}$$

Вектори швидкостей та пришвидшень тіла 1 і точки M , а також вектори кутових швидкостей і пришвидшень тіл 2 і 3 наведено на рис. 2.6.

Вектори кутових швидкостей $\bar{\omega}_2$ і $\bar{\omega}_3$ лежать на осях обертання (відповідно на осях x_2 і x_3) і направлені в ту сторону, звідки обертання тіла бачимо як таке, що відбувається проти ходу годинникової стрілки (правило гвинта).

Вектори кутових пришвидшень $\bar{\varepsilon}_2$ і $\bar{\varepsilon}_3$ співпадають з напрямками векторів кутових швидкостей $\bar{\omega}_2$ і $\bar{\omega}_3$ при обертаннях з пришвидшенням, тобто якщо знаки ω і ε співпадають.

Приклад 2.3. *Приклад виконання завдання К.2.2*

Задано: $z_1 = 0.2t^2 + 2t$ м; $R_2 = R_3 = 0.1$ м; $r_2 = 0.5R_2 = 0.05$ м.

- Визначити для заданого моменту часу $t=0.5$ с:
 - швидкість і пришвидшення тіла 1;
 - кутові швидкість і пришвидшення тіл 2 і 3;
 - швидкість і пришвидшення точки M ;
 - закон обертального руху колеса 3.
- Показати на рисунку вектори швидкостей та пришвидшень тіла 1 і точки M , а також вектори кутових швидкостей і пришвидшень тіл 2 і 3.

Розв'язання.

За вихідними даними викреслюємо задану схему механізму (рис. 2.7).

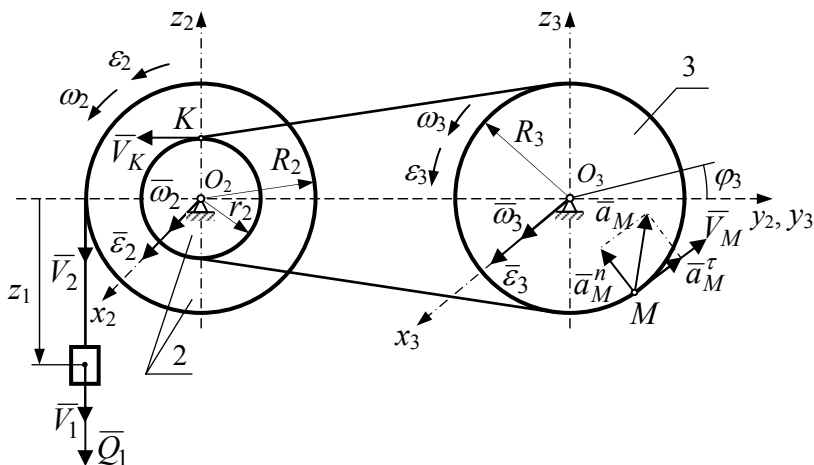


Рисунок 2.7

Швидкість та пришвидшення тіла 1

$$V_1 = \frac{dz_1}{dt} = \dot{z}_1 = 0.4t + 2 \text{ м/с};$$

$$a_1 = \frac{dV_1}{dt} = \dot{V}_1 = \ddot{z}_1 = 0.4 \text{ м/с}^2.$$

При $t=0.5$ с

$$V_1 = 0.4 \cdot 0.5 + 2 = 2.2 \text{ м/с}; \quad a_1 = 0.4 \text{ м/с}^2.$$

Через те, що швидкості точок на зовнішньому ободі колеса 2 і тіла 1 однакові, то $V_2 = V_1 = \omega_2 R_2$. Звідси *кутові швидкість і пришвидшення колеса 2*

$$\omega_2 = \frac{V_1}{R_2} = \frac{0.4t + 2}{0.1} = 4t + 20 \text{ рад/с} \quad \varepsilon_2 = \dot{\omega}_2 = 4 \text{ рад/с}^2.$$

При $t=0.5$ с

$$\omega_2 = 22 \text{ рад/с}; \quad \varepsilon_2 = 4 \text{ рад/с}^2.$$

Через те, що швидкість на паску постійна, то $V_K = V_M$, $V_K = \omega_2 r_2$ і $V_M = \omega_3 R_3$. Звідси кутові швидкість і пришвидшення колеса 3

$$\omega_3 = \frac{\omega_2 r_2}{R_3} = \frac{(4t + 20) \cdot 0.05}{0.1} = 2t + 10 \text{ рад/с};$$

$$\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = 2 \text{ рад/с}^2.$$

При $t=0.5$ с

$$\omega_3 = 2 \cdot 0.5 + 10 = 11 \text{ рад/с}; \quad \varepsilon = 2 \text{ рад/с}^2.$$

Швидкість, нормальне, тангенціальне і повне пришвидшення точки M визначаються за формулами

$$V_M = \omega_3 \cdot R_3 = 11 \cdot 0.1 = 1.1 \text{ м/с}; \quad a_M^n = \omega_3^2 \cdot R_3 = 11^2 \cdot 0.1 = 12.1 \text{ м/с}^2;$$

$$a_M^\tau = \varepsilon_3 \cdot R_3 = 2 \cdot 0.1 = 0.2 \text{ м/с}^2;$$

$$a_M = \sqrt{(a_M^n)^2 + (a_M^\tau)^2} = R \sqrt{\omega_3^4 + \varepsilon_3^2} = 0.1 \cdot \sqrt{11^4 + 2^2} = 12.101 \text{ м/с}^2.$$

Закон обертального руху колеса 3

Через те, що $\omega_3 = \frac{d\varphi_3}{dt}$, то $d\varphi_3 = \omega_3 dt$, а

$$\varphi_3 = \int_0^t \omega_3 dt = \int_0^t (2t + 10) dt = t^2 + 10t \text{ рад}.$$

Вектори швидкостей та пришвидшення тіла 1 і точки M , а також вектори кутових швидкостей і пришвидшень тіл 2 і 3 наведено на рис. 2.7.

2.3 К.3 Визначення швидкостей і пришвидшень точок твердого тіла, що виконує плоский рух

Для заданого положення механізму визначити швидкості та пришвидшення точок A, B, C .

Кривошип OA радіуса r обертається навколо точки O з кутовим пришвидшенням ε , маючи в даний момент кутову швидкість ω .

Числові дані для розрахунку наведені в таблиці 2.5, схеми механізмів – на рисунку 2.8.

Таблиця 2.5

Схема	$OA=r$	$AB=l$	ω	ε	α	β	γ
	м		рад/с^2		$\text{град} (^\circ)$		
1	0.20	0.30	1		30	45	–
2	0.24	0.36	2		45	60	–
3	0.30	0.40	3		60	60	–
4	0.36	0.48	4		30	30	–
5	0.40	0.50	5		45	15	–
6	0.48	0.56	6		60	15	–
7	0.50	0.60	7		30	30	–
8	0.56	0.64	8		45	45	–
9	0.60	0.70	9		60	30	–
10	0.64	0.72	10		30	45	–
11	0.25	0.50	1	2	30	15	30
12	0.30	0.60	2	3	60	45	30
13	0.35	0.70	3	2	30	60	–

Продовження таблиці 2.5

Схема	$OA=r$	$AB=l$	ω	ε	α	β	γ
	м		рад/с ²		град (°)		
14	0.40	0.60	1	3	15	30	–
15	0.20	0.45	2	3	30	45	30
16	0.25	0.60	1	2	30	60	30
17	0.30	0.65	2	1	60	30	–
18	0.35	0.60	3	1	30	45	–
19	0.30	0.80	1	2	15	60	–
20	0.20	0.50	2	1	30	60	–
21	0.30	0.60	3	1	30	45	30
22	0.10	0.70	2	3	60	45	–
23	0.15	0.45	1	4	30	60	30
24	0.20	0.60	2	1	30	45	–
25	0.30	0.50	1	2	–	30	–
26	0.35	0.80	1	3	30	30	–
27	0.40	0.80	1	2	30	15	–
28	0.10	0.40	2	4	15	60	–
29	0.15	0.70	3	4	30	60	–
30	0.20	0.60	4	1	60	30	–

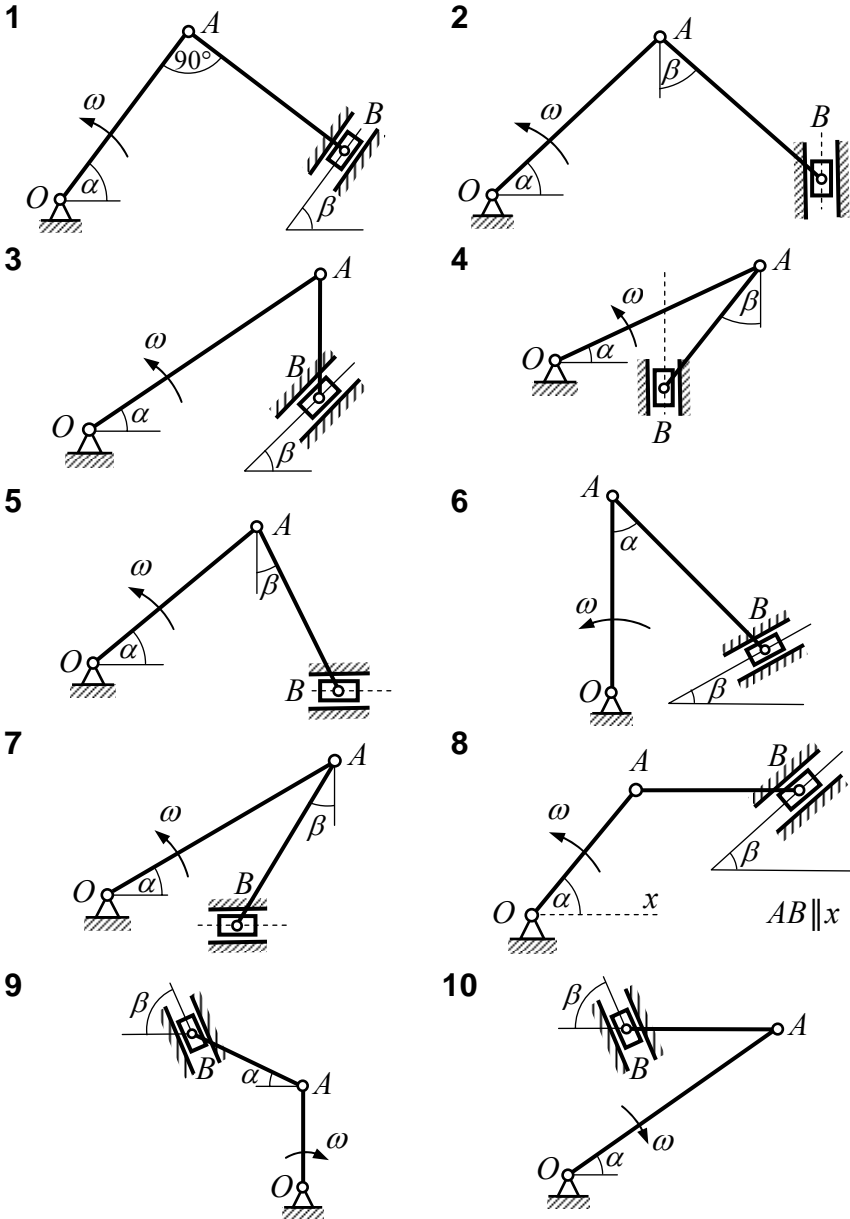
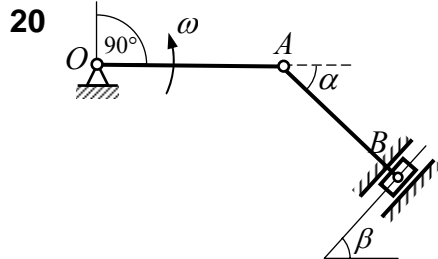
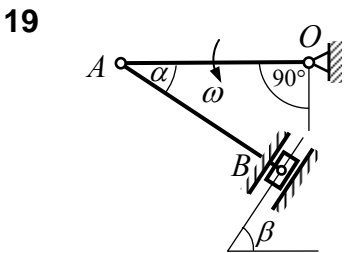
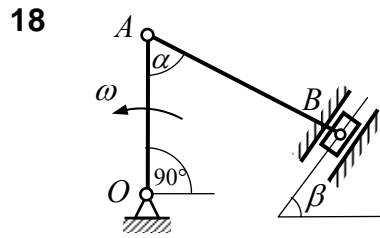
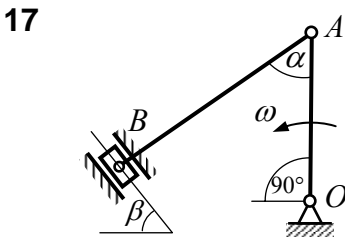
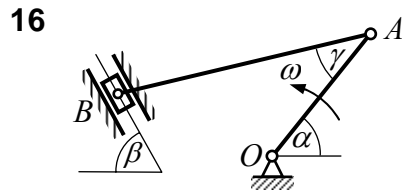
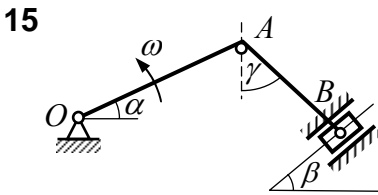
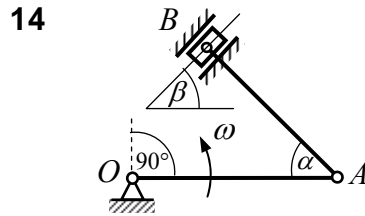
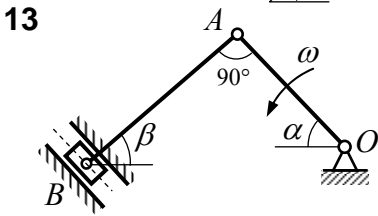
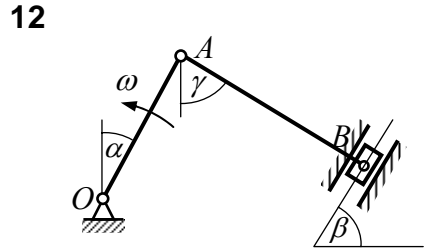
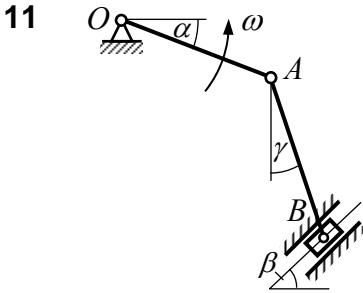
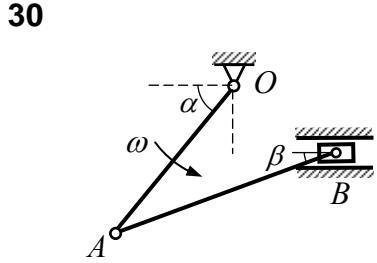
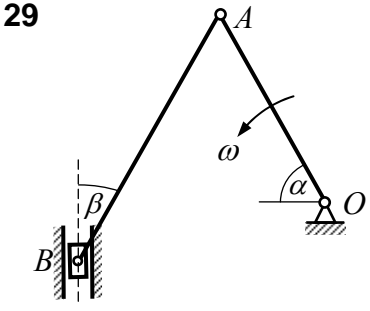
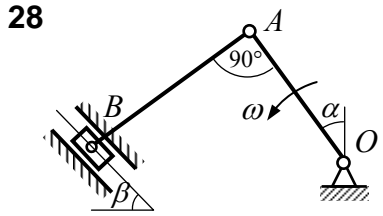
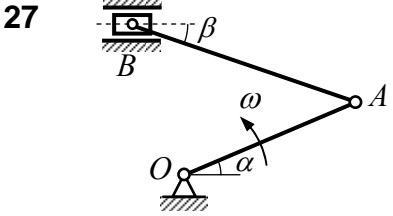
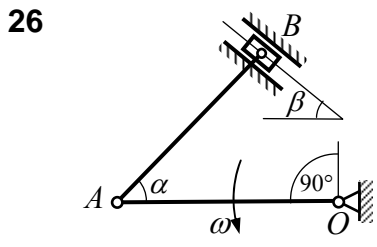
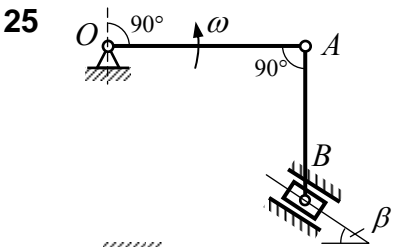
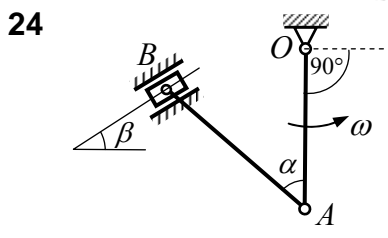
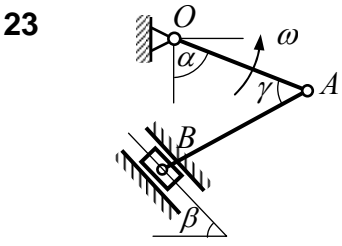
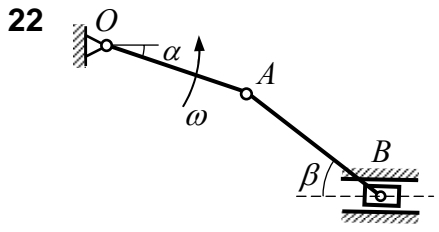
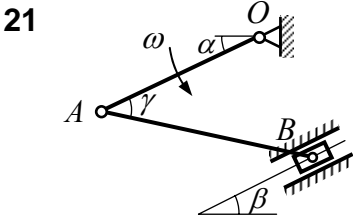


Рисунок 2.8





Приклад 2.4. Приклад виконання завдання К.2.3

Для заданого на рис. 2.9 положення механізму визначити:

- швидкість точок A , B , C та кутову швидкість ланки AB за допомогою миттєвого центра швидкостей;
- швидкість точки B за допомогою теореми про проекції швидкостей двох точок;
- пришвидшення точок A , B , C та кутове пришвидшення ланки AB , якщо кривошип OA радіуса $r=0.2$ м,

обертається з кутовим пришвидшенням $\varepsilon_{OA}=3 \text{ рад/с}^2$, маючи кутову швидкість $\omega_{OA}=1 \text{ рад/с}$, $AB=l=0.3$ м, $\alpha=30^\circ$, $\beta=45^\circ$, $AC=CB$.

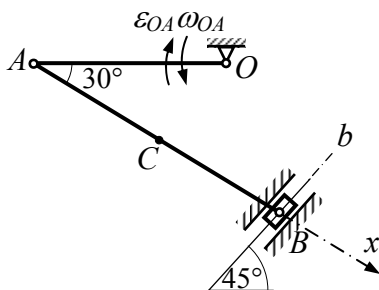


Рисунок 2.9

Розв'язання.

Визначення швидкостей точок A , B , C і кутової швидкості ланки AB механізму за допомогою миттєвого центра швидкостей.

Кривошип OA обертається в площині навколо точки O (рис. 2.9), швидкість точки A

$$V_A = \omega_{OA} \cdot OA = 0.2 \text{ м/с.}$$

Вектор \vec{V}_A перпендикулярний до кривошипа OA і спрямований в бік його обертання (рис. 2.10).

Швидкості точок B і C підраховуємо за використанням властивості миттєвого центра швидкостей.

Миттєвий центр швидкостей ланки AB знаходиться в точці P , яка

визначається перетином двох перпендикулярів до векторів швидкостей \vec{V}_A і \vec{V}_B (вектор \vec{V}_B спрямований вздовж напрямної Bb , рис. 2.10).

Тому, з урахуванням властивості миттєвого центра швидкостей, маємо

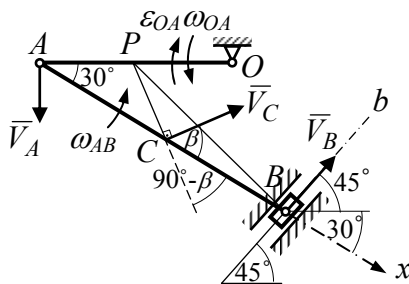


Рисунок 2.10

$$\frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} \rightarrow V_B = \frac{V_A \cdot BP}{AP}; \quad \frac{V_A}{AP} = \frac{V_A \cdot V_C}{CP} \rightarrow v_C = \frac{V_A \cdot CP}{AP},$$

де, згідно з теоремою синусів,

$$\frac{AP}{\sin 15^\circ} = \frac{AB}{\sin 135^\circ} = \frac{BP}{\sin 30^\circ},$$

звідки

$$AP = \frac{AB \cdot \sin 15^\circ}{\sin 45^\circ} = 0.11 \text{ м};$$

$$BP = \frac{AB \cdot \sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = 0.21 \text{ м}.$$

З теореми косинусів (рис. 2.10)

$$CP = \sqrt{AC^2 + AP^2 - 2AC \cdot AP \cos 30^\circ} = 0.0776 \cong 0.08 \text{ м}.$$

Тоді

$$V_B = \frac{0.2 \cdot 0.21}{0.11} = 0.4 \text{ м/с}; \quad V_C = \frac{0.2 \cdot 0.08}{0.11} = 0.14 \text{ м/с}.$$

Аналогічно можна обчислити кутову швидкість ланки AB , якщо використати властивість миттєвого центра швидкостей

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = \frac{0.2}{0.11} = 1.82 \text{ рад/с}.$$

Вектори швидкостей точок A , B , C та напрямлення кутової швидкості показано на рис. 2.10.

Швидкості точок B і C ланки механізму можна знайти за формулами

$$V_B = \omega_{AB} \cdot BP = 1.82 \cdot 0.21 = 0.4 \text{ м/с};$$

$$V_C = \omega_{AB} \cdot CP = 1.82 \cdot 0.08 = 0.14 \text{ м/с.}$$

Визначення швидкостей точок B і C за допомогою теореми про проекції швидкостей на пряму AB

$$\text{Пр}(\vec{V}_C)_{AB} = \text{Пр}(\vec{V}_A)_{AB}.$$

Тому

$$V_B \cos 75^\circ = V_A \cos 60^\circ \quad \text{і} \quad V_C \cos \beta = V_A \cos 60^\circ.$$

За теоремою синусів (рис. 2.10)

$$\frac{PC}{\sin 30^\circ} = \frac{AP}{\sin(90^\circ - \beta)}; \quad \sin(90^\circ - \beta) = \cos \beta.$$

Тому

$$\cos \beta = \frac{AP \cdot \sin 30^\circ}{PC} = \frac{0.11 \cdot 0.5}{0.08} = 0.707; \quad \beta = 45^\circ.$$

Тоді

$$V_B = \frac{V_A \cos 60^\circ}{\cos 75^\circ} = 0.4 \text{ м/с}; \quad V_C = \frac{V_A \cos 60^\circ}{\cos \beta} = 0.14 \text{ м/с.}$$

Числові значення модулів цих швидкостей наведено в табл. 2.6.

Таблиця 2.6

Точки та ланки	Швидкість, м/с			Кутові		Пришвидження, м/с ²
	задана	за допомогою миттєвих центрів швидкостей	за теоремою проекцій	швидкість, рад/с	пришвидження, рад/с ²	
A	0.20					0.63
B		0.4	0.4			0.43
C		0.14	0.14			0.85
AB				1.82	7.96	–

Визначення пришвидшень точок A , B , C та кутового пришвидження ланки AB .

Кривошип OA обертається рівнозмінно, а тому $\bar{a}_A = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau$, причому нормальне і тангенціальне пришвидження точки A відповідно становлять

$$a_A^n = \omega^2 \cdot OA = 1^2 \cdot 0.2 = 0.2 \text{ м/с}^2; \quad a_A^\tau = \varepsilon \cdot OA = 3 \cdot 0.2 = 0.6 \text{ м/с}^2.$$

Отже

$$a_A = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_A^\tau)^2} = 0.63 \text{ м/с}^2.$$

Вектори \bar{a}_A^n і \bar{a}_A^τ наведено на рис. 2.11.

Для визначення пришвидження \bar{a}_B і ε_{AB} використаємо теорему про пришвидження точки B плоскої фігури $\bar{a}_B = \bar{a}_A + \bar{a}_{BA}$ або

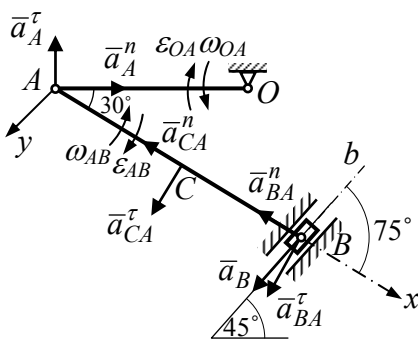


Рисунок 2.11

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{BA}^n + \bar{a}_{BA}^\tau. \quad (2.11)$$

Напрямок пришвидження \bar{a}_B відомий (вдovж Bb), а модуль $|\bar{a}_B|$ – невідомий.

Нормальне і тангенціальне пришвидження точки B при обертальному русі ланки AB навколо полюса A визначаються

$$a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 1.82^2 \cdot 0.3 = 1 \text{ м/с}^2; \quad a_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AB.$$

Спроектувавши рівняння (2.11) на осі декартової системи координат A_x і A_y , отримаємо

$$-a_B \cos 75^\circ = a_A^n \cdot \sin 30^\circ - a_A^\tau \sin 60^\circ - a_{BA}^\tau$$

та $a_B \cos 15^\circ = -a_A^n \cdot \sin 30^\circ - a_A^\tau \sin 60^\circ + a_{BA}^\tau$.

Звідки

$$a_B = \frac{-a_A^n \cdot \cos 30^\circ + a_A^\tau \cos 60^\circ + a_{BA}^n}{\cos 75^\circ} = 4.3 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{BA}^\tau = a_B \cos 15^\circ + a_A^n \sin 30^\circ + a_A^\tau \sin 60^\circ = 4.78 \text{ м/с}^2.$$

Тоді

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^\tau}{AB} = 7.96 \text{ рад/с}^2.$$

Пришвидшення точки C

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A + \bar{a}_{CA} = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{CA}^n + \bar{a}_{CA}^\tau,$$

де

$$a_{CA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AC = 0.5 \text{ м/с}^2; \quad a_{CA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AC = 1.2 \text{ м/с}^2.$$

За модулем $|\bar{a}_C| = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2}$,

де

$$a_{Cx} = a_A^n \cos 30^\circ - a_A^\tau \sin 60^\circ - a_{CA}^n = -0.62 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{Cy} = -a_A^n \sin 30^\circ - a_A^\tau \cos 30^\circ + a_{CA}^\tau = 0.6 \text{ м/с}^2;$$

$$a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} = 0.85 \text{ м/с}^2.$$

Вектори пришвидшень \bar{a}_{CA}^n , \bar{a}_{CA}^τ та \bar{a}_A^n , \bar{a}_A^τ наведено на рис. 2.11.

Результати обчислення всіх величин наведено в табл. 2.6.

2.4 К.4 Кінематичний аналіз багатоланкового механізму

Кривошип O_1A обертається зі сталою кутовою швидкістю ω_{O_1A} . Для заданого положення механізму визначити:

- швидкості точок A, B, C, D, E і кутові швидкості всіх його ланок за допомогою плану швидкостей;
- швидкості зазначених точок механізму та кутові швидкості всіх його ланок за допомогою миттєвих центрів швидкостей;
- пришвидшення точок A, B, C, D, E і кутові пришвидшення всіх його ланок аналітично;
- пришвидшення зазначених точок та кутові пришвидшення всіх його ланок за допомогою плану пришвидшень;

Схеми механізмів показані на рисунку 2.12, а необхідні для розрахунків величини наведені в таблиці 2.7.

Таблиця 2.7

Варіант	ω , рад/с	l_{OA}	l_{AB}	l_{BC}	l_{CD}	R	l_{BO_1}	α	β	γ	Інші розміри
											м
1	5	0.4	1.4	0.7	0.7	–	–	30	90	45	–
2	2	0.9	0.9	1.8	1.35	–	1.8	30	90	60	–
3	4	0.4	0.6	0.8	0.8	–	10	30	45	75	–
4	2	0.45	0.9	0.9	0.9	–	–	30	45	90	$l_{O_1D}=1.2$
5	6	0.9	0.9	0.4	–	–	0.2	30	45	30	$l_{CD}=0.9$
6	4	0.5	1.5	0.5	1.5	–	1.0	30	45	–	–
7	2	0.2	0.8	1.00	–	–	–	30	90	20	$l_{O_1C}=0.8$
8	3	0.2	1.3	1.6	0.9	–	–	30	135	240	–
9	4	0.2	1.0	1.0	–	–	–	150	75	200	$l_{O_1C}=0.6$
10	3	0.2	1.0	0.5	0.8	–	–	120	60	120	$l_{O_1B}=1.0$

Продовження таблиці 2.7

Варіант	ω , рад/с	l_{OA}	l_{AB}	l_{BC}	l_{CD}	R	l_{BO_1}	α	β	γ	Інші розміри
											м
11	2	0.2	1.0	–	1.0	0.5	–	60	30	45	–
12	4	0.2	1.3	–	–	0.3	–	120	60	150	$l_{AC}=0.8$
13	5	0.2	1.0	–	–	0.3	–	45	150	30	$l_{AC}=1.2$
14	2	0.2	1.0	1.4	–	0.4	–	60	30	240	–
15	3	0.2	1.2	1.2	0.7	0.5	–	60	150	90	$l_{O_1D}=0.6$
16	2	0.2	1.2	0.6	–	0.4	–	120	110	30	$l_{CE}=1.3$
17	4	0.2	1.0	–	1.0	0.5	–	45	30	60	–
18	5	0.2	1.0	1.0	0.5	0.5	–	150	75	30	–
19	2	0.2	1.0	–	0.8	0.5	–	90	45	120	$l_{BE}=1.4$
20	6	0.2	1.0	1.0	0.9	0.5	–	30	120	–	–
21	3	0.2	1.0	0.9	0.8	–	–	45	130	30	$l_{CE}=1.0$ $l_{BD}=0.9$
22	4	0.2	1.0	–	0.8	–	–	120	30	300	$l_{BD}=0.9$
23	5	0.2	1.0	0.5	0.9	–	–	45	30	60	–
24	3	0.2	1.2	0.6	1.0	–	–	60	30	110	–
25	6	0.3	0.6	0.6	0.9	–	–	30	15	–	–
26	4	0.35	0.7	0.7	0.7	–	0.7	30	45	60	–
27	5	0.8	1.6	–	2.4	–	3.2	60	30	–	–
28	2	0.7	14	0.7	12.5	–	2.8	30	–	–	–
29	3	0.6	1.2	–	1.8	0.6	1.2	30	60	–	–
30	2	0.2	1.6	–	1.0	–	–	30	45	–	$l_{BD}=1.0$

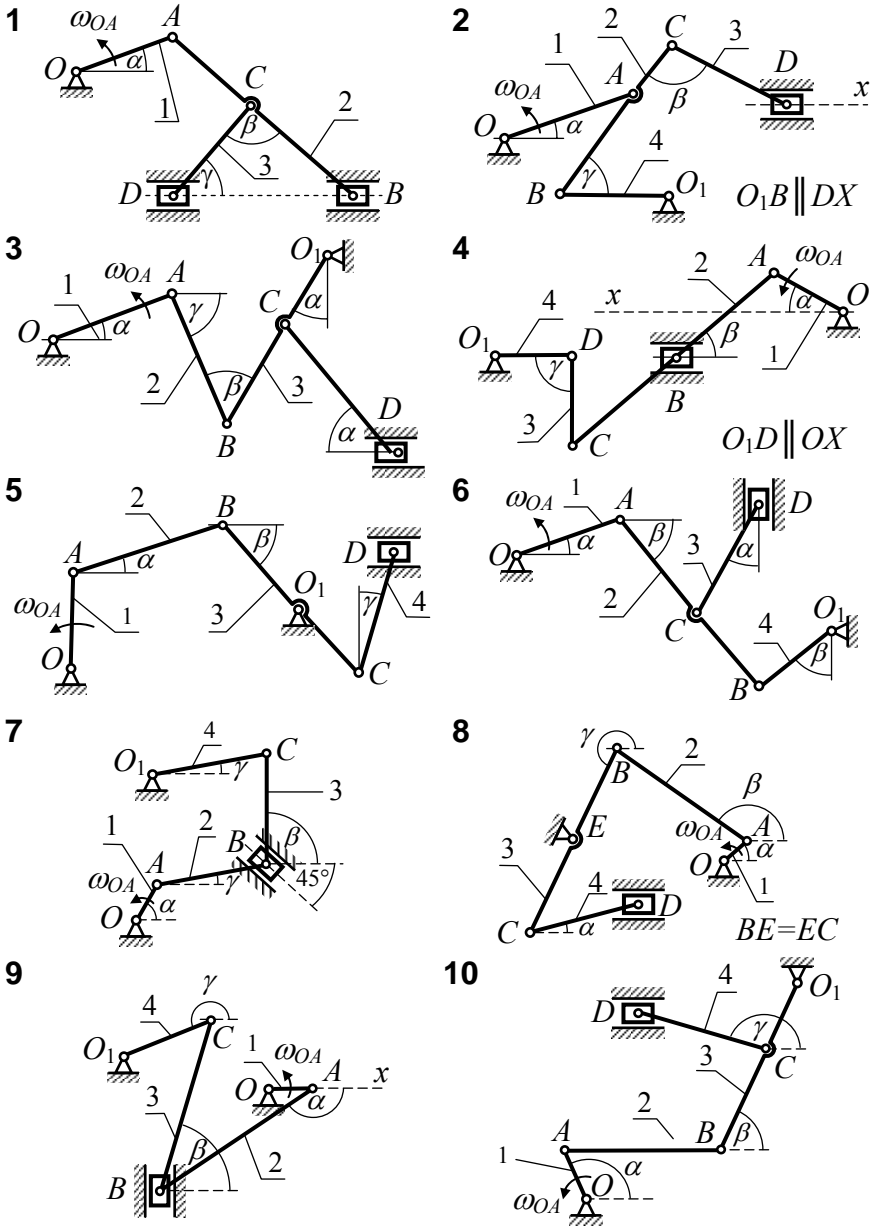
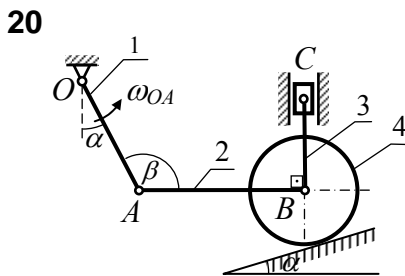
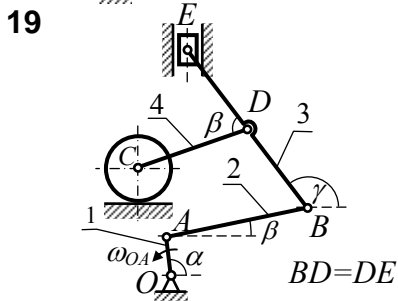
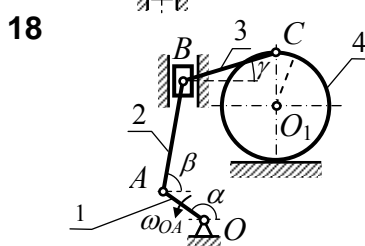
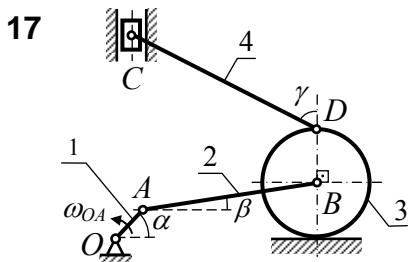
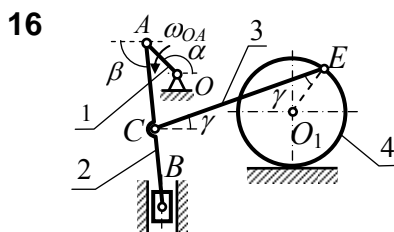
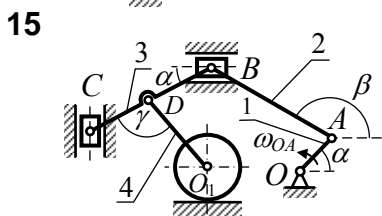
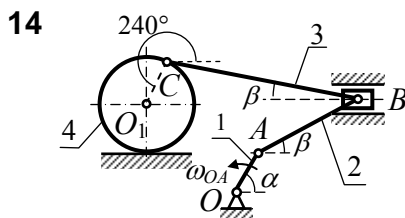
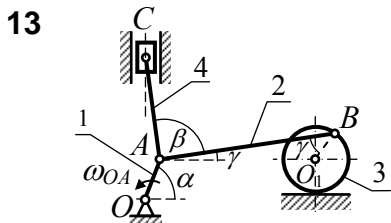
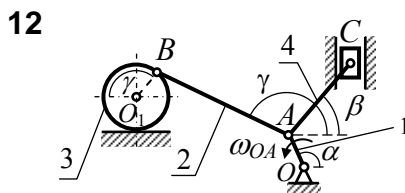
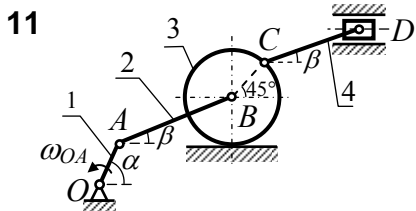
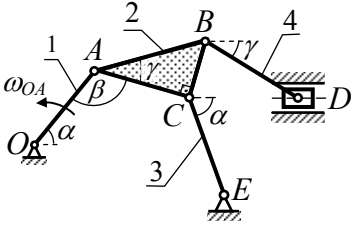


Рисунок 2.12

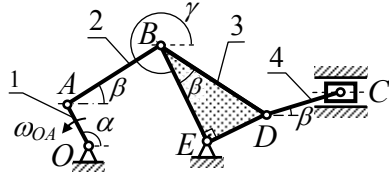


Продовження рисунка 2.12

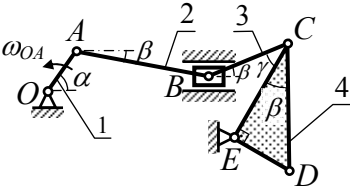
21



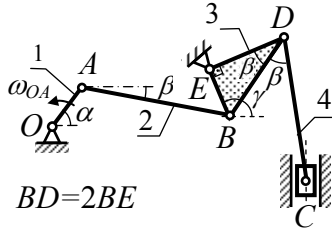
22



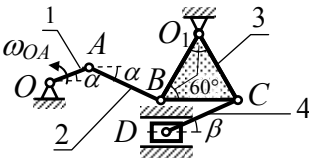
23



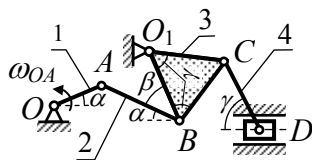
24



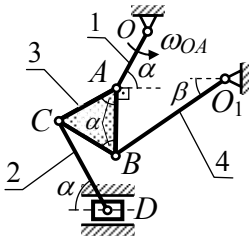
25



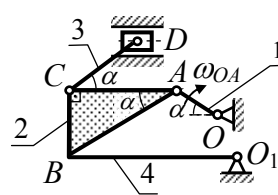
26



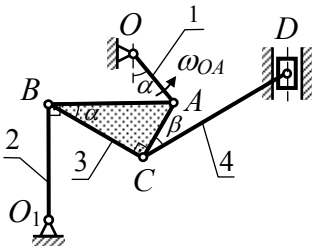
27



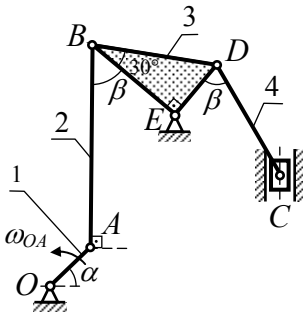
28



29



30



Продовження рисунка 2.12

Приклад 2.5. Приклад виконання завдання К.4

Для заданого на рис. 2.13 положення механізму визначити графічно і аналітично швидкості та пришвидшення точок A, B, C, D, E , а також кутові швидкості та пришвидшення його відповідних ланок.

Числові значення необхідних для розрахунку величин наведено в табл. 2.8, де всі лінійні розміри механізму задано в метрах.

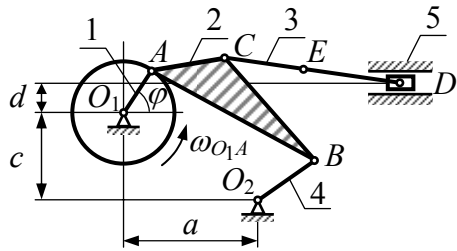


Рисунок 2.13 – Схема механізму

Таблиця 2.8

$\varphi, ^\circ$	$\omega_{O_1A}, \text{рад/с}$	l_a	l_d	l_c	l_{O_1A}	l_{AB}	l_{AC}	l_{CD}	l_{CB}	l_{CE}	l_{O_2B}
60	3	0.40	0.15	0.25	0.20	0.60	0.20	0.70	0.50	0.30	0.25

Розв'язання.

Побудова плану положення механізму (рис. 2.14).

Довжину ланки O_1A приймаємо рівною 20 мм і визначаємо масштаб креслення

$$\mu_l = \frac{l_{O_1A}}{O_1A} = \frac{0.20}{20} = 0.01 \text{ м/мм.}$$

Визначимо довжини інших ланок механізму

$$AB = \frac{l_{AB}}{\mu_l} = \frac{0.6}{0.01} = 60 \text{ мм;} \quad AC = \frac{l_{AC}}{\mu_l} = \frac{0.2}{0.01} = 20 \text{ мм;}$$

$$CB = \frac{l_{CB}}{\mu_l} = \frac{0.5}{0.01} = 50 \text{ мм;} \quad CD = \frac{l_{CD}}{\mu_l} = \frac{0.7}{0.01} = 70 \text{ мм;}$$

$$CE = \frac{l_{CE}}{\mu_l} = \frac{0.3}{0.01} = 30 \text{ мм;} \quad a = \frac{l_a}{\mu_l} = \frac{0.4}{0.01} = 40 \text{ мм;}$$

$$c = \frac{l_c}{\mu_l} = \frac{0.25}{0.01} = 25 \text{ мм}; \quad d = \frac{l_d}{\mu_l} = \frac{0.15}{0.01} = 15 \text{ мм}.$$

За отриманими розмірами будуємо *план механізму* (рис. 2.14), починаючи із точки O_1 .

План швидкостей механізму (рис. 2.15).

Швидкість точки A кривошипа O_1A

$$V_A = \omega_{O_1A} \cdot l_{O_1A} = 3 \cdot 0.2 = 0.6 \text{ м/с}.$$

Вектор \vec{V}_A перпендикулярний до кривошипа O_1A і спрямований в бік його обертання (рис. 2.14).

Довжину вектора \vec{V}_A назначасмо рівною $Oa=60$ мм, тому масштабом плана швидкостей буде

$$\mu_V = \frac{V_A}{Oa} = \frac{0.6}{60} = 0.01 \frac{\text{м}}{\text{с} \cdot \text{мм}}.$$

План швидкостей продовжуємо будувати з ланок AB і O_2B через те, що вони безпосередньо приєднані до ведучої ланки O_1A . План будуємо за векторними рівняннями

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{AB} \quad (\vec{V}_{AB} \perp AB; V_{AB} = \omega_{AB} \cdot l_{AB}); \quad (2.12)$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_{O_2} + \vec{V}_{O_2B} \quad (\vec{V}_{O_2B} \perp O_2B; V_{O_2B} = \omega_{O_2B} \cdot l_{O_2B}), \quad (2.13)$$

де \vec{V}_B – швидкість точки B спрямована перпендикулярно до O_2B ;

\vec{V}_{AB} – швидкість точки B в обертанні ланки AB відносно точки A , за модулем невідома і спрямована перпендикулярно AB ;

\vec{V}_{O_2B} – швидкість точки B в обертальному русі ланки O_2B відносно точки O_2 за модулем не відома і спрямована перпендикулярно O_2B ;

\vec{V}_{O_2} – швидкість точки O_2 дорівнює нулю.

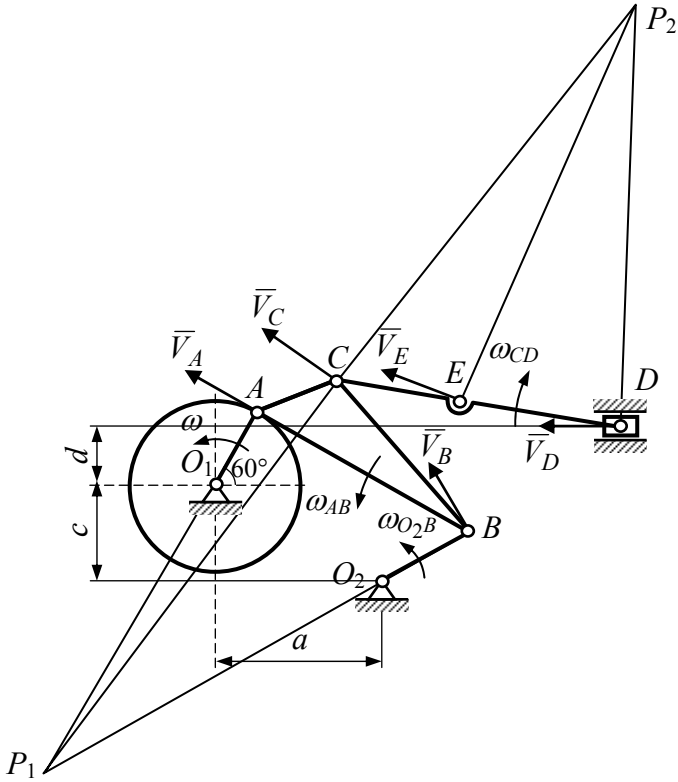


Рисунок 2.14 – План механізму з миттєвими центрами швидкостей, $\mu_l = 0.01 \frac{\text{м}}{\text{мм}}$

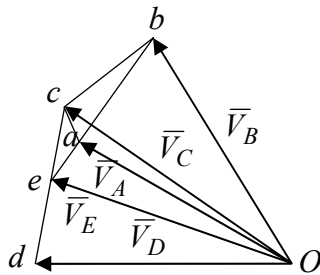


Рисунок 2.15 – План швидкостей, $\mu_v = 0.01 \frac{\text{м}}{\text{с} \cdot \text{мм}}$

Будуємо рішення векторного рівняння (2.12). Від полюса O плана швидкостей (рис. 2.15) відкладаємо відрізок Oa , який дорівнює в вибраному масштабі швидкості \bar{V}_A , і через кінець його (точка a) проводимо напрям вектора швидкості \bar{V}_{AB} .

Переходимо до побудови рішення векторного рівняння (2.13). Швидкість $\bar{V}_{O_2} = 0$, тому точку O_2 поєднуємо з полюсом O і через точку O плану проводимо напрям швидкості \bar{V}_{O_2B} до перетину з напрямом швидкості \bar{V}_{AB} в точці b . Відрізок Ob відображає швидкість точки B .

Модуль швидкості точки B

$$V_B = Ob \cdot \mu_V = 67 \cdot 0.01 = 0.67 \text{ м/с.}$$

Обертальна швидкість точки B навколо точки A

$$V_{AB} = ab \cdot \mu_V = 32 \cdot 0.01 = 0.32 \text{ м/с,}$$

звідки кутова швидкість ланки AB (і трикутника ABC)

$$\omega_{AB} = \omega_{ABC} = \frac{V_{AB}}{l_{AB}} = \frac{ab \cdot \mu_V}{l_{AB}} = \frac{0.32}{0.6} = 0.533 \text{ рад/с.}$$

Аналогічно діємо при визначенні швидкості точки C , будуючи рішення векторних рівнянь

$$\bar{V}_c = \bar{V}_A + \bar{V}_{AC} \quad (\bar{V}_{AC} \perp AC); \quad \bar{V}_c = \bar{V}_B + \bar{V}_{BC} \quad (\bar{V}_{BC} \perp BC).$$

Виходячи з плану швидкостей (див. рис. 2.15), маємо

$$V_c = Oc \cdot \mu_V = 66 \cdot 0.01 = 0.66 \text{ м/с.}$$

Для визначення швидкості точки D будуємо рішення векторного рівняння

$$\bar{V}_D = \bar{V}_C + \bar{V}_{CD} \quad (\bar{V}_{CD} \perp CD, \quad V_{CD} = \omega_{CD} \cdot l_{CD}).$$

Модуль швидкості точки D

$$V_D = Od \cdot \mu_V = 62 \cdot 0.01 = 0.62 \text{ м/с},$$

а кутова швидкість ланки CD

$$\omega_{CD} = \frac{V_{CD}}{l_{CD}} = \frac{cd \cdot \mu_V}{l_{CD}} = \frac{0.39}{0.7} = 0.577 \text{ рад/с}.$$

Визначимо швидкість точки E , яка належить ланці CD . На плані швидкостей точка e знаходиться на відрізку cd . Причому відрізки ce і de знаходяться в такій самій пропорції, які на схемі механізму, тобто у співвідношенні $\frac{30}{40} = \frac{3}{4}$. Швидкість цієї точки на плані зображається відрізком Oe , а модуль швидкості

$$V_E = Oe \cdot \mu_V = 60 \cdot 0.01 = 0.6 \text{ м/с}.$$

Визначення швидкостей точок A, B, C, D, E та кутових швидкостей ланок механізму за допомогою миттєвих центрів швидкостей.

Ланки механізму O_1A , O_2B обертаються навколо нерухомих центрів O_1 , O_2 . Миттєвий центр ланки AB (ΔABC) знаходиться в точці P_1 , яка визначається перетином двох ліній, проведених перпендикулярно до векторів швидкостей \bar{V}_A і \bar{V}_B (рис. 2.14).

Вектори швидкостей \bar{V}_A і \bar{V}_B перпендикулярні ланкам O_1B і O_2B . Вектор швидкості \bar{V}_C перпендикулярний лінії P_1C , а вектор \bar{v}_D спрямовуємо по траєкторії руху т. D .

Миттєвий центр швидкостей ланки CD знаходиться в точці P_2 на перетині перпендикулярів, проведених в точках C і D до векторів швидкостей \bar{V}_C і \bar{V}_D (рис. 2.14).

Враховуючи масштаб μ_b , з рис. 2.14 визначимо відстані від точок до миттєвих центрів швидкостей. Для чого вимірюємо ці відстані в мм

і помножуємо на масштабний коефіцієнт μ

$$AP_1 = 108 \cdot 0.01 = 1.08 \text{ м}; \quad BP_1 = 122 \cdot 0.01 = 1.22 \text{ м};$$

$$CP_1 = 114 \cdot 0.01 = 1.14 \text{ м}; \quad CP_2 = 120 \cdot 0.01 = 1.20 \text{ м};$$

$$EP_2 = 110 \cdot 0.01 = 1.10 \text{ м}; \quad DP_2 = 118 \cdot 0.01 = 1.18 \text{ м};$$

Кутова швидкість ланки AB (ΔABC)

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP_1} = \frac{0.6}{1.08} = 0.555 \text{ с}^{-1}.$$

Швидкості точок C і B

$$V_C = \omega_{AB} \cdot CP_1 = 0.555 \cdot 1.14 = 0.64 \text{ м/с}.$$

$$V_B = \omega_{AB} \cdot BP_1 = 0.555 \cdot 1.22 = 0.68 \text{ м/с}.$$

Кутова швидкість ланок CD і O_2B та швидкості точок E і D

$$\omega_{CD} = \frac{V_C}{CP_2} = \frac{0.64}{1.20} = 0.533 \text{ рад/с}; \quad \omega_{O_2B} = \frac{V_B}{l_{O_2B}} = \frac{0.68}{0.25} = 2.72 \text{ рад/с};$$

$$V_E = \omega_{CD} \cdot EP_2 = 0.533 \cdot 1.10 = 0.59 \text{ м/с};$$

$$V_D = \omega_{CD} \cdot DP_2 = 0.533 \cdot 1.18 = 0.63 \text{ м/с}.$$

Вектори швидкостей усіх точок механізму і кутові швидкості ланок показані на рис. 2.14.

Числові значення швидкостей точок і кутових швидкостей ланок зведено в табл. 2.9.

Визначення пришвидшень точок A, B, C, D, E і кутових пришвидшень ланок механізму за допомогою плану пришвидшень. Для визначення пришвидшень \bar{a}_A , \bar{a}_B , ε_{AB} (рис. 2.16) використовуємо теорему про пришвидшення точки B плоскої фігури

$$\bar{a}_B = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{AB}^n + \bar{a}_{AB}^\tau.$$

Таблиця 2.9 – Зведення отриманих результатів

Точки та ланки механізму	Швидкість, м/с		Кутова швидкість, рад/с		Пришвидження, м/с ²		Кутове пришвидження, рад/с ²	
	за допомогою МЦШ	за планом швидкостей	за допомогою МЦШ	за планом швидкостей	аналітично	за планом пришвидшень	аналітично	за планом пришвидшень
<i>A</i>	0.60	0.60	–	–	1.8	1.80	–	–
<i>B</i>	0.68	0.67	–	–	1.94	1.94	–	–
<i>C</i>	0.64	0.66	–	–	1.87	1.88	–	–
<i>Д</i>	0.63	0.62	–	–	0.88	0.92	–	–
<i>E</i>	0.59	0.60	–	–	1.33	1.20	–	–
<i>ABC(AB)</i>	–	–	0.555	0.533	–	–	0.21	0.2
<i>CD</i>	–	–	0.554	0.577	–	–	2.1	2.220
<i>O₂B</i>	–	–	2.720	2.680	–	–	2.9	2.800

Через те, що напрямок і модуль пришвидження \bar{a}_B невідомі, а з іншого боку

$$\bar{a}_B = \bar{a}_B^n + a_B^\tau,$$

то
$$\bar{a}_B^n + \bar{a}_B^\tau = \bar{a}_A^n + \bar{a}_A^\tau + \bar{a}_{AB}^n + \bar{a}_{AB}^\tau, \quad (2.14)$$

де $a_B^n = V_B^2 / O_2B = 0.67^2 / 0.25 = 1.80$ м/с²; $a_B^\tau = \varepsilon_{O_2B} \cdot O_2B$ м/с² – відповідно нормальне і тангенціальне пришвидження точки *B*;

$a_A^n = \omega_{O_1A}^2 \cdot O_1A = 3^2 \cdot 0.20 = 1.80$ м/с²; $a_A^\tau = \varepsilon_{O_1A} \cdot O_1A = 0$ м/с² ($\varepsilon_{O_1A} = \dot{\omega}_{O_1A} = 0$) – відповідно нормальне і тангенціальне пришвидження точки *A*;

$a_{AB}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 0.533^2 \cdot 0.60 = 0.17$ м/с² – нормальне пришвидження точки *B* при обертальному русі трикутника *ABC* навколо полюса *A* і спрямоване вздовж *BA*;

$a_{AB}^{\tau} = \varepsilon_{AB} \cdot AB$ – тангенціальне пришвидшення точки B , спрямоване перпендикулярно до AB (ε_{AB} – невідомо).

Приступаємо до побудови плану пришвидшень (рис. 2.17). Будемо рішення векторного рівняння (2.14). Від полюса π плану пришвидшень відкладаємо відрізок $\pi m_1 = \pi a$, який відображає пришвидшення \bar{a}_A^n . Довжина вектора $\pi a = 90$ мм, тому масштабний коефіцієнт плану пришвидшень буде

$$\mu_a = \frac{a_A^n}{\pi a} = \frac{1.8}{90} = 0.02 \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}.$$

Далі від точки a плану відкладаємо відрізок an_2 , який відображає \bar{a}_{AB}^n і дорівнює $an_2 = \frac{a_{AB}^n}{\mu_a} = \frac{0.17}{0.02} = 8.5$ мм.

Тоді через точку n_2 проводимо напрям тангенціального пришвидшення \bar{a}_{AB}^{τ} – лінію, перпендикулярну AB .

Переходимо до побудови лівої частини рівняння (2.14).

Від полюса π відкладаємо відрізок πm_3 , який зображає пришвидшення \bar{a}_B^n , довжина якого дорівнює

$$\pi m_3 = \frac{a_B^n}{\mu_a} = \frac{1.8}{0.02} = 90 \text{ мм.}$$

Далі через точку m_3 плану проводимо напрям пришвидшення \bar{a}_B^{τ} до перетину з лінією дії пришвидшення \bar{a}_{AB}^{τ} .

Точка перетину b є кінцем вектора \bar{a}_B пришвидшення точки B , яке треба знайти.

З плану пришвидшень маємо

$$a_B^{\tau} = n_3 b \cdot \mu_a = 35 \cdot 0.02 = 0.7 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{AB}^{\tau} = n_2 b \cdot \mu_a = 6 \cdot 0.02 = 0.12 \text{ м/с}^2;$$

$$a_B = \pi b \cdot \mu_a = 97 \cdot 0.02 = 1.94 \text{ м/с}^2.$$

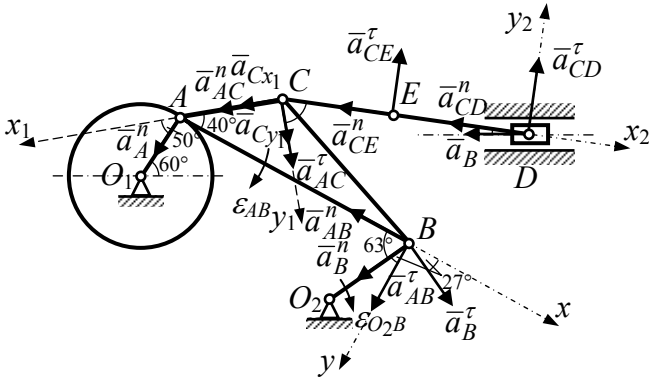


Рисунок 2.16 – Напрям векторів пришвидшень

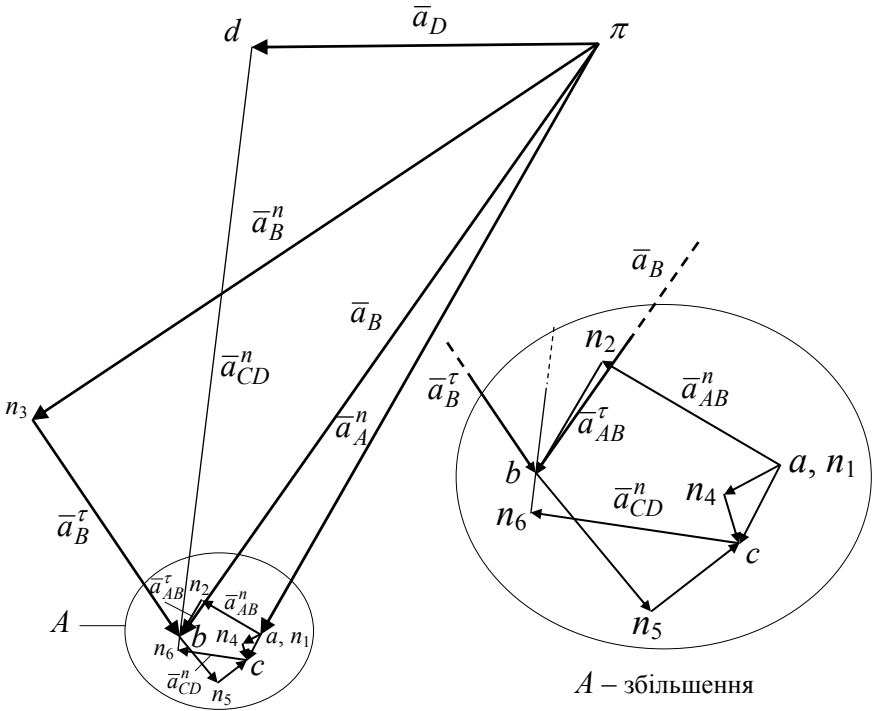


Рисунок 2.17 – План пришвидшень, $\mu_a = 0.01 \frac{\text{м/с}^2}{\text{мм}}$

Звідси

$$\varepsilon_{O_2B} = \frac{a_B^\tau}{O_2B} = \frac{0.7}{0.25} = 2.8 \text{ рад/с}^2; \quad \varepsilon_{AB} = \frac{a_{AB}^\tau}{AB} = \frac{0.12}{0.6} = 0.2 \text{ рад/с}^2.$$

Аналогічно визначаємо пришвидшення точки C

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A^n + \bar{a}_{AC}^n + \bar{a}_{AC}^\tau = \bar{a}_B + \bar{a}_{BC}^n + \bar{a}_{BC}^\tau, \quad (2.15)$$

де

$$a_{AC}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AC = 0.533^2 \cdot 0.2 = 0.057 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{BC}^n = \omega_{AB}^2 \cdot BC = 0.533^2 \cdot 0.5 = 0.142 \text{ м/с}^2.$$

Від точки a плана відкладаємо відрізок an_4 , який зображає пришвидшення \bar{a}_{AC}^n , довжина якого дорівнює

$$an_4 = \frac{a_{AC}^n}{\mu_a} = \frac{0.057}{0.02} = 2.85 \text{ мм},$$

і через його кінець n_4 проводимо пряму, перпендикулярну до AC .

Аналогічно від кінця вектора \bar{a}_B (точка b плану) проводимо відрізок bn_5 , відображаючий пришвидшення \bar{a}_{BC}^n , довжина якого

$$bn_5 = \frac{a_{BC}^n}{\mu_a} = \frac{0.142}{0.02} = 7.1 \text{ мм},$$

а через його кінець n_5 проводимо пряму, перпендикулярну BC .

Точка перетину прямих, проведених перпендикулярно до прямих AC та BC , визначає кінець вектора \bar{a}_C .

За модулем $a_C = \pi c \cdot \mu_a = 94 \cdot 0.02 = 1.88 \text{ м/с}^2$.

Далі будуємо план пришвидшень для точки D , враховуючи, що

$$\bar{a}_D = \bar{a}_C + \bar{a}_{CD}^n + a_{CD}^\tau, \quad (2.16)$$

$$\text{де } a_{CD}^n = \omega_{CD}^2 \cdot CD = 0.577^2 \cdot 0.7 = 0.233 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{CD}^\tau = \varepsilon_{CD} \cdot CD.$$

Будемо розв'язок векторного рівняння (2.16). Від кінця вектора \bar{a}_C (точка c плану) проводимо відрізок cn_6 , зображуючий пришвидшення \bar{a}_{CD}^n , довжина якого

$$cn_6 = \frac{a_{CD}^n}{\mu_a} = \frac{0.233}{0.02} = 11.6 \text{ мм},$$

а через його кінець n_6 проводимо пряму, перпендикулярну до CD . Одночасно через точку π проводимо пряму, паралельну до напрямку пришвидшення \bar{a}_D

Перетин двох прямих, а саме, прямої, перпендикулярної до CD , і прямої, паралельної вектору \bar{a}_D , визначає на плані пришвидшення точки D , тобто

$$a_D = \pi d \cdot \mu_a = 46 \cdot 0.02 = 0.92 \text{ м/с}^2,$$

а також

$$a_{CD}^\tau = n_6 d \cdot \mu_a = 80 \cdot 0.02 = 1.60 \text{ м/с}^2;$$

$$\varepsilon_{CD} = \frac{a_{CD}^\tau}{CD} = \frac{1.60}{0.70} = 2.28 \text{ рад/с}^2.$$

Визначення пришвидшень точок A, B, C, D, E аналітично. Пришвидшення точки B визначається за допомогою формули (2.14).

Спроектувавши рівняння (2.14) на осі координат x і y (див. рис. 2.14), отримаємо:

$$\text{на } x \quad -a_B^n \cdot \cos 63^\circ + a_B^\tau \cos 27^\circ = -a_{AB}^n;$$

$$a_B^\tau = \frac{a_B^n \cos 63^\circ - a_{AB}^n}{\cos 27^\circ} = \frac{1.8 \cdot 0.454 - 0.17}{0.891} = 0.726 \text{ м/с}^2;$$

$$\varepsilon_{O_2B} = \frac{a_B^\tau}{O_2B} = \frac{0.726}{0.25} = 2.9 \text{ рад/с}^2;$$

на y

$$a_B^n \sin 63^\circ + a_B^\tau \sin 27^\circ = a_A^n + a_{AB}^\tau;$$

$$\begin{aligned} a_{AB}^\tau &= a_B^n \sin 63^\circ + a_B^\tau \sin 27^\circ - a_A^n = \\ &= 1.8 \cdot 0.891 + 0.726 \cdot 0.454 - 1.8 = 0.13 \text{ м/с}^2; \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{AB} = \frac{a_{AB}^\tau}{AB} = \frac{0.13}{0.6} = 0.21 \text{ рад/с}^2.$$

Пришвидшення точки B

$$a_B = \sqrt{(a_B^n)^2 + (a_B^\tau)^2} = \sqrt{1.8^2 + 0.726^2} = \sqrt{3.767} = 1.94 \text{ м/с}^2.$$

Пришвидшення точки C (за полюс прийнята точка A)

$$\bar{a}_C = \bar{a}_A^n + \bar{a}_{AC}^n + \bar{a}_{AC}^\tau, \quad (2.17)$$

де

$$a_{AC}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AC = 0.533^2 \cdot 0.2 = 0.057 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{AC}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AC = 0.21 \cdot 0.2 = 0.042 \text{ м/с}^2.$$

Спроєктувавши рівняння (2.17) на осі x_1 і y_1 , отримаємо:

$$\begin{aligned} \text{на } x_1 \quad a_{C_{x_1}} &= a_A^n \cos 50^\circ + a_{AC}^n = 1.8 \cdot 0.643 + 0.057 = \\ &= 1.157 + 0.057 = 1.214 \text{ м/с}^2; \end{aligned}$$

на y_1

$$\begin{aligned} a_{C_{y_1}} &= a_A^n \sin 50^\circ + a_{AC}^\tau = 1.8 \cdot 0.766 + 0.042 = \\ &= 1.379 + 0.042 = 1.42 \text{ м/с}^2; \end{aligned}$$

$$a_C = \sqrt{a_{C_{x_1}}^2 + a_{C_{y_1}}^2} = \sqrt{1.214^2 + 1.42^2} = \sqrt{3.49} = 1.87 \text{ м/с}^2.$$

Пришвидшення точки D (полюс – точка C)

$$\bar{a}_D = \bar{a}_{C_{x_1}} + \bar{a}_{C_{y_1}} + \bar{a}_{CD}^n + \bar{a}_{CD}^\tau, \quad (2.17)$$

де

$$a_{CD}^n = \omega_{CD}^2 \cdot CD = 0.577^2 \cdot 0.7 = 0.233 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{CD}^\tau = \varepsilon_{CD} \cdot CD.$$

Для визначення \bar{a}_D і ε_{CD} спроєкуємо (2.17) на осі x_2 і y_2 (рис. 2.16):

$$\text{на вісь } x_2 \quad -a_D \cos 20^\circ = -a_{C_x} \cos 22^\circ + a_{C_y} \cos 68^\circ - a_{CD}^n;$$

$$\begin{aligned} a_D &= \frac{a_{C_{x_1}} \cdot \cos 22^\circ - a_{C_{y_1}} \cos 68^\circ + a_{CD}^n}{\cos 20^\circ} = \\ &= \frac{1.214 \cdot 0.927 - 1.42 \cdot 0.374 + 0.233}{0.9396} = 0.882 \text{ м/с}^2; \end{aligned}$$

на вісь y_2

$$-a_D \sin 20^\circ = -a_{C_{x_1}} \sin 22^\circ - a_{C_{y_1}} \sin 68^\circ + a_{CD}^\tau;$$

$$\begin{aligned} a_{CD}^\tau &= -a_D \sin 20^\circ + a_{C_{x_1}} \sin 22^\circ + a_{C_{y_1}} \sin 68^\circ = \\ &= -0.88 \cdot 0.342 + 1.214 \cdot 0.375 + 1.42 \cdot 0.927 = 1.47 \text{ м/с}^2; \end{aligned}$$

$$\varepsilon_{CB} = \frac{a_{CD}^{\tau}}{CD} = \frac{1.47}{0.7} = 2.1 \text{ рад/с}^2.$$

Пришвидшення точки E (полюс – точка C)

$$\vec{a}_E = \vec{a}_{C_{x_1}} + \vec{a}_{C_{y_1}} + \vec{a}_{CE}^n + \vec{a}_{CE}^{\tau}, \quad (2.18)$$

де

$$a_{CE}^n = \omega_{CD}^2 \cdot CE = 0.577^2 \cdot 0.3 = 0.0998 = 0.1 \text{ м/с}^2;$$

$$a_{CE}^{\tau} = \varepsilon_{CD} \cdot CE = 2.1 \cdot 0.3 = 0.63 \text{ м/с}^2.$$

Для визначення \vec{a}_E споектуємо (2.18) на осі x_2 і y_2

$$\begin{aligned} a_{E_{x_2}} &= -a_{C_{x_1}} \cos 22^\circ + a_{C_{y_1}} \cos 68^\circ - a_{CE}^n = \\ &= -1.214 \cdot 0.927 + 1.42 \cdot 0.374 - 0.1 = -0.694 \text{ м/с}^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{E_{y_2}} &= -a_{C_{x_1}} \sin 22^\circ - a_{C_{y_1}} \sin 68^\circ + a_{CE}^{\tau} = \\ &= -1.214 \cdot 0.375 - 1.42 \cdot 0.927 + 0.63 = -1.14 \text{ м/с}^2; \end{aligned}$$

$$a_E = \sqrt{(a_{E_{x_2}})^2 + (a_{E_{y_2}})^2} = \sqrt{(0.694)^2 + (1.14)^2} = 1.33 \text{ м/с}^2.$$

Отримані результати обчислень зводимо у табл. 2.9.

2.5 К.5 Визначення абсолютних швидкості та пришвидження точки

Точка M рухається відносно тіла D . За даними рівняннями відносного руху цієї точки $S_r(t)$ та переносного руху тіла $\varphi_e(t)$ для моментів часу t_i ($i=1, 2, 3$) визначити абсолютні швидкість і пришвидження зазначеної точки.

Схеми механізмів показано на рис. 2.18...2.20, а необхідні для розрахунку величини наведено в табл. 2.10.

На рисунках точка M показана в положенні, при якому $S = AM > 0$ (при $S < 0$ точка M знаходиться по другу сторону від точки A).

Таблиця 2.10

Варіант	$S_r(t) = AM$	$\varphi_e(t)$	R	a	t_1	t_2	t_3
	м	рад	м		с		
1	$0.4\pi \cos(\pi/6)$	$-2t^2+t$	0.4	0.3	0	1	2
2	$0.2 \sin(\pi)$	$4t^2-t$	-	0.2	0	1/2	1/6
3	$2.0 \sin(\pi/3)+1$	$-2t^2+3t$	-	2.2	0	1	0.5
4	$0.3 \cos(\pi/4)$	$4t^2-2t$	0.4	0.2	0	1	2
5	$4t^2$	$0.5t^2$	-	4.0	0	1	0.5
6	$1.5\pi \sin(\pi)$	$-3t^2+2t$	3.0	2.0	0	0.5	1/6
7	$1.5\pi \cos(2\pi)$	$2t-t^2$	3.0	1.0	0	1/8	1/6
8	$4.5\pi \sin(\pi/3)$	$4t^2-3t$	9.0	3.0	0	3/2	1/2
9	$5.0\pi \sin(2\pi)$	$-3t^2-3t$	10.0	5.0	0	1/12	1/6
10	$2.4\pi \cos(\pi/4)$	$-t^2+5t$	2.4	1.2	2	4/3	1.6
11	$0.9\pi \sin(\pi/4)$	$2t^3-t$	1.8	3.6	0	2	1
12	$2 \sin(\pi)$	$0.4t^2+2t$	-	3.0	0	0.5	1.5

Продовження таблиці 2.10

Варіант	$S_r(t) = AM$	$\varphi_e(t)$	R	a	t_1	t_2	t_3
	м	рад	м		с		
13	$2.0t^2$	$2t+0.5t^2$	–	2.0	0	1.0	0.5
14	$2.0\pi \sin(\pi/6)$	$0.6t^2$	2.0	2.0	0	1.0	3.0
15	$4.0\pi \cos(\pi/6)$	$3t-0.5t^2$	8.0	–	3.0	0.0	2.0
16	$2.0\pi \cos(\pi)$	$4.0t^2$	4.0	2.0	0.5	–	1.0
17	t^2+2t	$0.5t^2+1$	6.0	–	0	1.0	0.5
18	t^2+t	$t^3-2.5t$	–	6.0	0	1.0	0.5
19	$2.0 \sin(\pi/3)$	$2t-t^2$	–	3.0	0	0.5	1.0
20	$2.0\pi \sin(\pi/6)$	$4t-0.2t^2$	4.0	–	0	1.0	3.0
21	$4.5\pi \sin(\pi/3)$	$4t^2-2t$	9.0	5.0	0	3/2	0.5
22	$2t+2t^2$	$4t^2-t$	5.0	–	0	1.0	0.5
23	$2.5 \sin(\pi)$	$t-2t^2$	–	5.0	0	1.0	3/2
24	$2.0\pi \cos(\pi/6)$	$4t-2t^2$	2.0	2.0	3.0	2.0	0.0
25	$2.0\pi \sin(\pi)$	$0.4t^2+t$	4.0	2.0	0	0.5	0.25
26	$4.0\pi \cos(\pi)$	$2t+0.5t^2$	4.0	–	0.5	0.0	1.5
27	$2.0 \sin(\pi/2)$	$2t^3-t$	–	1.5	0	1.0	3.0
28	$1.5 \sin(\pi/3)$	t^3+t	3.0	1.5	0	1.0	0.5
29	$1.0 \sin(\pi/4)$	$3t^2-t$	2.0	–	0	2.0	6.0
30	$0.8 \cos(\pi/6)$	$0.5t^2+t$	–	1.6	0	3.0	6.0

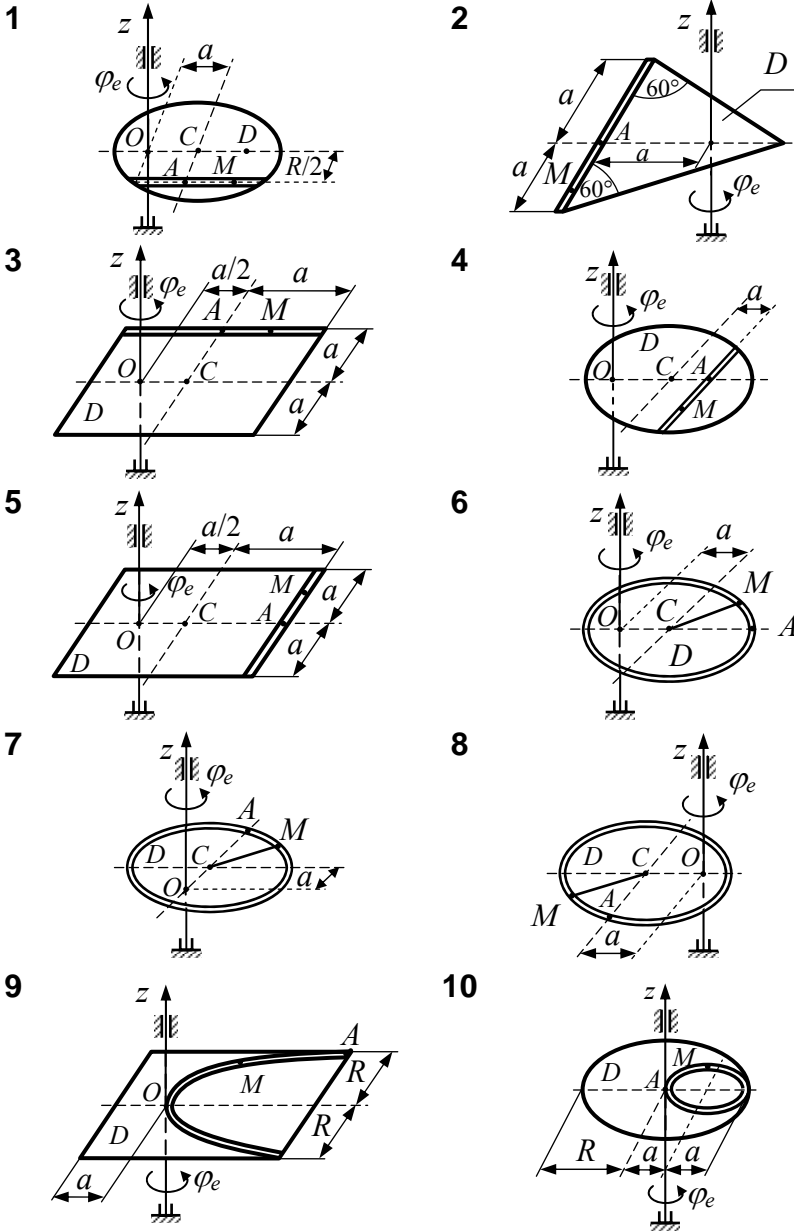
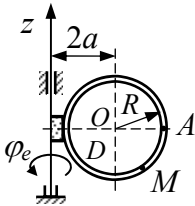
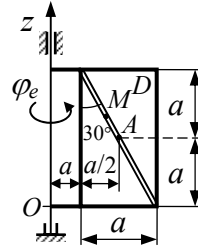


Рисунок 2.18

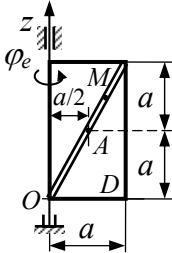
11



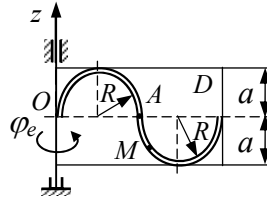
12



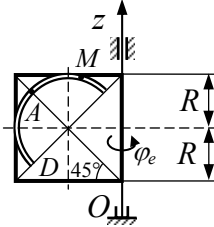
13



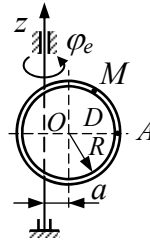
14



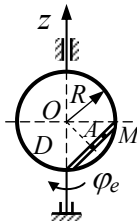
15



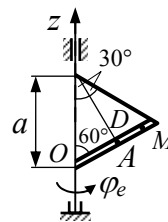
16



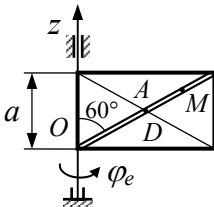
17



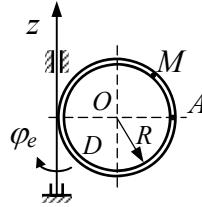
18



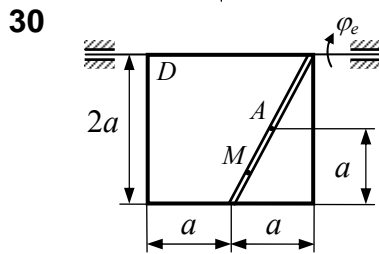
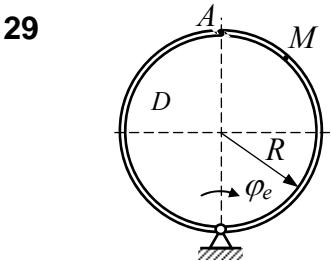
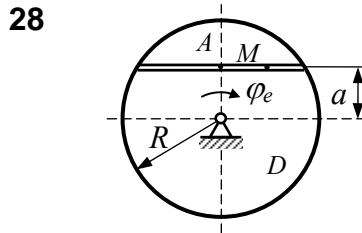
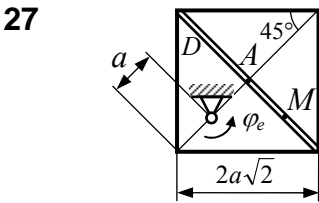
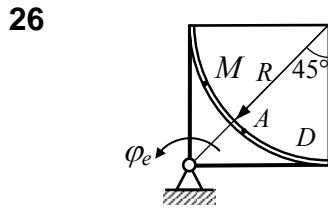
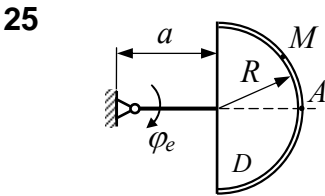
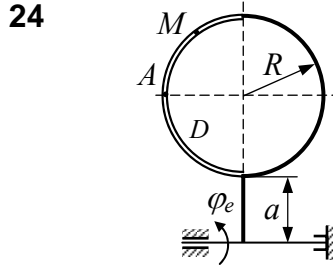
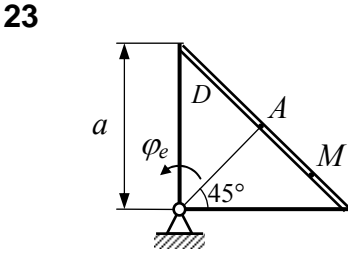
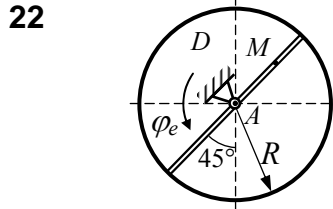
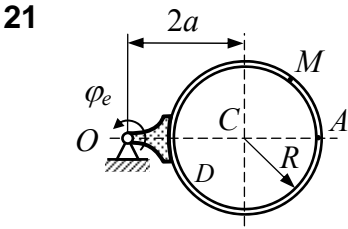
19



20



Продовження рисунка 2.18



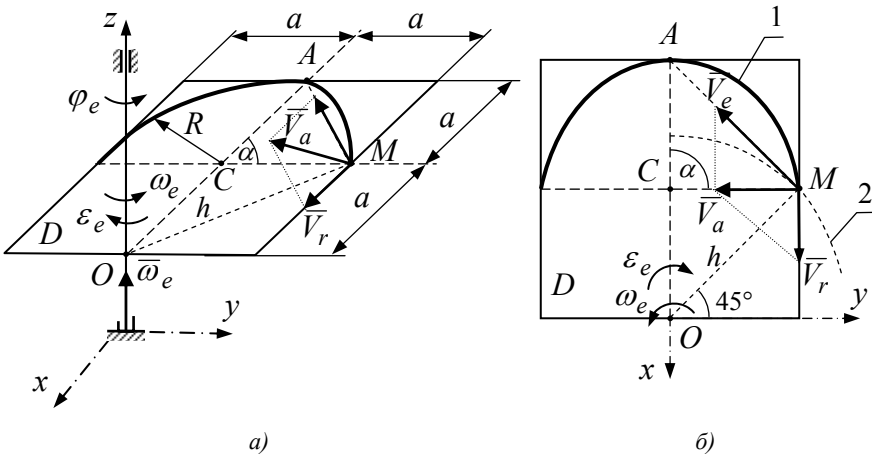
Продовження рисунка 2.18

Приклад 2.6. Приклад виконання завдання К.2.5

Задана горизонтальна пластинка D , яка перпендикулярна до осі Oz (рис. 2.19) і обертається навколо осі Oz згідно з законом $\varphi_e = 4t - t^2$. У пластинці прорізано канавку, вздовж неї рухається точка M , рух якої описується рівнянням

$$AM = S_r(t) = 2.0\pi \sin(\pi/6), \text{ м.}$$

Визначити абсолютні швидкість і пришвидшення точки M для моменту часу $t_1=1.0$ с, якщо $a=2.0$ м, $R=2.0$ м.



1 – відносна траєкторія точки M ; 2 – переносна траєкторія точки M

Рисунок 2.19

Розв'язання.

В прикладі, що розглядається, траєкторія відносного руху точки M відома – це півколо радіусом R (рис. 2.19, б). Положення точки M на траєкторії у відносному русі для моменту часу $t_1=1.0$ с визначається дуговою координатою

$$S_r(1) = S_{1r} = 2.0\pi \sin(\pi/6) = \pi, \text{ м.}$$

Якщо ввести кут α (рис. 2.19, а, б), що визначає положення точки M , то матимемо

$$\alpha = \frac{S_{1r}}{R} = \frac{\pi}{R} = \frac{\pi}{2}.$$

Радіус обертання h точки M у переносному русі ($h=OM$)

$$h = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2} = 2\sqrt{2} = 2.82 \text{ м.}$$

Переносна кутова швидкість і переносне кутове пришвидження тіла D

$$\omega_e = \dot{\varphi}_e = \frac{d}{dt}(4t - t^2) = 4 - 2t \text{ рад/с}; \quad \varepsilon_e = \dot{\omega}_e = \frac{d}{dt}(4 - 2t) = -2 \text{ рад/с}^2.$$

При $t_1=1$ с $\omega_e=2$ рад/с; $\varepsilon_e=-2$ рад/с².

Вектор переносної кутової швидкості лежить на осі переносного обертання Oz і спрямований вверх (рис. 2.19, а).

Абсолютна швидкість точки M

$$\bar{V}_a = \bar{V}_e + \bar{V}_r. \quad (2.19.)$$

Модуль відносної швидкості цієї точки

$$V_r = \dot{S}_r = \frac{d}{dt} \left[2\pi \sin\left(\frac{\pi t}{6}\right) \right] = \frac{\pi^2}{3} \cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) \text{ м/с.} \quad (2.20)$$

При $t_1=1$ с

$$V_r = \frac{\pi^2}{3} \cos\left(\frac{\pi \cdot 1}{6}\right) = 2.82 \text{ м/с.}$$

Спрямований вектор \bar{V}_r по дотичній відносній траєкторії точки (рис. 2.19, б).

Модуль переносної швидкості точки M

$$V_e = \omega_e \cdot h = 2 \cdot 2.82 = 5.64 \text{ м/с.}$$

Вектор \vec{V}_e перпендикулярний до OM і спрямований в бік переносного обертання (рис. 2.19, б).

Модуль абсолютної швидкості точки M

$$\begin{aligned} V_a &= \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2 \cdot V_e \cdot V_r \cdot \cos 135^\circ} = \\ &= \sqrt{2.82^2 + 5.64^2 + 2 \cdot 2.82 \cdot 5.64(-0.707)} = 4.15 \text{ м/с.} \end{aligned}$$

Напрямок вектора \vec{V}_a показано на рис. 2.19, б.

Абсолютне пришвидшення точки M

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau + \vec{a}_c. \quad (2.21)$$

Модулі нормального і тангенціального пришвидшень точки M в переносному русі

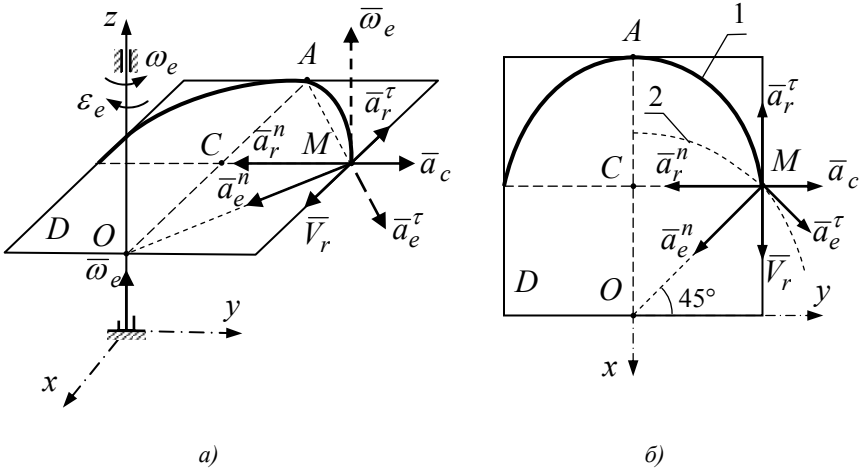
$$a_e^n = \omega_e^2 \cdot h = 2^2 \cdot 2.82 = 11.28 \text{ м/с}^2; \quad a_e^\tau = \varepsilon_e \cdot h = 2 \cdot 2.82 = -5.64 \text{ м/с}^2.$$

Вектор \vec{a}_e^n спрямований по нормалі до переносної траєкторії, \vec{a}_e^τ – по дотичній протилежно вектору \vec{V}_e (рис. 2.20).

Модулі нормального і тангенціального пришвидшень точки M в відносному русі

$$a_r^n = \frac{(V_r)^2}{R} = \frac{(2.82)^2}{2} = 3.98 \text{ м/с}^2;$$

$$a_r^\tau = \dot{V}_r = \ddot{S}_r = \frac{d}{dt} \left[\frac{\pi^2}{3} \cos \left(\frac{\pi t}{6} \right) \right] = -\frac{\pi^3}{18} \sin \left(\frac{\pi t}{6} \right) \text{ м/с}^2.$$



1 – відносна траєкторія точки M ; 2 – переносна траєкторія точки M

Рисунок 2.20

При $t_1=1$ с

$$a_r^\tau = -\frac{\pi^3}{18} \sin\left(\frac{\pi \cdot 1}{6}\right) = -0.86 \text{ м/с}^2.$$

Коріолісове пришвидшення точки M визначається за формулою

$$\bar{a}_c = 2(\bar{\omega}_e \times \bar{V}_r)$$

або за модулем

$$a_c = 2\omega_e V_r \sin\left(\widehat{\bar{\omega}_e, \bar{V}_r}\right) = 2 \cdot 2 \cdot 2.82 \cdot \sin\left(\widehat{\bar{\omega}_e, \bar{V}_r}\right).$$

При $t_1=1$ с $a_c = 2 \cdot 2 \cdot 2.82 \cdot \sin 90^\circ = 11.28 \text{ м/с}^2.$

Кут між векторами $\bar{\omega}_e$ і \bar{V}_r дорівнює 90° (рис. 2.20, а).

Вектор Коріолісового пришвидшення \bar{a}_c перпендикулярний площині, в якій лежать вектори $\bar{\omega}_e$ і \bar{V}_r і спрямований в той бік, звід-

ки суміщення вектора $\overline{\omega}_e$ з вектором \overline{V}_r за найменшим кутом проходить проти ходу годинникової стрілки (рис. 2.20, а).

На рис. 2.20, а, б зображено напрямки складових векторів абсолютного пришвидшення.

До визначення модуля абсолютного пришвидшення точки M споектуємо рівність (2.21) на осі координат x, y, z

$$a_x = a_e^n \sin 45^\circ + a_e^r \sin 45^\circ - a_r^r;$$

$$a_y = -a_e^n \cos 45^\circ + a_e^r \cos 45^\circ - a_r^n + a_c; \quad a_z = 0.$$

При $t_1=1$ с

$$a_x = 11.28 \cdot 0.707 + 5.64 \cdot 0.707 - 0.86 = 11.96 - 0.86 = 11.1 \text{ м/с}^2;$$

$$a_y = -11.28 \cdot 0.707 + 5.64 \cdot 0.707 - 3.98 + 11.28 =$$

$$= -3.08 - 3.98 + 11.28 = 3.32 \text{ м/с}^2;$$

$$a_z = 0.$$

Модуль абсолютного пришвидшення точки M

$$a_a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{11.1^2 + 3.32^2} = \sqrt{134.23} = 11.59 \text{ м/с}^2.$$

$$\text{Відповідь:} \quad V_a = 4.15 \text{ м/с}^2; \quad a_a = 11.59 \text{ м/с}^2.$$

2.6 К.6 Визначення кутових швидкостей ланок планетарного редуктора

Визначити кутові швидкості веденого вала II і сателітів редуктора. Схеми редукторів показано на рисунку 2.21, а необхідні для розрахунків величини наведено в таблиці 2.11.

Примітка. Додатний і від'ємний знаки кутових швидкостей означають відповідно напрямком обертання проти і за годинниковою стрілкою, якщо дивитись з боку ведучого вала I (для редуктора з циліндричними колесами).

У механізмах, наведених на рис. 2.21, зубчасті колеса, осі яких співпадають з основною геометричною віссю механізму, називаються центральними. Колеса, які знаходяться у складному русі (обертання навколо власної осі і обертання з власною віссю навколо центральної осі) називаються сателітами. Важіль H , на якому закріплюється рухома вісь сателіта, називається водилом. Центральне колесо і водило є основними ланками.

Таблиця 2.11

Варіант	Радіус, м				Частота обертання, об/хв.				
	r_1	r_2	r_3	r_4	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
1	0.30	0.30	0.15	0.45	3500	500	–	–	–
2	0.20	0.30	0.20	1.20	100	–300	–	–	–
3	0.35	0.10	0.15	0.40	1200	1800	–	–	–
4	4.10	0.15	0.30	0.20	600	900	–	–	–
5	0.20	0.15	0.10	0.25	2000	500	–	–	–
6	0.10	0.10	0.12	0.54	2000	–	–	–100	–
7	0.42	0.14	0.14	–	810	–	–	–	–
8	0.40	0.10	0.20	0.30	1500	375	–	–	–
9	0.20	0.15	0.25	0.60	3000	–	–	–	300

Продовження таблиці 2.11

Варіант	Радіус, м				Частота обертання, об/хв.				
	r_1	r_2	r_3	r_4	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5
10	0.15	0.07	0.05	0.17	700	–	–	200	–
11	0.20	0.15	0.50	–	1410	–	–	–	–
12	0.20	0.30	0.15	0.35	1200	–	–	–	–
13	0.80	0.15	0.35	0.30	1200	–	–	500	–
14	0.10	0.15	0.10	0.60	1500	870	–	–	–
15	0.15	0.30	0.15	0.60	2400	–	–	–400	400
16	0.20	0.25	0.70	–	3000	–	1800	–	–
17	0.15	0.20	0.25	0.20	2000	–	–	–	–
18	0.90	0.33	0.24	–	1800	1500	–	–	–
19	0.50	0.15	0.10	0.25	500	–300	–	–	–
20	0.60	0.15	0.30	–	1800	1200	–	–	–
21	0.90	0.30	0.20	0.40	570	–	–	–	–
22	0.30	0.80	0.70	0.20	975		–	–	–
23	0.10	0.15	0.40	–	330	1470	210	–	–
24	0.27	0.33	0.33	1.59	870	–	–	–	–
25	0.40	0.10	0.20	0.10	600	–	–	–	–200
26	0.25	0.25	0.15	0.35	600	–	–	300	–
27	0.15	0.12	0.39	–	900	1200	–	–	–
28	0.40	0.20	0.30	0.90	270	630	–	–	–
29	0.50	0.10	0.15	0.55	800	–200	–	–	–
30	0.22	0.49	0.24	0.47	600	900	–	–	–

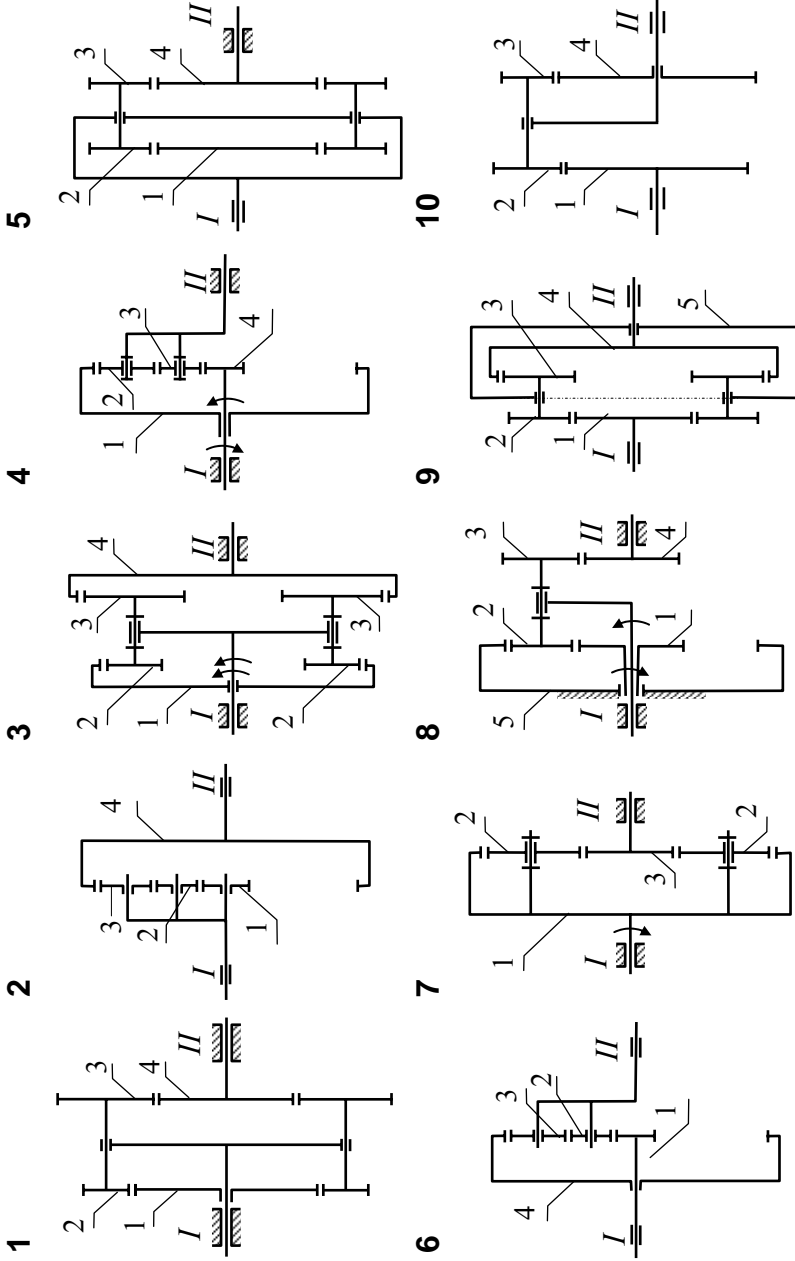
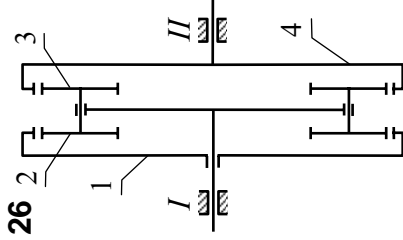
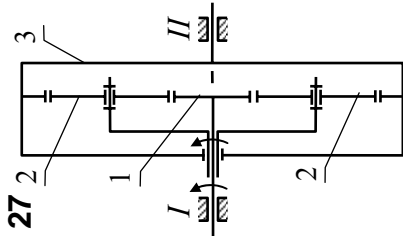
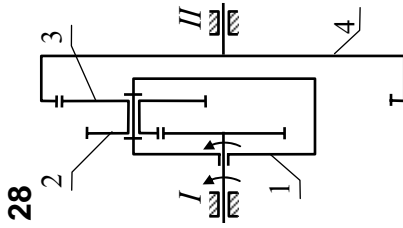
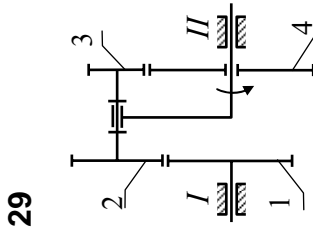
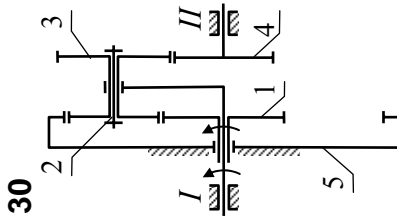
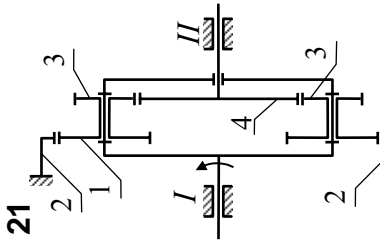
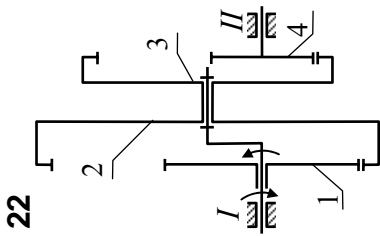
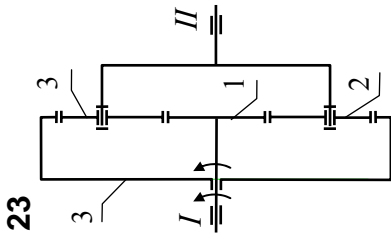
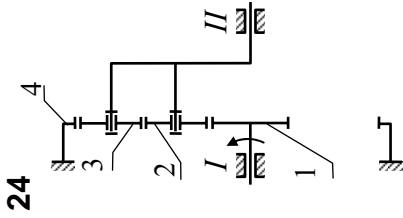
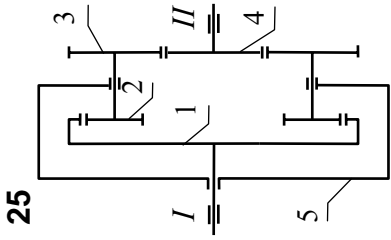


Рисунок 2.21



Продолжения рисунка 2.21

Приклад 2.7. Приклад виконання завдання К.2.6

Задано. Редуктор швидкостей, зображений на рис. 2.22, а, використовується для передачі обертання від ведучого вала *I* до веденого вала *II*, вісь якого збігається з віссю вала *I*. Редуктор має два ведучих елементи: вал *I*, що обертається з частотою обертання $n_I=1200$ об/хв, і центральне колесо 1, яке обертається з частотою обертання $n_1=1800$ об/хв. Ведучі елементи приводять до руху спарені між собою шестерні 2–3 (сателіти), які вільно насаджено на кінцях водила *H*, заклиненого на ведучому валу *I*. Сателіти 2–3 знаходяться в зачепленні з зубчастими колесами 1 і 4.

Радіуси коліс $R_1=0.8$ м, $R_2=0.2$ м, $R_3=0.4$ м, $R_4=0.6$ м.

Визначити кутові швидкості веденого вала *II* і шестерень 2–3.

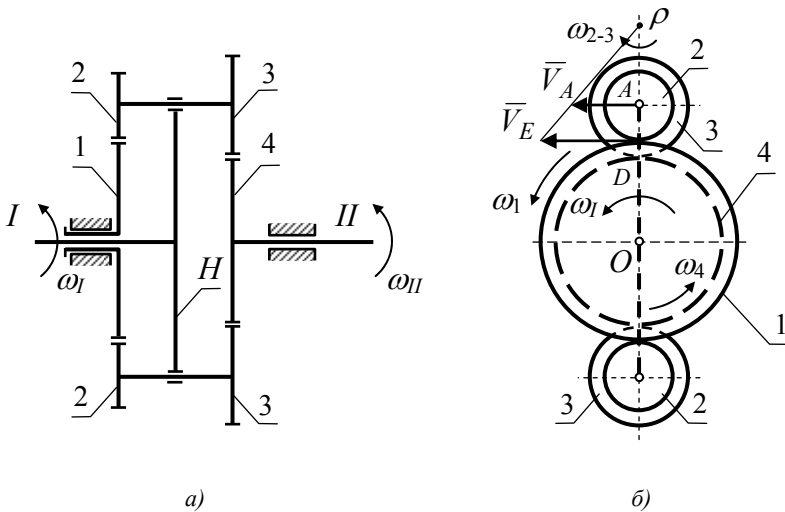


Рисунок 2.22

Розв'язання.

За вихідними даними викреслюємо задану схему механізму (рис. 2.22, а).

Визначення кутових швидкостей ω_{II} і ω_{2-3} з допомогою теорії плоского руху твердого тіла.

Швидкість точки A

$$V_A = \omega_I \cdot OA = \omega_I \cdot (R_1 + R_2) = \frac{2\pi n_I}{60} (R_1 + R_2) = 40\pi \text{ м/с.}$$

Швидкість точки E (точки контакту шестерень 1 і 2)

$$V_E = \omega_1 \cdot R_1 = \frac{2\pi n_1}{60} \cdot R_1 = 48\pi \text{ м/с.}$$

Точка P – миттєвий центр швидкостей сателітів (спарених шестерень 2–3, див. рис. 2.22, б).

Кутова швидкість сателітів 2–3

$$\omega_{2-3} = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_E}{AP + AE},$$

звідси

$$AP = \frac{V_A \cdot AE}{V_E - V_A} = \frac{40\pi \cdot 0.2}{48\pi - 40\pi} = 1 \text{ м}$$

і

$$\omega_{2-3} = \frac{V_A}{AP} = \frac{40\pi}{1} = 40\pi = 125.6 \text{ рад/с.}$$

Швидкість точки D (точки контакту шестерень 3 та 4)

$$V_D = \omega_{2-3}(AP + AD) = \omega_{2-3}(AP + R_3) = 40\pi(1 + 0.4) = 56\pi \text{ м/с.}$$

Кутова швидкість шестерні 4 і веденого вала II

$$\omega_{II} = \omega_4 = \frac{V_D}{R_4} = \frac{56\pi}{0.6} = 293 \text{ рад/с.}$$

Визначення кутових швидкостей ω_{1l} і ω_{2-3} з допомогою способу оберненого руху (метод Віліса).

Задамо всьому механізму обертальний рух навколо осі O , який дорівнює кутовій швидкості водила H , але напрямлений в протилежний бік ($-\omega_H = -\omega_I$). Тоді диференціальний механізм перетворюється в механізм з нерухомими осями $\omega_{nr} = \omega_n - \omega_n = 0$, а кутові швидкості рухомих ланок відносно водила дорівнюють

$$\begin{aligned}\omega_{1r} &= \omega_1 - \omega_n ; & \omega_{2r} &= \omega_2 - \omega_n ; \\ \omega_{3r} &= \omega_3 - \omega_n ; & \omega_{4r} &= \omega_4 - \omega_n ,\end{aligned}\quad (2.22)$$

де $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ – абсолютні кутові швидкості.

Відносно обертання шестерні 2, зовнішньо зачепленої з колесом 1, спрямована протилежно відносному обертанню колеса 1. Шестерня 3, спарена із шестернею 2, здійснює такий самий обертальний рух, як шестерня 2. Колесо 4, яке має із шестернею 3 зовнішнє зачеплення, обертається в протилежний бік шестерні 3.

Модулі кутових швидкостей цих обертань пов'язані між собою співвідношенням

$$\frac{\omega_{1r}}{\omega_{2r}} = \frac{R_2}{R_1} (-1)^k ; \quad \frac{\omega_{3r}}{\omega_{4r}} = \frac{R_4}{R_3} (-1)^k , \quad (2.23)$$

де k – число зовнішніх зачеплень в механізмі.

З врахуванням (2.22) і того, що $\omega_2 = \omega_3 = \omega_{2-3}$, із (2.23) отримаємо

$$\frac{\omega_1 - \omega_I}{\omega_2 - \omega_I} = \frac{R_2}{R_1} (-1)^1 \quad \text{і} \quad \frac{\omega_3 - \omega_I}{\omega_4 - \omega_I} = \frac{R_4}{R_3} (-1)^1$$

або

$$\begin{aligned}\omega_2 &= \omega_1 - (\omega_1 - \omega_I) \cdot \frac{R_1}{R_2} = \frac{\pi}{30} \left[1200 - (1800 - 1200) \cdot \frac{0.8}{0.2} \right] = \\ &= -40\pi = -125.6 \text{ рад/с};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_4 &= \omega_I - (\omega_3 - \omega_I) \cdot \frac{R_3}{R_4} = \frac{\pi}{30} \cdot 1200 - \left(-40\pi - \frac{\pi}{30} \cdot 1200 \right) \cdot \frac{0.4}{0.6} = \\ &= 93.33\pi = 293 \text{ рад/с}.\end{aligned}$$

Якщо треба визначити тільки $\omega_{II} = \omega_4$, то в (2.23) перемноживши ліву та праву сторони рівнянь, враховуючи, що $\omega_{2r} = \omega_{3r}$, отримаємо

$$\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{R_4}{R_3} \cdot (-1)^k = \frac{\omega_{1r} \cdot \omega_{3r}}{\omega_{2r} \cdot \omega_{4r}}.$$

Звідки

$$\omega_{4r} = \omega_{1r} \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2 \cdot R_4} (-1)^k$$

або

$$\begin{aligned}\omega_4 &= \omega_I + (\omega_1 - \omega_I) \cdot \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2 \cdot R_4} (-1)^2 = \\ &= \frac{\pi}{30} 1200 + \left(1800 \frac{\pi}{30} - 1200 \frac{\pi}{30} \right) \cdot \frac{0.8 \cdot 0.4}{0.2 \cdot 0.6} = \\ &= 40\pi + 20\pi \frac{0.32}{0.12} = 93.33\pi = 293 \text{ рад/с}.\end{aligned}$$

Відповідь: $\omega_{II} = \omega_4 = 293 \text{ рад/с}$, $\omega_2 = \omega_3 = \omega_{2-3} = -125.6 \text{ рад/с}$.

ЛІТЕРАТУРА

1. Бутенин Н.В. Курс теоретической механики: В 2-х Т. : Учеб. пособие для студ. вузов /Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – СПб.: Лань, 2002. – 736с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).
2. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. [В 2-х ч. Для гос. ун-тов]. Перераб. и с доп. С.М. Тарга. Ч. 1-2. – М., «Наука», 1972. – 467с.
3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики [текст]: учеб. /С.М. Тарг; 13-е изд. Стереотип. – М. Высш. шк., 2001. – 416 с.
4. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике: учеб. пособие для вузов. /Под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – 38-е изд. Стереотип. – СПб.: Лань, 2001. – 448 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература).
5. Яблонский А.А., ред. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учебное пособие для вузов. – 7-е изд. испр. – М.: Интеграл-Пресс, 2002. – 384 с.
6. Яскілко М.Б. Збірник задач для розрахунково-графічних робіт з теоретичної механіки. – К.: Вища школа, 1999. – 362 с.
7. Бать М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах: [Учеб. пособие для вузов] /М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. – 9-е изд., перераб. – М.: Наука, 1990. – Том 1: Статика и кинематика. – 1990. – 670 с.
8. Методические указания и контрольные работы по курсу «Проблемы и методы решения инженерных задач». Часть I. – Запорожье: ЗГТУ, 1996. – 44 с.
9. Методичні вказівки до виконання самостійної роботи з курсу „Теоретична механіка. Статика” для студентів механічних спеціальностей денної та заочної форм навчання /Укл.: П.К. Штанько, С.Г. Саксонов, І.І. Кузьменко, О.Д. Лутова, Л.Ф. Дзюба. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2009. – 54 с.

10. Конспект лекцій з дисципліни „Теоретична механіка. Кінематика” /Штанько П.К., Павлюк Н.Ф., Саксонов С.Г. – Запоріжжя ЗДТУ, 1998. – 61 с.
11. Тексти (конспект) лекцій з дисципліни „Теоретична механіка” для студентів спеціальностей напрямку 0902 „Інженерна механіка” /Укл.: П.К. Штанько, С.Г. Саксонов, І.В. Куляба, О.Д. Лутова. – Запоріжжя: ЗНТУ, 2003. – 325 с.
12. ДСТУ 3008-95. Документація. Звіти у сфері науки і техніки. – /Держстандарт України. – Київ.

Додаток А

Перелік питань до модульного контролю

1. Кінематика (визначення). Задача кінематики.
2. Способи задавання руху точки.
3. Швидкість та пришвидшення точки при векторному способі задавання руху.
4. Швидкість та пришвидшення точки при координатному способі задавання руху.
5. Швидкість та пришвидшення точки при природньому способі задавання руху.
6. Рівномірний і рівнозмінний рухи точки.
7. Поступальний рух твердого тіла. Теорема про поступальний рух тіла.
8. Обертальний рух тіла навколо нерухомої осі. Закон обертання тіла.
9. Кутова швидкість і кутове пришвидшення тіла.
10. Кутова швидкість і кутове пришвидшення як вектори.
11. Рівномірне і рівнозмінне обертання тіла.
12. Зв'язок між n (об/хв) та ω (рад/с).
13. Швидкості та пришвидшення точок тіла в обертальному русі.
14. Векторні формули для швидкостей та пришвидшень точок тіла.
15. Передавальні механізми. Розрахунок кутових швидкостей.
16. Складний рух точки. Переносна, відносна і абсолютна швидкості і пришвидшення точки.
17. Теорема про визначення швидкостей в складному русі.
18. Формули для похідних від одиничних векторів рухомої системи координат (формули Пуассона).

19. Теорема про пришвидшення точки в складному русі (теорема Коріоліса).
20. Складання пришвидшень при поступальному переносному русі точки.
21. Пришвидшення Коріоліса (вектор і модуль).
22. Напрямок вектора пришвидшення Коріоліса (за правилом векторного добутку двох векторів).
23. Напрямок вектора пришвидшення Коріоліса (за правилом Жуковського).
24. Коли пришвидшення Коріоліса дорівнює нулю?
25. Плоский рух тіла. Визначення. Рівняння руху плоскої фігури.
26. Розкладання плоского руху.
27. Як змінюються складові частини переміщення плоскої фігури при зміні полюса?
28. Теорема про швидкості точок плоскої фігури.
29. Теорема про пришвидшення точок плоскої фігури.
30. Теорема про проекції швидкостей двох точок тіла.
31. Миттєвий центр швидкостей (МЦШ). Визначення швидкостей точок за допомогою МЦШ.
32. Як знайти положення миттєвого центра швидкостей?
33. Окремі випадки визначення положення миттєвого центра швидкостей.
34. Визначення швидкостей точок механізму за допомогою плану швидкостей.
35. Сферичний рух твердого тіла. Визначення. Кути Ейлера. Закон сферичного руху тіла.
36. Швидкості точок тіла при сферичному русі.
37. Пришвидшення точок тіла при сферичному русі.
38. Додавання поступальних рухів твердого тіла.

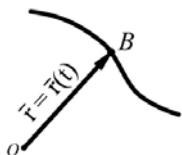
39. Додавання обертальних рухів твердого тіла навколо осей, що перетинаються.
40. Додавання двох обертальних рухів тіла навколо паралельних осей (обертання в один бік, в протилежні боки, пара обертань).
41. Розрахунок планетарних і диференціальних механізмів. Формула Вілліса.

Додаток Б

КІНЕМАТИКА ТОЧКИ

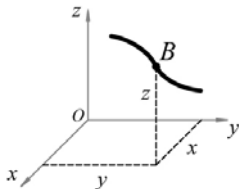
Способи задання руху точки

Векторний спосіб



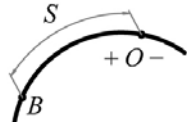
$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Координатний спосіб



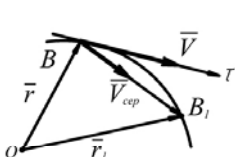
$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t);$$

Натуральний спосіб

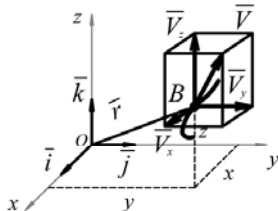


$$S = f(t)$$

Швидкість руху точки

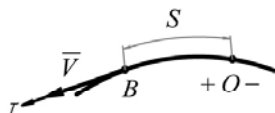


$$\vec{V} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



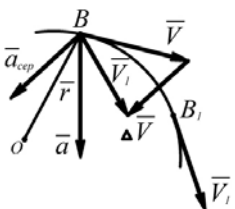
$$V_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt}; \quad V_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt};$$

$$V_z = \dot{z} = \frac{dz}{dt}; \quad V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

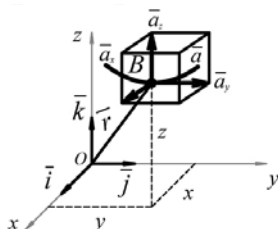


$$V = \frac{ds}{dt} = \dot{S}$$

Пришвидження точки



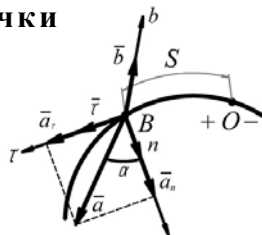
$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$



$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k};$$

$$a_x = \ddot{x}; \quad a_y = \ddot{y}; \quad a_z = \ddot{z} = \frac{dz}{dt};$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$



$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n; \quad a_\tau = \dot{V} = \frac{dV}{dt} = \dot{S};$$

$$\vec{a} = \vec{\tau} a_\tau + \vec{n} a_n; \quad a_n = \frac{V^2}{\rho};$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

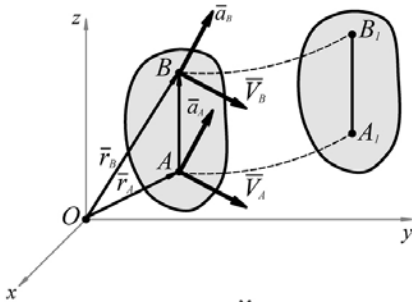
Додаток В

КІНЕМАТИКА ТВЕРДОГО ТІЛА

ПОСТУПАЛЬНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

1. Поступальний рухом твердого тіла називається такий його рух, при якому будь-яка пряма, проведена в тілі, залишається паралельною своєму початковому положенню під час всього руху.

Закон руху, швидкості і пришвидшення точок тіла.

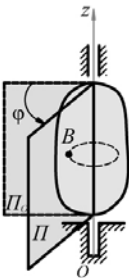


$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{AB}; \quad \vec{AB} = \text{const};$$

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B; \quad \vec{a}_A = \vec{a}_B$$

Теорема. При поступальному русі твердого тіла траєкторії, швидкості і пришвидшення всіх точок тіла однакові.

ОБЕРТАЛЬНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА НАВКОЛО НЕРУХОМОЇ ОСІ



1. Обертальним рухом твердого тіла навколо нерухомої осі називають такий його рух, при якому існує пряма, жорстко скріплена з тілом, яка залишається нерухомою на протязі всього руху тіла.

2. Рівняння обертального руху, кутова швидкість і кутове пришвидшення тіла

$$\varphi = f(t); \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}; \quad \varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}.$$

3. Вектор і модуль швидкості точки тіла в обертальному русі

$$\vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r}; \quad V = \omega R$$

4. Пришвидження точки тіла в обертальному русі

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n; \quad \vec{a} = a_\tau \vec{\tau} + a_n \vec{n};$$

4.1. Тангенціальне і обертальне пришвидшення точки

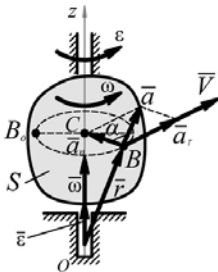
$$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}; \quad a_\tau = \varepsilon R$$

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{V}; \quad a_n = \omega^2 R$$

4.2. Модуль і напрям пришвидшення точки

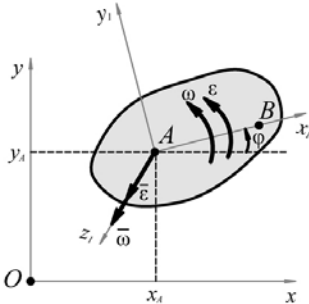
$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|\varepsilon|}{\omega}$$



Додаток Г

ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

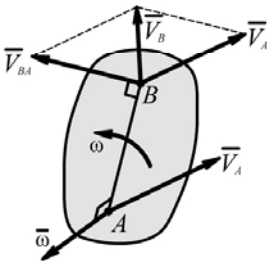


1. Плоскопаралельним (плоским) - називають такий рух твердого тіла, при якому всі точки тіла рухаються в площинах, паралельних одній (основній) нерухомій площині.

Рівняння (закон) плоского руху тіла:

$$x_A = x_A(t); \quad y_A = y_A(t); \quad \varphi = \varphi(t).$$

ШВИДКІСТЬ ТОЧОК ТВЕРДОГО ТІЛА ПРИ ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНОМУ РУСІ



1. Теорема про швидкості точок плоскої фігури.

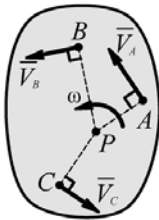
Швидкість \vec{v}_B будь-якої точки B плоскої фігури дорівнює геометричній сумі швидкості \vec{v}_A полюса A і швидкості \vec{v}_{BA} , яку точка B отримує внаслідок обертання фігури навколо полюса A:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}; \quad [\vec{v}_{BA} = \vec{\omega} \times \vec{AB}; \quad \vec{v}_B \perp AB]$$

2. Теорема про проєкції точок плоскої фігури.

Проекції швидкостей точок плоскої фігури на вісь, яка проходить через ці точки, однакові:

$$np_x \vec{v}_A = np_x \vec{v}_B$$



3. Визначення швидкості точки за допомогою миттєвого центра швидкостей (МЦШ).

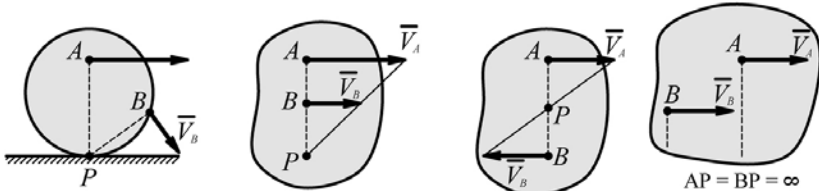
МЦШ - точка P при плоскому русі, швидкість якої в даний момент часу дорівнює нулеві: $v_P = 0$.

Швидкість будь-якої точки плоскої фігури є обертальною швидкістю цієї точки навколо МЦШ:

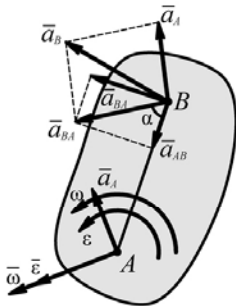
$$\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{PB}; \quad v_B = \omega \cdot PB; \quad v_A = \omega \cdot PA;$$

ПЛОСКОПАРАЛЕЛЬНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

4. Окремі випадки визначення МЦШ.



ПРИШВИДЖЕННЯ ТОЧКИ ПРИ ПЛОСКОМУ РУСІ



1. Теорема про пришвидження точок плоскої системи.

Прискорення будь-якої точки В плоскої фігури дорівнює векторній сумі пришвидження полюса А і прискорення \vec{a}_{BA} , якого набуває точка В при обертанні фігури навколо полюса А:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} \quad \text{або} \quad \vec{a}_B = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^\tau + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau;$$

$$\vec{a}_{BA}^\tau = \epsilon \cdot AB; \quad \vec{a}_{BA}^n = \omega^2 \cdot AB.$$

2. Визначення пришвидження за допомогою МЦП.

Миттєвий центр пришвидження (МЦП) - це точка Q, пришвидження якої в даний момент часу дорівнює нулеві: $\vec{a}_Q = 0$.

Якщо відомо \vec{a}_A , ω і ϵ , то МЦП знаходиться на промені,

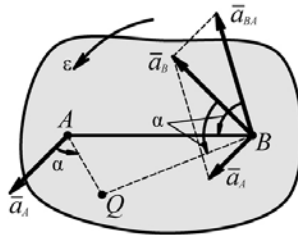
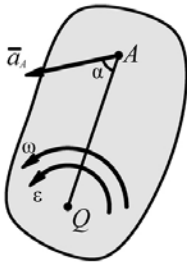
проведеному з точки А

під кутом $\alpha = \text{arctg} \frac{|\epsilon|}{\omega^2}$,

який відкладено від вектора \vec{a}_A в напрямку ϵ на віддалі

$$AQ = a_A / \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4};$$

$$a_B = BQ \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4}$$



Додаток Д

СКЛАДНИЙ РУХ ТОЧКИ

1. **Складний рух точки** - це рух точки відносно декількох систем відліку, одна з яких вважається умовно нерухомою.



2. **Відносний рух точки В** - це її рух відносно рухомої системи відліку $A_{...}$. Рівняння відносного руху точки:

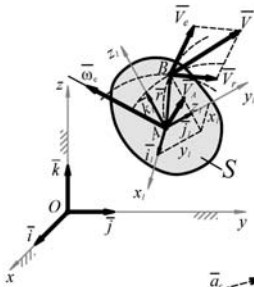
$$x_1 = x_1(t), \quad y_1 = y_1(t), \quad z_1 = z_1(t).$$

3. **Переносний рух точки В** - це рух точки разом з тілом S відносно нерухомої системи відліку O_{xyz} .

4. **Абсолютний рух точки В** - це рух точки відносно нерухомої системи відліку O_{xyz} . Рівняння абсолютного руху точки:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

ШВИДКІСТЬ І ПРИШВИДШЕННЯ ТОЧКИ У СКЛАДНОМУ РУСІ



Теорема. Абсолютна швидкість \vec{V} точки В у складному русі дорівнює векторній сумі її відносної \vec{V}_r і переносної \vec{V}_e швидкостей.

$$\vec{V} = \vec{V}_r + \vec{V}_e$$

Модуль абсолютної швидкості:

$$V = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2V_r V_e \cos(\widehat{V_r V_e})}$$

Теорема Кориоліса.

Абсолютне пришвидшення а точки В у складному русі дорівнює векторній сумі переносного \vec{a}_e , відносного \vec{a}_r і кориолісового \vec{a}_c пришвидшень:

$$\vec{a} = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

$$\text{або } \vec{a} = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^t + \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^t + \vec{a}_c$$

Модуль абсолютного пришвидшення:

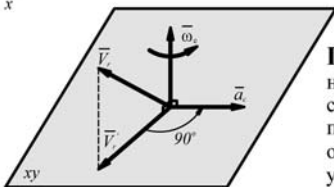
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Вектор і модуль пришвидшення Кориоліса

$$\vec{a}_c = 2(\vec{\omega}_c \times \vec{V}_r); \quad a_c = 2V_r \omega_c \sin(\widehat{\vec{\omega}_c \vec{V}_r})$$

$$a_c = 0: \text{ а) } \omega_c = 0; \text{ б) } \vec{V}_r \parallel \vec{\omega}_c; \text{ в) } V_r = 0.$$

Правило Жуковського. Для визначення напрямку кориолісового пришвидшення необхідно спроектувати вектор відносної швидкості \vec{V}_r на площину xy , перпендикулярну до осі переносного обертання (до вектора $\vec{\omega}_c$), і повернути цю проекцію \vec{V}_r у площині xy на кут 90° у бік переносного обертання.



Додаток Е

Титульний лист завдання

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
Запорізький національний технічний університет

Кафедра Механіки

**РОЗРАХУНКОВО-ГРАФІЧНІ ЗАВДАННЯ
З ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ**

Виконав студент групи:

Прийняв:

Штанько П. К.

м. Запоріжжя

20 р.