МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЗАПОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до комп'ютерної лабораторної роботи
"Дослідження руху точки"
з курсу „Теоретична механіка" для
студентів всіх спеціальностей

2004

Методичні вказівки до комп'ютерної лабораторної роботи ”Дослідження руху точки” з курсу „Теоретична механіка” для студентів всіх спеціальностей /Укл: П.К. Штанько, М.В. Сидоренко.- Запоріжжя: ЗНТУ, 2004.- 14 с.

Укладачі: П.К. Штанько, доцент, к.т.н.,
М.В. Сидоренко, асистент.

Рецензенти: С.Г. Саксонов, доцент, к. ф.-м. н.,
А.О.Будник, доцент, к.т.н.

Відповідальний
за випуск: В.Г. Шевченко, зав. кафедри, доцент, к.т.н.

Затверджено
на засіданні кафедри
„Механіка”
Протокол № 8
від 29.06.2004 р.

ЗМІСТ

1 МЕТА ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

Мета проведення лабораторної роботи - визначення траєкторії, швидкості та прискорення точки за рівняннями, що описують її рух.

2 ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ

Рух точки в кінематиці можна описати трьома способами: векторним, координатним та натуральним.

При *векторному* способі завдання руху точки М її положення визначається радіусом-вектором, один кінець якого починається в нерухомому центрі, а інший визначає положення точки, причому цей вектор є векторною функцією часу, тобто

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \tag{2.1}$$

Лінія, яку описує під час руху рухомий кінець вектора в просторі (годограф радіуса-вектора $\vec{r}(t)$), називається *траєкторією точки*.

Рухи за траєкторіями поділяються на *прямолінійні* (траєкторія руху – пряма лінія) і *криволінійні* (траєкторія руху – крива лінія).
Рівняння (2.1) є векторним рівнянням траєкторії.

Координатний спосіб завдання руху точки М полягає в тому, що її положення визначається у вибраній системі координат трьома координатами, які змінюються залежно від часу t, а саме:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t).$$

При відсутності однієї з координат рухома точка описує траєкторію, розміщену в одній із площин.

При *натуральному* способі завдання руху точки вважається, що траєкторію точки М відомо, а тому на цій траєкторії визначаються точка (початок руху) і додатній напрямок відліку дугової координати, що встановлює положення рухомої точки на траєкторії, тобто

$$s = s(t).$$

Якщо початок Декартової системи координат збігається з початком радіуса-вектора $\vec{r}(t)$, то

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Це рівняння встановлює зв'язок між векторним та координатним способами завдання руху точки. При векторному способі швидкість руху точки

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}},$$

а прискорення

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}.$$

Якщо рух точки задано координатним способом, то модуль швидкості

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2},$$

причому проекції вектора швидкості на відповідні координатні осі

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}.$$

Модуль прискорення при координатному способі завдання руху точки

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2},$$

де проекції вектора прискорення на осі координат

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \ddot{x}; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \ddot{y}; \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \ddot{z}.$$

Напрямні косинуси векторів швидкості та прискорення визначаються виразами

$$\cos(\vec{v},\vec{i}) = {v_x}/{v}; \quad \cos(\vec{v},\vec{j}) = {v_y}/{v}; \quad \cos(\vec{v},\vec{k}) = {v_z}/{v};$$

$$\cos(\vec{a},\vec{i}) = {a_x}/{a}; \quad \cos(\vec{a},\vec{j}) = {a_y}/{a}; \quad \cos(\vec{a},\vec{k}) = {a_z}/{a}.$$

При натуральному способі завдання руху модуль швидкості

$$v = \left|\frac{ds}{dt}\right|,$$

причому вектор швидкості спрямований вздовж дотичної до траєкторії.

Модуль прискорення визначається його проекціями на натуральні осі (дотичну, нормаль і бінормаль):

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}; \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}; \quad a_b = 0,$$

де ρ – радіус кривини траєкторії в даній точці.

Модуль повного прискорення і його напрямок визначають за формулами

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2};$$

Закон руху точки по траєкторії

$$s = \int_0^t \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dt = \int_0^t v\ dt.$$

3 ЗАВДАННЯ НА ПРОВЕДЕННЯ ЛАБОРАТОРНОЇ РОБОТИ

1) За заданими рівняннями руху точки М установити вид її траєкторії, побудувати траєкторію і вказати положення точки на траєкторії для часу t_i, с (i = 1,2,3).

2) Визначити вектори швидкості, дотичне, нормальне та повне прискорення точки, радіус кривини траєкторії, а також закон руху точки. Побудувати ці вектори на траєкторії для точки в заданий момент часу.

3) Побудувати графіки швидкості, дотичного, нормального та повного прискорення, та графік руху точки.

Необхідні для розрахунку величини наведено в таблицях 3.1 і 3.2.

Таблиця 3.1 – Розрахункові величини

Варі-ант	Рівняння руху точки		Час, с		
	$x=f(t)$, м	$y=f(t)$, м	t_1	t_2	t_3
1	$2\cos(t)$	$4\cos^2(t/2)$	$\pi/6$	0	$\pi/2$
2	$2t$	$2-(1-2t)^2$	0	1	0,5
3	$6\sin(\pi t/4)+2$	$3-3\cos(\pi t/4)$	0	2	4
4	$-2t^2+3$	$-5t$	0	0,5	1
5	$4\cos^2(\pi t/3)+2$	$4\sin^2(\pi t/3)$	1	0	0,5
6	$1+6\sin(\pi t/6)$	$4\cos(\pi t/6)-2$	0	3	6
7	$3-2\cos(\pi t/4)$	$2\sin(\pi t/4)-1$	0	4	2
8	$3t$	$6t-5t^2$	1	2	3
9	$20\cos(3\pi t/2)$	$20\sin(3\pi t/2)$	0	1	0,5
10	$-\cos(\pi t^2/3)+3$	$\sin(\pi t^2/3)-1$	1	0	0,5
11	$4t+4$	$-4/(t+1)$	1	2	0
12	$5-2\cos(\pi t/3)$	$3\sin(\pi t/3)-2$	1,5	3	4,5
13	$10\cos(3t)$	$3+3t$	0	$\pi/3$	$\pi/6$
14	$4\cos(2\pi t)$	$-4\sin(\pi t)$	0	1	0,5
15	$3(1+t^2)$	$3/(1+t^2)$	1	0	0,5
16	$5\sin(\pi t^2/4)+3$	$2-5\cos(\pi t^2/4)$	1	$\sqrt{2}$	2
17	$t+2$	$2\cos(2t)$	0	π	$\pi/2$
18	$12\cos(3t)$	$-2\sin(6t)$	0	$\pi/4$	$\pi/2$
19	$3-8\sin(\pi t/6)$	$-6\cos(\pi t/6)$	0	3	1,5
20	$2-3t-6t^2$	$3-3t/2-3t^2$	0	1	2
21	$\cos^3(t)$	$\cos(t)$	0	$\pi/4$	$\pi/6$
22	$5e^{2t}$	$5e^{-2t}$	0	0,5	0,3
23	$3t$	$4t^2-1$	0	0,5	1
24	$\cos(\pi t^2)$	$2\sin(\pi t^2)-1$	0	1	2
25	$2\cos(\pi t^2)$	$\cos(2\pi t^2)$	0	1	$\sqrt{3}/2$
26	$3-t^2$	t^2+1	1	2	3
27	$2\cos(6t)$	$12\sin(3t)$	0	$\pi/4$	$\pi/6$
28	$5ch(2t)$	$5sh(2t)$	0	0,5	1
29	$1+3\cos(\pi t^2/3)$	$3\sin(\pi t^2/3)+3$	0	1	$\sqrt{3}$
30	$20\cos^2(\pi t)$	$20\sin(\pi t)-10$	1/4	1/3	1

Таблиця 3.2 – Розрахункові величини

Ва-рі-ант	Рівняння руху точки		Час, с		
	x=f1(t), м	y=f2(t), м	t_1	t_2	t_3
1	$2\cos^2(\pi t/3)$	$-2\sin^2(\pi t/3)-4$	0	1	0,5
2	$-2t^2+4$	$-2t$	0	1	1,5
3	$\cos(\pi t^2/3)-2$	$\sin(\pi t^2/3)+3$	0	1	2
4	$6\cos(3t)$	$-2\sin(6t)$	$\pi/4$	0	$\pi/6$
5	$t+3$	$(t+3)^3$	0	0,3	0,5
6	$2\sin(\pi t/3)$	$-3\cos(\pi t/3)+4$	0,5	1	3
7	$3t^2+2$	$-4t$	0	0,5	1
8	$½(e^{4t}+e^{-4t})$	$½(e^{4t}-e^{-4t})$	0	1/4	0,5
9	$5\cos^2(\pi t/4)$	$2\sin(\pi t/4)$	1	2	3
10	$3\cos(\pi t^2)-1$	$1+3\sin(\pi t^2)$	0	$\sqrt{0,5}$	1
11	$5\sin(\pi t^2/6)-2$	$3+5\cos(\pi t^2/6)$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
12	$3/(t+2)$	$3t+6$	1	0,5	2
13	$3\cos(\pi t/3)-2$	$10\sin(\pi t/6)$	0	1	1,5
14	$4t$	$(2t+5)^{-1}$	0	0,5	1
15	$5-4\cos(\pi t/3)$	$-4+\sin(\pi t/3)$	0	1	0,5
16	$5-4\cos^2(\pi t/3)$	$-4+3\sin^2(\pi t/3)$	0	0,5	1
17	$2t$	$4e^{-2t}$	0	0,5	1
18	$8\cos(\pi t/6)-3$	$16\sin^2(\pi t/6)$	1	2	3
19	$-4t^2+1$	$-3t$	0	0,5	1
20	$6\cos(\pi t/4)-4$	$-9\sin(\pi t/4)+4$	1	2	3
21	$-2t-2$	$-2/(t+1)$	0	1	2
22	$4\cos(\pi t/3)$	$-3\sin(\pi t/3)$	0	1	2
23	$3t$	$4t^2+1$	0	0,5	1
24	$1/2\sin(2t)$	$\cos^2(t)$	0	$\pi/4$	$\pi/2$
25	$3/2(e^t+e^{-t})$	$3/2(e^t-e^{-t})$	0	1	2
26	$4t$	$16t^2-1$	1/4	0,5	1
27	$7\sin^2(\pi t/6)-5$	$7\cos^2(\pi t/6)$	0	0,5	1
28	$-5t^2-4$	$3t$	0	1	0,5
29	$-10\cos(\pi t/3)$	$3\sin(\pi t/3)$	1	0,5	1,5
30	$5t$	$-7t^2+3$	0	1	0,5

4 ПРИКЛАД ВИКОНАННЯ ЛАБОРАТОРНОЇ РАБОТИ

Введіть рівняння руху точки в командну строку (гіперболічний синус та косинус позначають літерою h після назви функції). Введіть t_1; якщо це ціле число, то поставте після нього точку. Після цього натисніть кнопку „Три знаки оклику” [!!!] у контекстній панелі, що розташована над цим коментарем. Проглядайте рішення, пересовуючи повзун у правій частині екрану. Необхідна Вам інформація надрукована синьою та чорною фарбою.

4.1 Визначення швидкості та прискорення точки

```
> restart;x:= -2*cos(t)+3; y:= t; t1:=.5; #КОМАНДНА СТРОКА
```

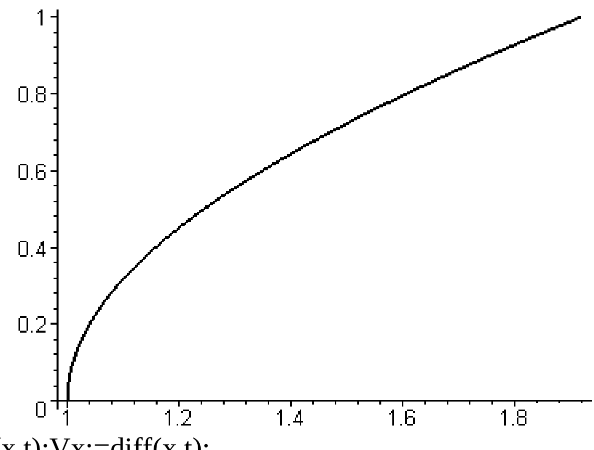
$$x := -2\cos(t) + 3$$

$$y := t$$

$$t1 := .5$$

```
plot([x,y,t=0..2*t1],thickness=2,color=blue,title="Траєкторія точки",titlefont=[TIMES, BOLD,14]);
```

Траєкторія точки




```
> Vx:=Diff(x,t);Vx:=diff(x,t);
> Vy:=Diff(y,t);Vy:=diff(y,t);
> V:=sqrt(Vx^2+Vy^2);
```

Проекції швидкості на координатні осі та модуль швидкості:

$$Vx := \frac{\partial}{\partial t}(-2\cos(t) + 3)$$

$$Vx := 2\sin(t)$$

$$Vy := \frac{\partial}{\partial t}t$$

$$Vy := 1$$

$$V := \sqrt{4\sin(t)^2 + 1}$$

```
> Ax:=Diff(Vx,t);Ax:=diff(Vx,t);
> Ay:=Diff(Vy,t);Ay:=diff(Vy,t);
> A:=sqrt(Ax^2+Ay^2);
```

Проекції прискорення на координатні осі та модуль прискорення:

$$Ax := \frac{\partial}{\partial t}(2\sin(t))$$

$$Ax := 2\cos(t)$$

$$Ay := \frac{\partial}{\partial t}1$$

$$Ay := 0$$

$$A := 2\sqrt{\cos(t)^2}$$

```
>At:=Diff(V,t);At:=abs(diff(V,t));An:=sqrt(A^2 -At^2);
```

Модуль тангенційного та нормальне прискорення:

$$At := \frac{\partial}{\partial t}\sqrt{4\sin(t)^2 + 1}$$

$$At := 4\left|\frac{\sin(t)\cos(t)}{\sqrt{4\sin(t)^2 + 1}}\right|$$

$$An := 2\sqrt{\cos(t)^2 - 4\left|\frac{\sin(t)\cos(t)}{\sqrt{4\sin(t)^2+1}}\right|^2}$$

> r:=V^2/An;

Аналітичний вираз радіуса кривини траєкторії руху точки:

$$r := \frac{1}{2}\frac{4\sin(t)^2+1}{\sqrt{\cos(t)^2 - 4\left|\frac{\sin(t)\cos(t)}{\sqrt{4\sin(t)^2+1}}\right|^2}}$$

>s:=Int(V,t=0..t);si:=int(V,t);sr:=convert(series(si,t,7),polynom);

Аналітичний вираз закону руху точки по траєкторії визначається за формулою:

$$s := \int_0^t \sqrt{4\sin(t)^2+1}\, dt$$

Для даного прикладу закон руху має вигляд:

$$si := \frac{\sqrt{-(4\sin(t)^2+1)(-1+\sin(t)^2)}\sqrt{1-\sin(t)^2}\,\mathrm{EllipticE}(\sin(t), 2I)}{\sqrt{-4\sin(t)^4+3\sin(t)^2+1}\,\cos(t)}$$

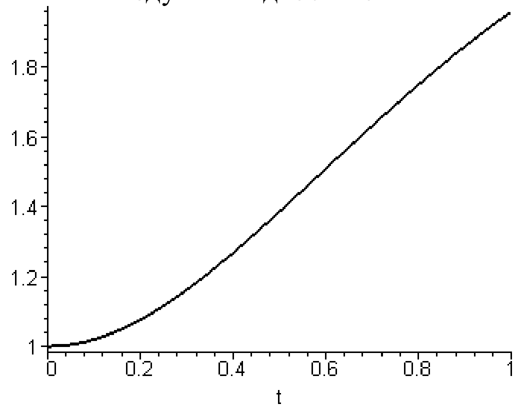
Закон руху в цьому випадку можливо представити у вигляді ряду:

$$sr := t + \frac{2}{3}t^3 - \frac{8}{15}t^5$$

4.2 Побудова графіків

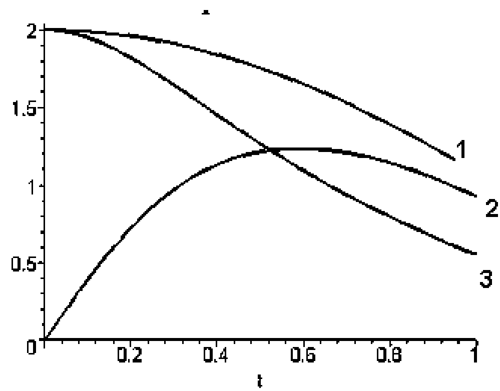
plot(V,t=0..2*t1,thickness=2,color=blue,title=" Модуль швидкості точки",titlefont=[TIMES,BOLD,14]);

Модуль швидкості точки



>plot([A,At,An],t=0..2*t1,thickness=2,color=[blue,red,black],title=" Прискорення точки",titlefont=[TIMES,BOLD,14]);

Прискорення точки



1- модуль повного прискорення,

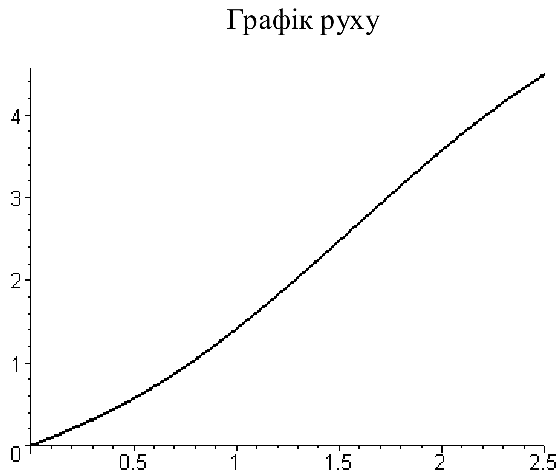
2- модуль тангенційного прискорення,

3-нормальне прискорення.

```
> w:=proc(z)
> evalf(int(V,t=0..z))
> end;
```

$$w := \textbf{proc}\ (z)\ \text{evalf}(\,\text{int}(\,V,\ t = 0\ ..\ z\,)\,)\ \textbf{end proc}$$

```
>plot(w,0..2*t1,thickness=2,color=blue,title="Графік
руху",titlefont=[TIMES,BOLD,14]);
```



4.3 Визначення швидкості та прискорення точки в заданий момент часу

```
>s1:=evalf(int(V,t=0..t1),3);t:=t1;x1:=evalf(x,3);y1:=evalf(y,3);Vx1:=evalf
(Vx,3);Vy1:=evalf(Vy,3);Ax1:=evalf(Ax,3);Ay1:=evalf(Ay,3);A1:=evalf(
A,3);At1:=evalf(At,3);An1:=evalf(An,3);r1:=evalf(r,3);
```

Результати обчислень наведено в таблиці 4.1

Таблиця 4.1 - Результати обчислень

t	s_1	x_1	y_1	v_x	v_y	v	a_{x1}	a_{y1}	a_1	$a_{\tau1}$	a_{n1}	r_1
с	м			м/с			м/с^2					м
0.5	**0.571**	**0.24**	**0.5**	**0.958**	**1.0**	**0.38**	**1.76**	**0**	**1.76**	**1.21**	**1.27**	**1.5**

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1.Тарг С.М. Краткий курс теретической механики.- М.: Высшая школа, 1966.-416 с.

2.Мещерский И.В. Сборник задач по теретической механике. - М.: Высшая школа, 1986.- 448 с.

3.Бать М.И., Дженелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теретическая механика в примерах и задачах. - М.: Высшая школа, 1990.- 670 с.

4.Сборник задач для курсовых работ по теретической механике. /Под редакцией А.А. Яблонского. - М.: Высшая школа, 1985.- 378 с.

5.Яскілка М.Б. Збірник завдань для розрахунково-графічних робіт з теоретичної механіки. - К.: Вища школа, 1999.- 362 с.