

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
Запорізький державний технічний університет

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
до розрахунково – проектувальної задачі
“ Розрахунок статично невизначуваної нерозрізної балки”
для студентів механічних спеціальностей всіх форм навчання

Затвержено
на засіданні кафедри
“Опір матеріалів”
Протокол № 8 від 30.03.1998

Методичні вказівки до розрахунково - проектувальної задачі “Розрахунок статично невизначуваної нерозрізної балки” для студентів механічних спеціальностей всіх форм навчання / Укл.: Шевченко В.Г., Борисенко І.Г., Будник А.О., Мазіна О.В. - Запоріжжя: ЗДТУ, 1998. - 22 с.

Укладачі: В.Г. Шевченко, доцент, к.т.н.
І.Г. Борисенко, доцент, к.т.н.
А.О. Будник, доцент, к.т.н.
О.В. Мазіна, ст. лаборант

Рецензент: В.Т. Кудін, доцент, к.т.н.

Відповідальний
за випуск:

В.Г. Шевченко, к.т.н., доцент

ПЕРЕДМОВА

Дані методичні вказівки призначені для допомоги студенту у засвоєнні теоретичних положень шляхом розв'язування задач на тему “Розрахунок статично невизначуваної балки” (задача № 10) з побудовою епюр перерізуючих сил, згинальних моментів та прогинів. При чому, для розкриття статичної невизначуваності застосовано чотири найбільш уживані способи, що вивчають в курсі “Опір матеріалів”, і також використовуються: метод Мора, спосіб Верещагіна та інші. Умови задачі наведені у контрольних завданнях та на кафедральному стенді.

РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНОЇ НЕРОЗРІЗНОЇ БАЛКИ

Для балки, що зображена на рис. 1 необхідно:

- 1 Розкрити статичну невизначуваність, визначивши всі реакції опор.
- 2 Побудувати епюри Q_y і M_x .
- 3 Побудувати епюру прогинів.

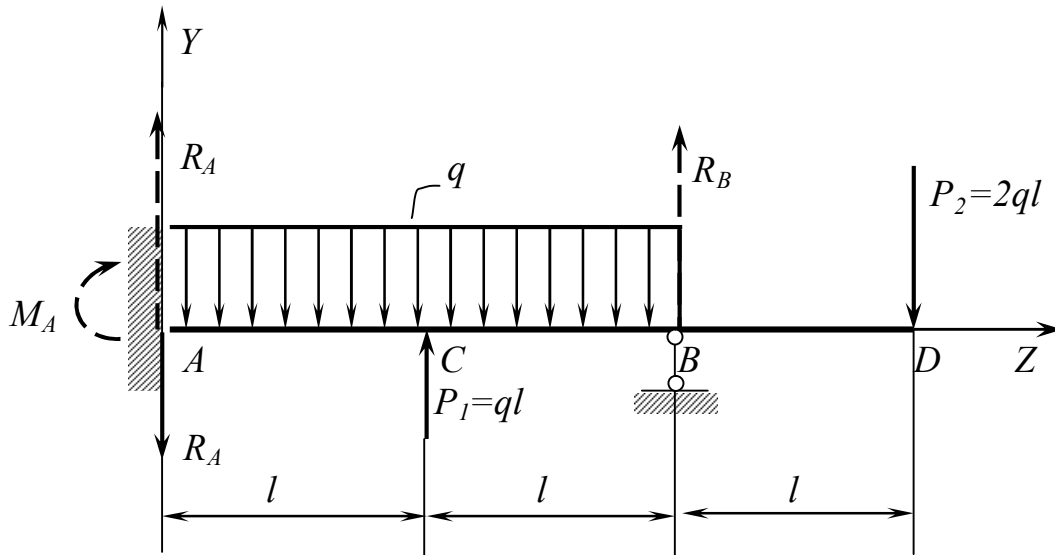


Рисунок 1 – Задана балка

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ

Нерозрізна балка (Рис. 1) – один раз статично невизначувана, оскільки зати-снення лівого кінця дає три реакції, а шарнірно-рухома (опора B) – одну реакцію. Всього потрібно визначити чотири реакції, а рівнянь рівноваги тільки три : $\sum P_y = 0$, $\sum P_x = 0$, $\sum M = 0$. Отже для побудови основної (статично визначуваної) системи слід усунути одну «зайву» в'язь .

Для розв'язування цієї задачі існує декілька способів, які і пропонуються при інженерних розрахунках :

- 1 За допомогою рівнянь статички і універсального рівняння методу початкових параметрів.
- 2 За допомогою способу порівняння деформацій.
- 3 За допомогою рівняння трьох моментів.
- 4 За допомогою канонічного рівняння методу сил.

ПЕРШИЙ СПОСІБ :

а) Скористуємось рівнянням статички і запишемо суму моментів від активних і реактивних зусиль відносно опори B (рис.1)

$$\sum M_B = 0,$$

$$-M_A - R_A \cdot 2l - P_1 l - P_2 l + 2ql \cdot l = 0,$$

$$-M_A - R_A \cdot 2l - ql^2 - 2ql^2 + 2ql^2 = 0.$$

Звідки:

$$-M_A - R_A \cdot 2l - ql^2 = 0 \quad (1)$$

б) Запишемо рівняння універсального методу початкових параметрів для визначення лінійних переміщень в загальному вигляді.

$$W_i EI_x = W_0 EI_x + \varphi_0 EI_x \cdot Z + \sum m \frac{(Z-a_m)^2}{2} + \sum P \frac{(Z-a_p)^3}{6} + \sum \frac{q(Z-a_q)^4}{24}. \quad (2)$$

У прикладі, який розглядається, координатна система YZ розташована в за-тисненні, тому початкові параметри $W_0=0$, $\varphi_0=0$, а точки прикладення зусиль відносно початку координат YZ будуть дорівнювати :

$a_{m(M_A)} = 0$, $a_{p(R_A)} = 0$, $a_{p(P_1)} = l$, $a_q = 0$, тоді (2) запишемо :

$$WEI_x = \frac{M_A \cdot Z^2}{2} + \frac{R_A \cdot Z^3}{6} + \frac{P_1(Z-l)^3}{6} - \frac{qZ^4}{24}. \quad (3)$$

При $Z=2l$ (опора B), $W_B=0$ тоді рівняння (3) запишеться :

$$W_B EI_x = \frac{M_A 4l^2}{2} + \frac{R_A 8l^3}{6} + \frac{ql \cdot l^3}{6} - \frac{q16l^4}{24} = 0.$$

Звідки:

$$R_A = -M_A \frac{3}{2l} + \frac{3}{8} ql. \quad (4)$$

Підставимо R_A із (4) в (1), одержимо :

$$-M_A - (-M_A \frac{3}{2l} + \frac{3}{8} ql) 2l - ql^2 = 0,$$

$$M_A = 0,875ql^2. \quad (5)$$

R_A визначимо підставивши M_A із (5) в (1)

$$-0,875ql^2 - R_A \cdot 2l - ql^2 = 0.$$

Звідки

$$R_A = -0,9375ql. \quad (6)$$

Знак (-) свідчить про те, що реакція R_A має протилежний напрям.

Тепер система статично визначуваною. Реакцію R_B визначаємо з рівняння статики, наприклад $\sum M_A = 0$.

$$\begin{aligned} M_A = 0, \quad -M_A + R_B \cdot 2l - P_2 \cdot 3l - 2ql^2 + P_1 l &= 0, \\ -0,875ql^2 + R_B \cdot 2l - 6ql^2 - 2ql^2 + ql^2 &= 0. \end{aligned}$$

$$\text{Звідки: } R_B = 3,9375ql. \quad (7)$$

Перевірка :

$$\begin{aligned} \sum P_y = 0, \quad -R_A - 2ql + P_1 + R_B - P_2 &= 0, \\ -0,9375ql - 2ql + ql + 3,9375ql - 2ql &= 0. \end{aligned}$$

ДРУГИЙ СПОСІБ – порівняння деформацій.

При застосуванні цього способу задану статично невизначувану систему (рис. 1) потрібно перетворити в статично визначувану усуненням зайвої в'язі, наприклад на опорі B . Отже еквівалентна система в цьому випадку буде такою

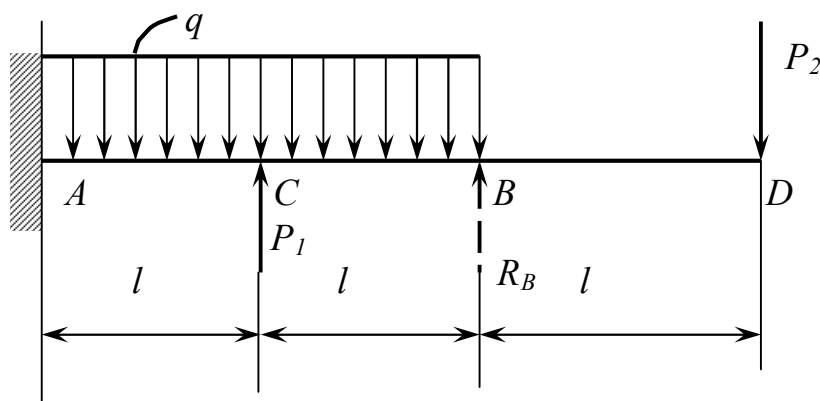


Рисунок 2 - Еквівалентна система

Умова порівняння деформації має вигляд :

$$\Delta_B = \Delta_{B(P)} + \Delta_{B(R_B)} = 0. \quad (8)$$

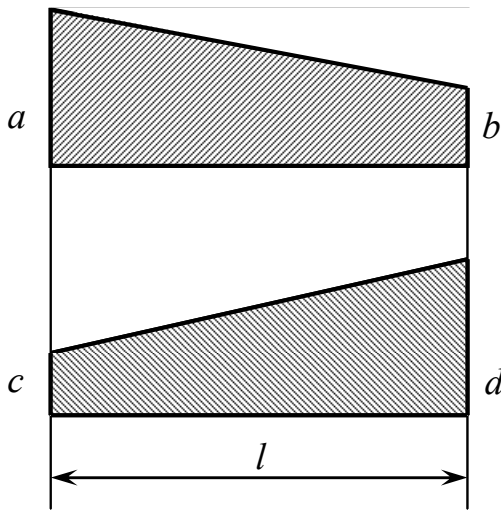
Де:

- Δ_B - переміщення точки B ,
- $\Delta_{B(P)}$ - переміщення від усіх зовнішніх зусиль
- $\Delta_{B(R_B)}$ - переміщення від невідомої реакції R_B .

При визначенні переміщень можна скористатись будь-яким методом, але більш зручним при розгляданні цієї задачі буде спосіб Верещагіна.

$$\Delta_i = \sum \frac{\omega \bar{y}_c}{EI_x} \quad (9)$$

при цьому, при перемноженні прямолінійних трапецій слід користуватися формулою Корноухова.



$$\omega \cdot \bar{y}_i = \frac{l}{6}(2ac + 2bd + ad + bc) \quad (10)$$

Застосовуючи метод перерізів будемо епюри моментів від усіх зусиль на основі принципу незалежності дії сил.

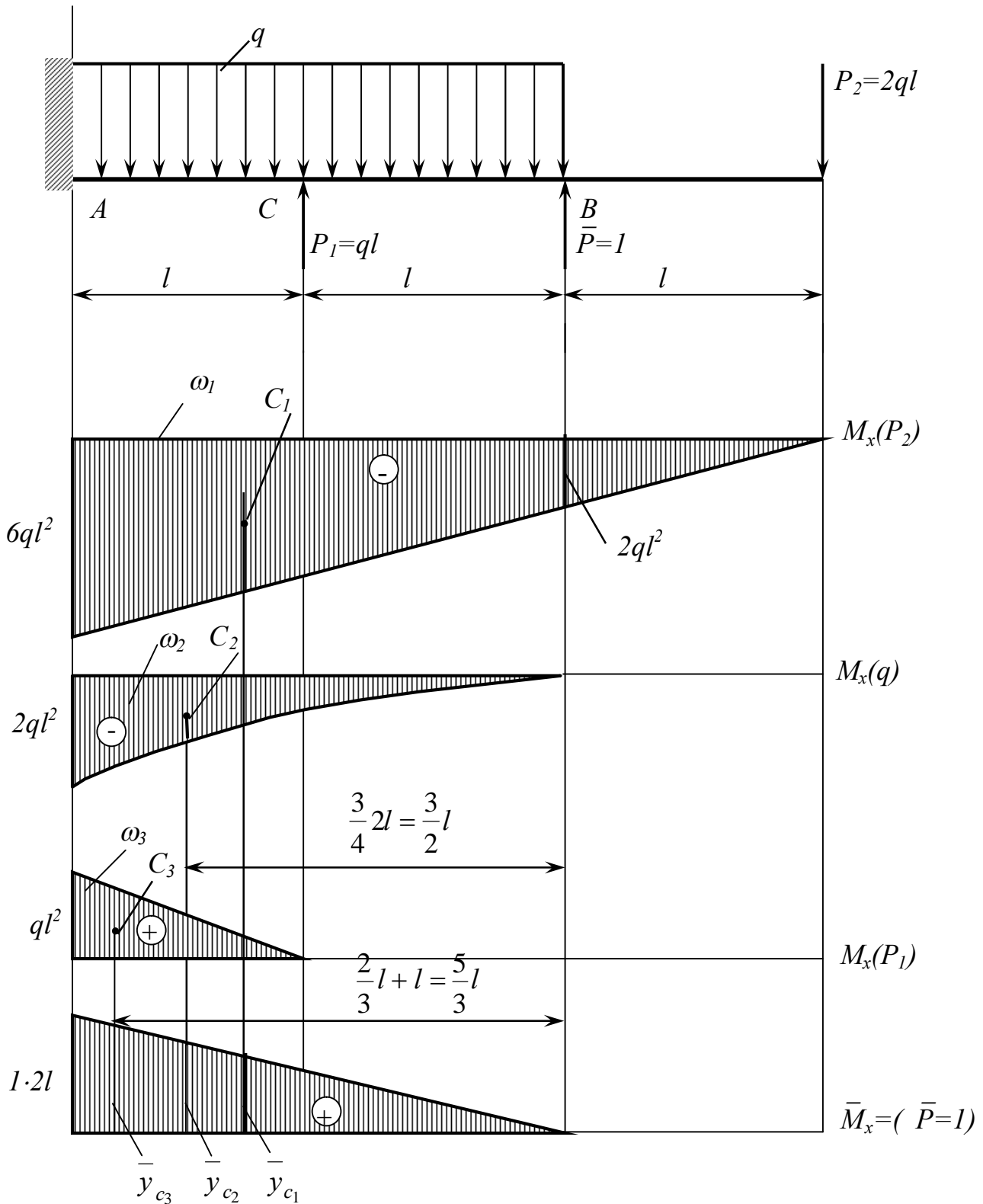
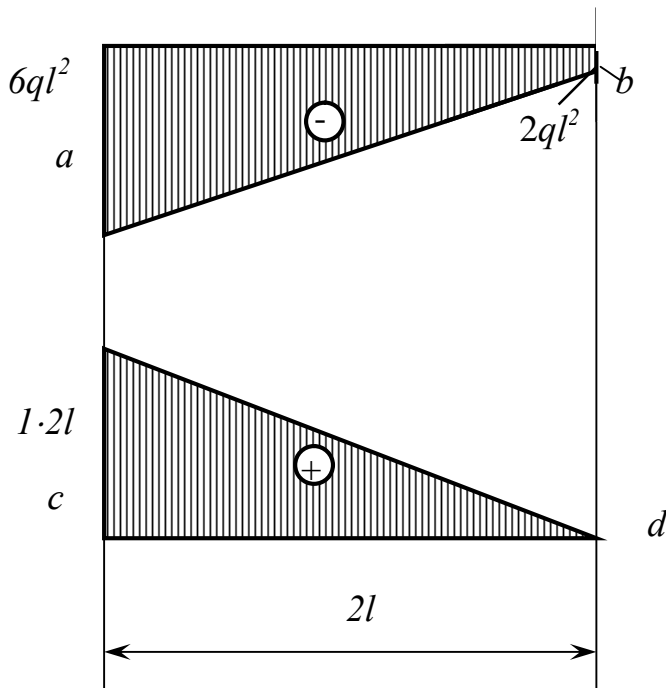


Рисунок 3 – Епюри згинальних моментів

Визначасмо складові (8) рівняння деформації.

$$\Delta_{B(P)} = \frac{1}{EI_x} (-\omega_1 \bar{y}_{c1} - \omega_2 \bar{y}_{c2} + \omega_3 \bar{y}_{c3}) = \frac{1}{EI_x} \left(-\frac{28}{3} ql^4 - 2ql^4 + \frac{5}{6} ql^4 \right) = -\frac{10,5ql^4}{EI_x}.$$

Для визначення складового переміщення $\omega_1 \bar{y}_{c_1}$, скористуємося формулою Корноухова.



$$-\omega_1 \bar{y}_{c_1} = \frac{2l}{6} (2ac + 2bd + ac + bd) =$$

$$= \frac{l}{3} (2 \cdot 6ql^2 \cdot 1 \cdot 2l + 0 + 2ql^2 \cdot 1 \cdot 2l + 0) = \frac{28}{3} ql^4,$$

$$\omega_1 \bar{y}_{c_1} = -\frac{28}{3} ql^4,$$

$$\omega_2 \bar{y}_{c_2} = -\frac{4}{3} ql^3 \cdot \frac{3}{2} l = -2ql^4,$$

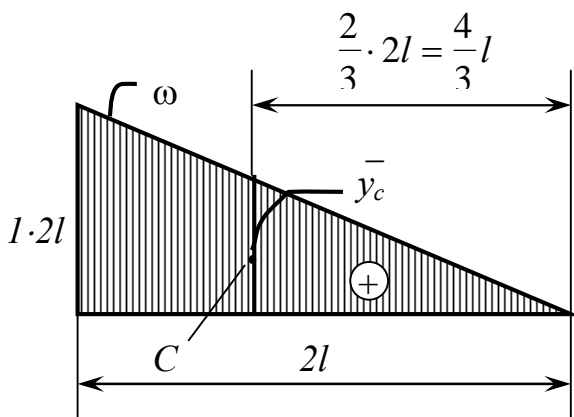
$$\omega_2 = \frac{1}{3} hl = \frac{1}{3} 2ql^2 \cdot 2l = \frac{4}{3} ql^3, \quad \bar{y}_{c_2} = \frac{3}{2} l,$$

$$\omega_3 \bar{y}_{c_3} = +\frac{ql^3}{2} \cdot \frac{5}{3} l = +\frac{5}{6} ql^4,$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2} hl = \frac{1}{2} ql^2 \cdot l = \frac{ql^3}{2}, \quad \bar{y}_{c_3} = \frac{5}{3} l.$$

Рисунок 3а – Застосування формули Корноухова

Для визначення складового переміщення $\Delta_{B(R_B)}$ перемножимо саму на себе епюру $\bar{M}_x (\bar{P} = 1)$ (рис. 3).



$$\Delta_{B(R_B)} = \omega \cdot \bar{y}_c = \frac{8l^3}{3EI_x} \cdot R_B,$$

$$\omega = \frac{1}{2} hl = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2l \cdot 2l = 2 \cdot 1 \cdot l^2,$$

$$\bar{y}_c = \frac{4}{3} l.$$

1- це умовна реакція R_B .

Рисунок 3б - Перемноження епюри \bar{M}_x

Тепер підставляємо складові в умову (8)

$$\Delta_B = -\frac{10,5ql^4}{EI_x} + \frac{8l^3}{3EI_x} \cdot R_B = 0.$$

Звідки

$$R_B = \frac{10,5ql^4}{EI_x} \cdot \frac{3EI_x}{8l^3} = 3,9375ql.$$

Отже $R_B = 3,9375ql$, тобто ми маємо те саме значення, що і раніше, в розглянутому першому способі. Реакції R_A і M_A визначаємо із умов рівноваги.

$$\sum M_A = 0 \text{ та } \sum M_B = 0.$$

ТРЕТІЙ СПОСІБ – За допомогою рівняння трьох моментів

В загальному вигляді рівняння трьох моментів таке:

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1} \cdot l_{n+1} = -6EI_x(\varphi_p^l + \varphi_p^{np}). \quad (11)$$

Це рівняння передбачає балку на трьох опорах з двома прольотами довжиною l_n та l_{n+1} . Але в нашому прикладі (рис.1) балка має тільки один проліт з затисненим кінцем і шарнірно рухомою опору. Отже для того, щоб скористатися рівнянням трьох моментів необхідно утворити еквівалентну систему, в якій замінити затиснену опору шарнірно-рухомою та ввести додатковий проліт нульової довжини а також замінити навантаження на консолі правого прольота еквівалентним моментом відомої величини і напрямку. Таким чином маємо таку еквівалентну схему (рис.4):

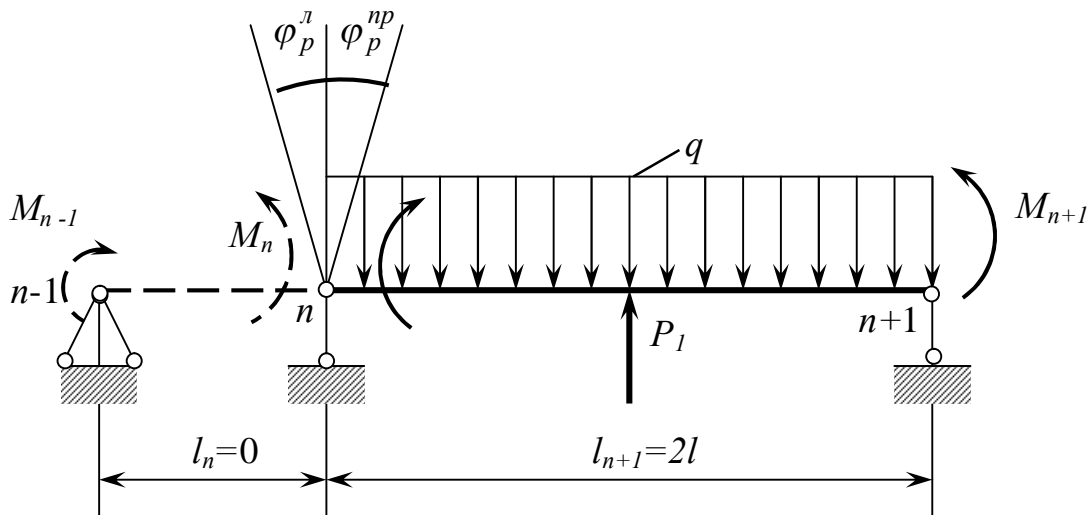


Рисунок 4 – Еквівалентна система

Із рис. 4 випливає, що $M_{n-1}=0$, $l_n=0$, $\varphi_p^l = 0$.

$M_{n+1} = -P_2 \cdot l$ (враховуючи силу P_2 на консолі).

Таким чином рівняння трьох моментів матиме вигляд:

$$2M_n \cdot 2l - 2ql^2 \cdot 2l = -6EI_x \cdot \varphi_p^{np}. \quad (12)$$

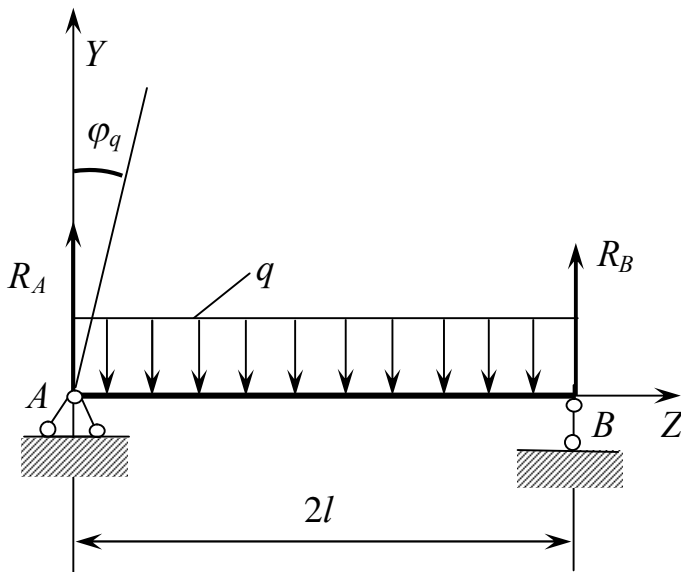
Для визначення опорного моменту M_n необхідно попередньо обчислити кути повороту φ_P^{np} від зосередженої сили P_l та розподіленого навантаження q , що прикладені в межах прольота балки довжиною $l_{n+1}=2l$.

$$\varphi_P^{np} = \varphi_P + \varphi_q. \quad (13)$$

Кутові переміщення φ_P і φ_q найчастіше при ручних розрахунках визначаються методами початкових параметрів, Мора та способом Верещагіна. Отже нагадаємо ці методи :

а) Від розподіленого навантаження (q)

1 Метод початкових параметрів



Реакції $R_A = R_B = ql$.
Початкові параметри на опорі А (початок координат) $W_0 = 0, \varphi_0 \neq 0$.

Рисунок 5 – Визначення φ_q

В загальному вигляді рівняння метода записуються для кута повороту (кутове переміщення):

$$\varphi_i EI_x = \varphi_0 EI_x + \sum m(Z - a_m) + \sum \frac{P(Z - a_p)^2}{2} + \sum q \frac{(Z - a_q)^3}{6}, \quad (14)$$

для прогину (лінійне переміщення)

$$W_i EI_x = \varphi_0 EI_x Z + W_0 EI_x + \sum m \frac{(Z - a_m)^2}{2} + \sum P \frac{(Z - a_p)^3}{6} + \sum q \frac{(Z - a_q)^4}{24}, \quad (15)$$

для визначення кута повороту $\varphi_q = \varphi_A = \varphi_0$ потрібно скористатися умовою, що на опорі B прогин $W_B = 0$,

$$W_{B(Z=2l)} EI_x = \varphi_0 EI_x Z + \frac{R_A (Z - 0)^3}{6} - \frac{q(Z - 0)^4}{24} = 0,$$

Звідки:

$$\varphi_0 = \frac{1}{2EI_x} \left(\frac{-ql(2l)^3}{6} + q \frac{(2l)^4}{24} \right) = \frac{ql^4}{2EI_x} \left(-\frac{4}{3} + \frac{2}{3} \right) = -\frac{ql^3}{3EI_x},$$

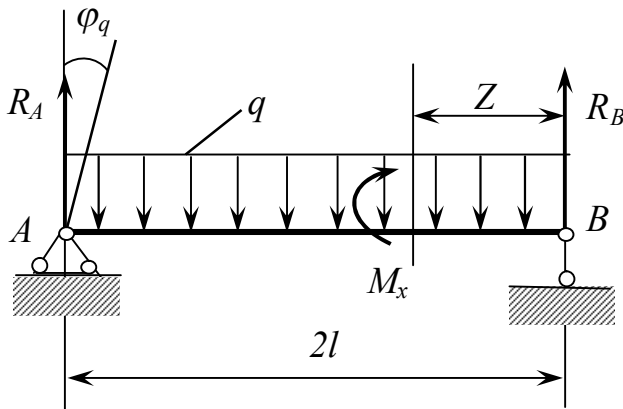
$$\varphi_q = -\frac{ql^3}{3EI_x}.$$

Знак (-) указує на те, що переріз балки на опорі A повертається за годинниковою стрілкою.

2 Метод Мора

Потрібно розглядати дві системи : від зовнішнього та одиничного навантаження ($\bar{m} = 1$).

Реакції : $R_A = R_B = ql$.



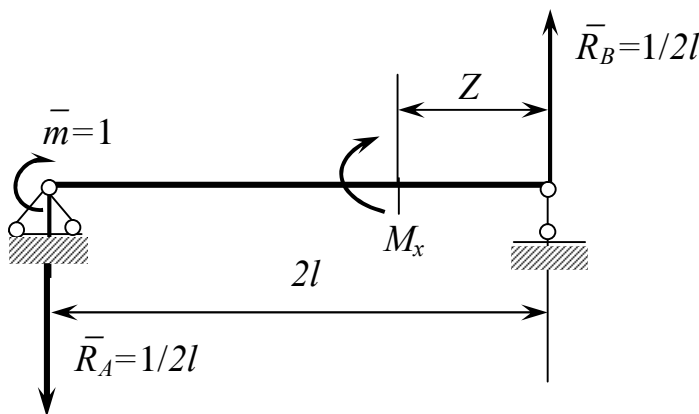
$$\bar{R}_A = \bar{R}_B = \frac{1}{2l}$$

- направлені протилежно одна одній.

По довжині прольота одна ділянка

$$0 \leq Z_1 \leq 2l,$$

$$\varphi_q = \varphi_A = \frac{1}{EI_x} \int_0^{2l} M_x \cdot \bar{M}_x dZ, \quad (16)$$



де:

$$M_x = R_B \cdot Z - \frac{qZ^2}{2} = ql \cdot Z - \frac{qZ^2}{2},$$

$$\bar{M}_x = \bar{R}_B \cdot Z = \frac{1}{2l} \cdot Z.$$

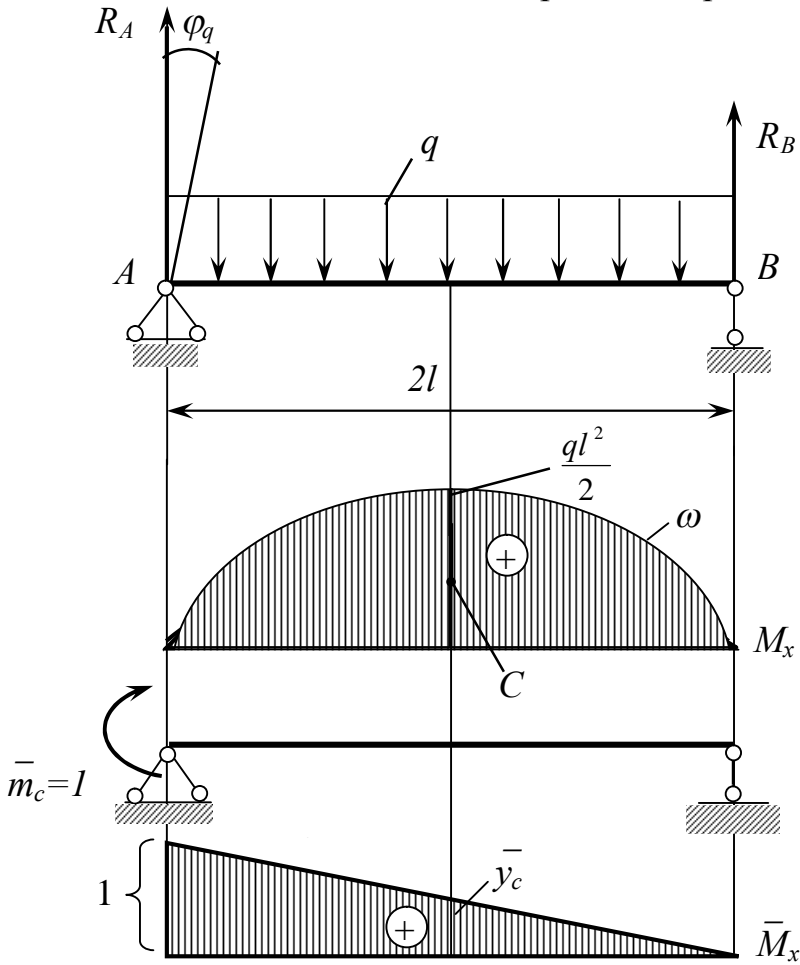
Рисунок 6 – Визначення φ_q

$$\varphi_q = \frac{1}{EI_x} \int_0^{2l} \left(qlZ - \frac{qZ^2}{2} \right) \left(\frac{1}{2l} \cdot Z \right) dZ = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{qZ^3}{2 \cdot 3} \Big|_0^{2l} - \frac{qZ^4}{4l \cdot 4} \Big|_0^{2l} \right) = \frac{ql^3}{EI_x} \left(\frac{8}{6} - 1 \right) = \frac{ql^3}{3EI_x},$$

$$\varphi_q = \frac{ql^3}{3EI_x}.$$

Знак (+) вказує на те, що напрям повороту перерізу опори A співпадає з напрямом повороту $\bar{m}=1$.

3 Правило Верещагіна (перемноження епюр)



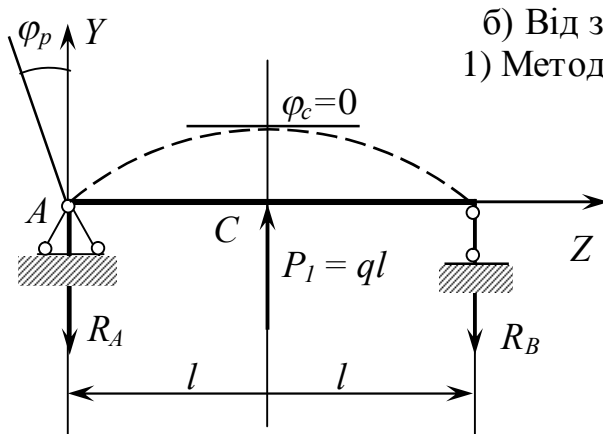
$$\varphi_q = \sum \frac{\omega \cdot \bar{y}_c}{EI_x}, \quad (17)$$

$$\omega = \frac{2}{3}hl = \frac{2ql^2}{3 \cdot 2} \cdot 2l = \frac{2}{3}ql^3,$$

$$\bar{y}_c = \frac{1}{2},$$

$$\varphi_q = \frac{ql^3}{3EI_x}.$$

Рисунок 7 – Визначення φ_q



б) Від зосередженої сили (P_1)
1) Метод початкових параметрів

Реакції $R_A = R_B = \frac{ql}{2}$.

Початкові параметри $\varphi_0 \neq 0, \quad W_0 = 0$.

Рисунок 8 – Визначення φ_{P_1}

В цьому прикладі, оскільки зосереджена сила прикладена по середині прольоту балки, то можна скористатись умовою, що кут повороту в точці С буде дорівнювати нулю ($\varphi_c = 0$), отже:

$$\varphi_{c(z=l)} EI_x = \varphi_0 EI_x - R_A \frac{(Z-0)^2}{2} = 0 .$$

Звідки:

$$\varphi_0 = \varphi_{P_1} = \frac{R_A \cdot l^2}{2EI_x} = \frac{ql \cdot l^2}{2 \cdot 2EI_x} = \frac{ql^3}{4EI_x} .$$

2) Метод Мора

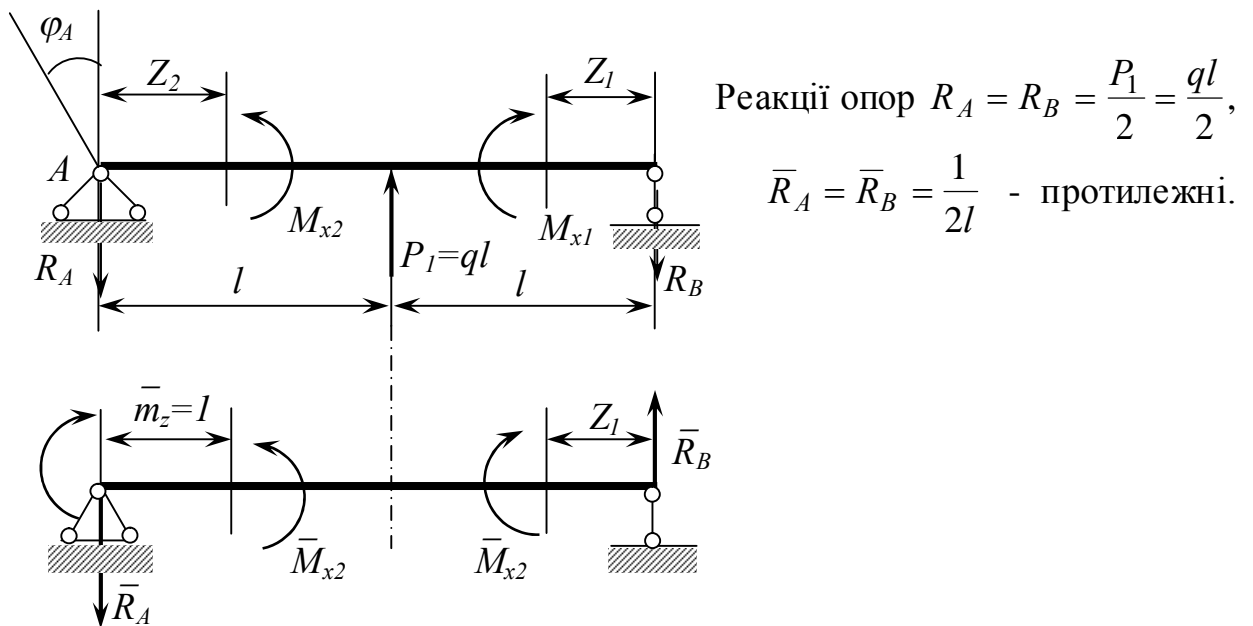


Рисунок 9 – Визначення φ_R

Тут потрібно розглядати дві силові ділянки і інтеграл Мора має вигляд:

$$\varphi_{P_1} = \frac{1}{EI_x} \left(\int_0^l M_{x_1} \bar{M}_{x_1} dZ + \int_0^l M_{x_2} \bar{M}_{x_2} dZ \right),$$

ділянка I-I $0 \leq Z_1 \leq l$,

$$M_{x_1} = -R_B Z_1 = -\frac{ql}{2} Z_1, \quad \bar{M}_{x_1} = \bar{R}_B \cdot Z_1 = \frac{1}{2l} Z_1,$$

ділянка II-II $0 \leq Z_2 \leq l$,

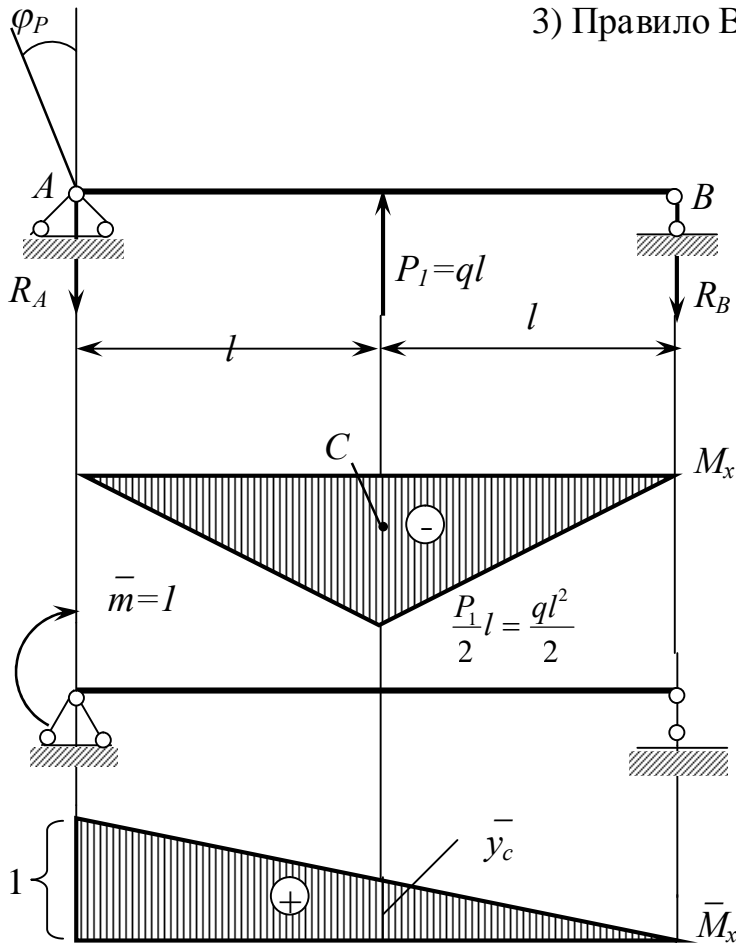
$$M_{x_2} = -R_A Z_2 = -\frac{ql}{2} Z_2, \quad \bar{M}_{x_2} = 1 - \bar{R}_A \cdot Z_2 = 1 - \frac{1}{2l} Z_2,$$

$$\begin{aligned} \varphi_p = \varphi_A &= \frac{1}{EI_x} \left[-\int_0^l \frac{ql}{2} Z_1 \cdot \frac{1}{2l} Z_1 dZ + \int_0^l \left(-\frac{ql}{2} Z_2 \right) \left(1 - \frac{1}{2l} Z^2 \right) dZ \right] = \\ &= \frac{1}{EI_x} \left(-\frac{ql}{4l} \int_0^l Z^2 dZ - \frac{ql}{2} \int_0^l Z dZ + \frac{ql}{4l} \int_0^l Z^2 dZ \right) = -\frac{qlZ^2}{2EI_x \cdot 2} \Big|_0^l = -\frac{ql^3}{4EI_x}, \end{aligned}$$

$$\varphi_{p1} = -\frac{ql^3}{4EI_x}.$$

Знак “-“ вказує на те, що кут повороту φ_p - протилежний показаному моментом $\bar{m} = 1$.

3) Правило Верещагіна



$$\varphi_{p1} = \sum \frac{\omega \bar{y}_c}{EI_x},$$

$$\omega = -\frac{1}{2} hl = -\frac{1}{2} \cdot \frac{ql^2}{2} 2l = -\frac{ql^3}{2},$$

$$\bar{y}_c = \frac{1}{2},$$

$$\varphi_{p1} = -\frac{ql^3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{EI_x} = -\frac{ql^3}{4EI_x}.$$

Рисунок 10 – Визначення φ_R

Таким чином незалежно від застосованого метода складові кута повороту мають вигляд :

$$\varphi_q = \frac{ql^3}{3EI_x}, \quad \varphi_{P_1} = -\frac{ql^3}{4EI_x},$$

і рівняння (13)

$$\varphi_p^{np} = \frac{ql^3}{3EI_x} - \frac{ql^3}{4EI_x}.$$

Знаки кутів повороту визначаються знаками згинальних моментів (M_x) від навантаження, яке діє на цій ділянці прольота балки.

Тепер рівняння (12) буде записано :

$$2M_n \cdot 2l - 2ql^2 \cdot 2l = -6EI_x \left(\frac{ql^3}{3EI_x} - \frac{ql^3}{4EI_x} \right) = -0,5ql^3.$$

Звідки

$$M_n = \frac{4ql^3 - 0,5ql^3}{4l} = 0,875ql^2.$$

Тепер балку можна розглядати як статично визначувану, визначаючи реакції опор. R_A і R_B із умов статички:

$$\sum M_A = 0, \quad R_B 2l + P_1 l - P_2 3l - 2ql \cdot l - M_A = 0, \quad R_B = 3,9375ql,$$

$$\sum M_B = 0, \quad -M_A - R_A \cdot 2l + 2ql \cdot l - P_1 l - P_2 l = 0, \quad R_A = -0,9375ql.$$

ЧЕТВЕРТИЙ СПОСІБ – Метод сил

Це такий метод в якому невідомими є сили. Порядок розрахунків:

1 Визначається число зайвих в'язей.

2 Складається основна система (статично визначувана) усуненням зайвих в'язей.

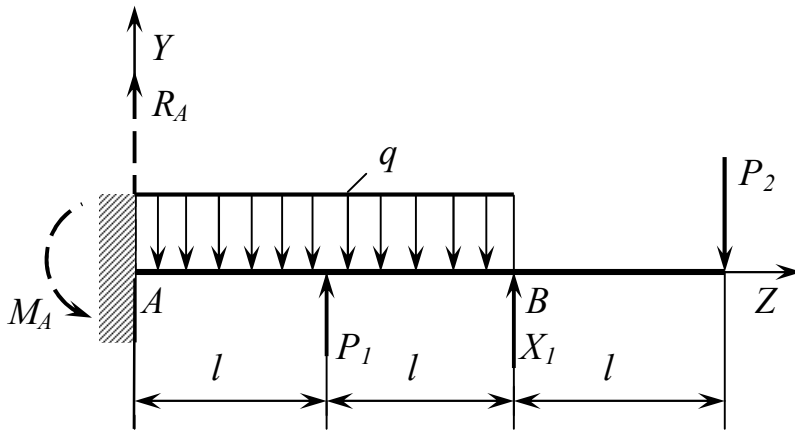
3 Складається еквівалентна система в якій до основної системи прикладаються зовнішні зусилля і невідомі сили замість усунених зайвих в'язей.

4 Складається рівняння сумісності деформацій, яке має назву канонічного рівняння методу сил.

Отже для заданої системи (Рис.1) еквівалентну систему більш раціонально скласти усунувши в'язь на опорі B , замінивши її невідомою силою X_1 .

Канонічне рівняння має вигляд

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1P} = 0, \quad (18)$$



де δ_{11} - переміщення системи від
невідомої сили X_1 ,
 Δ_{1P} - переміщення системи від
усіх зовнішніх сил по напрямку
невідомої сили X_1 .

Рисунок 11 – Еквівалентна сиситема із заданим навантаженням

Для визначення переміщень δ_{11} і Δ_{1P} скористуємось методом початкових параметрів, розглядаючи еквівалентну систему Рис.11 без сили X_1 . Визначаємо реакції опор R_A і M_A із рівняння рівноваги.

$$\sum P_y = 0, \quad R_A = P_2 + q2l - P_1 = 2ql + 2ql - ql = 3ql,$$

$$\sum M_A = 0, \quad M_A = P_2 \cdot 3l + q2l \cdot l - P_1 l = 6ql^2 + 2ql^2 - ql^2 = 7ql^2.$$

Рівняння методу початкових параметрів (2) для схеми Рис.11 запишеться:

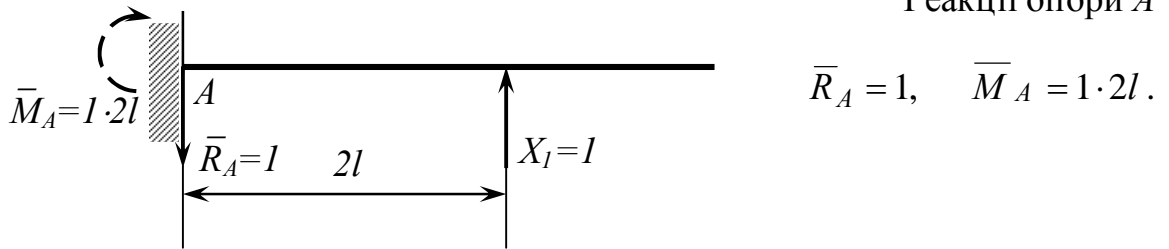
$$W_B EI_x = -\frac{M_A (Z-0)^2}{2} + \frac{R_A (Z-0)^3}{6} + \frac{P_1 (Z-l)^3}{6} - q \frac{(Z-0)^4}{24},$$

при $Z = 2l$,

$$W_B EI_x = -\frac{7ql^2 (2l)^2}{2} + \frac{3ql(2l)^3}{6} + \frac{ql \cdot l^3}{6} - \frac{q(2l)^4}{24} = -\frac{21}{2} ql^4,$$

$$\Delta_{1P} = W_B = -\frac{21ql^4}{2EI_x}.$$

Для визначення головного переміщення δ_{11} розглянемо систему рис. 12 навантажену силою $X_1 = 1$.

Реакції опори A 

$$\bar{R}_A = 1, \quad \bar{M}_A = 1 \cdot 2l.$$

Рисунок 12 - Система з одиничним навантаженням

$$\bar{W}_{(B)} = \frac{M_A(Z-0)^2}{2} - \frac{R_A(Z-0)^3}{6},$$

при $Z = 2l$,

$$\bar{W}_{(B)} EI_x = \frac{12l(2l)^2}{2} - \frac{1 \cdot (2l)^3}{6} = \frac{8l^3}{3}, \quad \delta_{11} = \frac{8l^3}{3EI_x}.$$

Підставимо в рівняння (18)

$$\frac{8l^3}{3EI_x} \cdot X_1 - \frac{21ql^4}{2EI_x} = 0.$$

$$\text{Звідки } X_1 = R_B = \frac{21ql^4}{2EI_x} \cdot \frac{3EI_x}{8l^3} = \frac{63}{16}ql = 3,9375ql,$$

отже визначена реакція R_B , і, таким чином, розкрита статична невизначуваність системи. Реакції R_A і M_A системи рис. 1 визначаються з умов рівноваги, що показані при розгляданні інших способів. В розглянутому прикладі задачі спосіб порівняння деформації (2) і канонічного рівняння методом сил (4) при визначенні переміщень не має суттєвих різниць і тому його можна було не розглядати, але це тільки для такого приклада. Якщо балка буде мати дві затиснені опори або більш ніж два прольоти, або статично невизначувану раму, тоді спосіб канонічного рівняння методу сил буде найбільш зручним при розрахунках з використанням ПЕОМ.

Побудова епюр Q_y і M_x

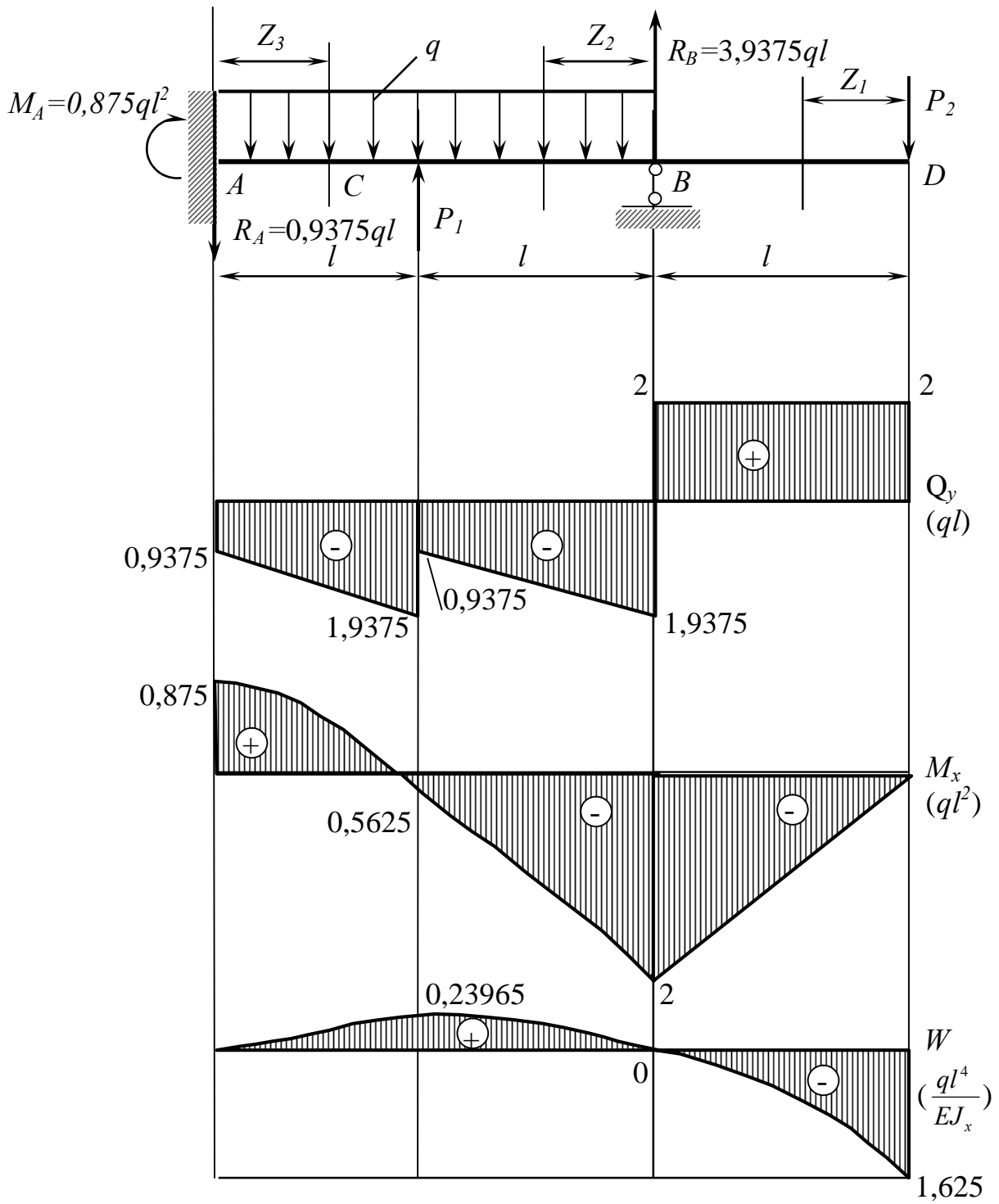
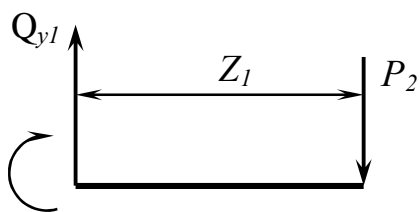


Рисунок 13 – Епюри Q_y , M_x та W

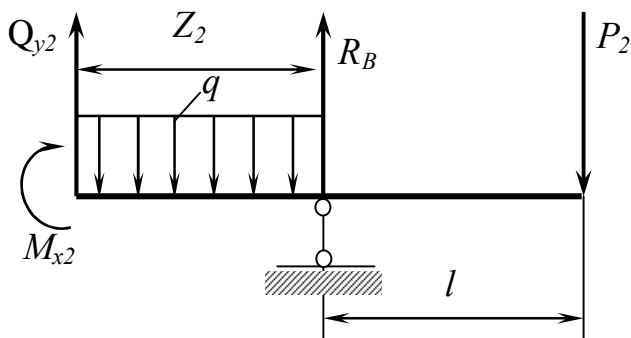


Ділянка I-I $0 \leq Z_1 \leq l$,

$$Q_{y1} = P_2 = 2ql = \text{const},$$

$$M_{x1} = -P_2 Z_1,$$

$$Z_2 = l, \quad M_{x1} = -2ql.$$



Ділянка II-II $0 \leq Z_2 \leq 0$,

$$Q_{y2} = P_2 - R_B + qZ_2,$$

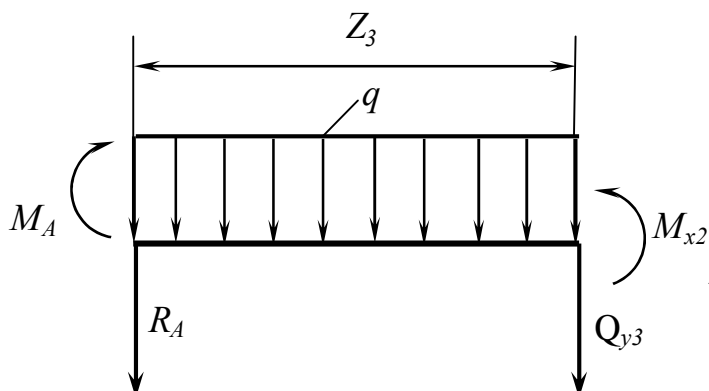
$$Z_2 = 0, \quad Q_{y2} = 2ql - 3,9375ql = -1,9375ql,$$

$$Z_2 = l, \quad Q_{y2} = 2ql - 3,9375ql = 0,9375ql,$$

$$M_{x2} = -P_2(l + Z_2) + R_B Z_2 - \frac{qZ_2^2}{2},$$

$$Z_2 = 0, \quad M_{x2} = -2ql \cdot l = -2ql^2,$$

$$Z_2 = l, \quad M_{x2} = -2ql \cdot 2l + 3,9375ql \cdot l - 0,5ql^2 = -0,5625ql^2.$$



Ділянка III-III $0 \leq Z_3 \leq l$,

$$Q_{y3} = -R_A - qZ_3,$$

$$Z_3 = 0, \quad Q_{y3} = -R_A = -0,9375ql,$$

$$Z_3 = l, \quad Q_{y3} = -0,9375ql - ql = -1,9375ql,$$

$$M_{x3} = M_A - R_A \cdot Z_3 - \frac{qZ_3^2}{2},$$

$$Z_3 = 0, \quad M_{x3} = M_A = 0,875ql^2,$$

$$Z_3 = l, \quad M_{x3} = 0,875ql^2 - 0,9375ql^2 - 0,5ql^2 = -0,5625ql^2.$$

Побудова епюри прогинів

Для побудови епюри прогинів скористаємось рівнянням (15) метода початкових параметрів, маючи на увазі, що початкові параметри $\varphi_0=0$, $W_0=0$. Тоді рівняння запишеться:

$$W_i EI_x = \frac{M_A (Z-0)^2}{2} - \frac{R_A (Z-0)^3}{6} + \frac{P_1 (Z-l)^3}{6} + R_B \frac{(Z-2l)^3}{6} - q \frac{(Z-0)^4}{24}.$$

Прогин в точці C ($Z=l$),

$$W_C EI_x = \frac{0,875ql^2 \cdot l^2}{2} - \frac{0,9375ql \cdot l^3}{6} - \frac{ql^4}{24} = 0,23965ql^4,$$

$$W_C = \frac{0,23965ql^4}{EI_x}.$$

Прогин в точці B (на опорі). Відомо, що на опорі прогин нульовий, тому це контрольна точка, якщо при обчисленні прогин не дорівнює нулю, то це свідчить, що в розрахунках є помилка.

$$Z = 2l,$$

$$W_B = \frac{M_A(Z-0)^2}{2} - \frac{R_A(Z-0)^3}{6} + \frac{P_1(Z-l)^3}{6} - \frac{q(Z-0)^4}{24},$$

$$W_B = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{0,875ql^2(2l)^2}{2} - \frac{0,9375ql^2(2l)^3}{6} + \frac{ql \cdot l^3}{6} - \frac{q(2l)^4}{24} \right) =$$

$$= \frac{ql^4}{EI_x} (1,75 - 1,25 + 0,1666 - 0,6666) = 0.$$

Прогин в точці D (вільний кінець балки)

$$Z = 3l,$$

$$W_D EI_x = \frac{M_A(Z-0)^2}{2} - \frac{R_A(Z-0)^3}{6} + \frac{P_1(Z-l)^3}{6} + \frac{R_B(Z-2l)^3}{6} - \frac{q(Z-0)^4}{24} + \frac{q(Z-2l)^4}{24},$$

$$W_D = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{0,875ql^2(3l)^2}{2} - \frac{0,9375ql(3l)^3}{6} + \frac{ql(2l)^3}{6} + \frac{3,9375ql \cdot l^3}{6} - \frac{q(3l)^4}{24} + \frac{ql^4}{24} \right) =$$

$$= \frac{ql^4}{EI_x} (3,9375 - 4,21875 + 1,3333 + 0,65625 - 3,375 + 0,04166) = -1,625 \frac{ql^4}{EI_x},$$

$$W_D = -1,625 \frac{ql^4}{EI_x}.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Сопротивление материалов. / Под ред. Акад. АН УССР Писаренко Г.С. /-5-е изд. – К.: Вища шк., 1986-785 с.
2. Опір матеріалів : Підручник / Г.С. Писаренко, О.Л. Квітка, Е.С. Уманський; за ред Г.С. Писаренка /-К., Вища шк., 1993-655 с.
3. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: Учебник для втузов.-9-е изд. – М.: Наука , 1986. – 512с.
4. Контрольні завдання з курсу “Опір матеріалів”. – ЗМІ, ротاپринт, 1990.- 45 с.