МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Запорізький національний технічний університет

КОНТРОЛЬНІ ЗАВДАННЯ І МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання розрахунково-проектувальних задач
з курсу „Опір матеріалів”
для студентів механічних спеціальностей
денної форми навчання

III семестр

2006

Контрольні завдання і методичні вказівки до виконання розрахунково-проектувальних задач з курсу „Опір матеріалів" для студентів механічних спеціальностей денної форми навчання. ІІІ семестр / Укл.: А.О. Будник, В.Г. Шевченко, О.В. Овчинников, – Запоріжжя: ЗНТУ, 2006. − 74 с.

Укладачі: *А.О. Будник*, доцент, к.т.н.
В.Г. Шевченко, доцент, к.т.н.
О.В. Овчинников, доцент, к.т.н.

Комп'ютерна графіка
та верстка: *Г.А. Кот*

Рецензент: *В.Т. Кудін*, доцент, к.т.н.

Відповідальний
за випуск: *В.Г. Шевченко*, доцент, к.т.н.

Видання перероблене та доповнене.

ЗАТВЕРДЖЕНО

на засіданні кафедри
механіки

Протокол № 4
від 8 лютого 2006 року

ЗМІСТ

ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

Опір матеріалів − наука про інженерні методи розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість елементів конструкцій різних споруд і та механізмів [1].

Опір матеріалів, як загально технічна дисципліна, ґрунтується на теоретичних і дослідних даних. Тому при вивченні курсу „Опір матеріалів" студенти вивчають теорію (лекційні заняття) та виконують лабораторні роботи, які є обов'язковою частиною навчального процесу.

Для кращого засвоєння теорії та опанування методами розрахунку типових елементів конструкцій студентам призначені також практичні заняття або самостійні роботи під наглядом викладача і виконання розрахунково-проектувальних задач (РПЗ).

Навчальним планом ІІІ семестру студенту передбачено виконати, у залежності від спеціальності, 6−7 РПЗ. Студент повинен виконувати РПЗ за своїм особистим варіантом, що складається з двох останніх цифр номеру його залікової книжки, де передостання цифра − номер рядка в таблиці даних, яка додається до кожної задачі, остання цифра − номер розрахункової схеми.

Наприклад, номер залікової книжки − 02 047 013.

У цьому випадку студент виконує РПЗ за 13-м варіантом: схема − №3, рядок в таблиці даних − 1. Якщо остання цифра нуль, то схема №10.

Оформлення розрахунково-проектувальних задач необхідно виконувати відповідно існуючим вимогам на аркушах паперу формату А4.

Перевірку правильності виконання РПЗ можна здійснювати за допомогою програмного комплексу в комп'ютерному класі кафедри або безпосередньо у викладача під час консультацій.

Крім виконання РПЗ студенти проходять захист (тестування) основних тем ІІІ семестру:

- геометричні характеристики плоских перерізів;
- розтягання або стискання;
- дослідження напруженого стану в точці деформування тіла;
- кручення та згинання.

Типові питання до кожної теми розглянуті у методичних вказівках [4].

РОЗРАХУНКОВО-ПРОЕКТУВАЛЬНІ ЗАДАЧІ

1 ВИЗНАЧЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК СКЛАДНОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ

Як відомо, опір елементів конструкцій різним видам деформації часто залежить не тільки від матеріалу та розмірів, а й від обрису осі, форми поперечних перерізів та їх розташування.

Тому, незважаючи на фізико-механічні властивості об'єкту, що вивчається, розглянемо порядок визначення основних геометричних характеристик поперечних перерізів, які визначають опір різним видам деформацій.

1.1 Умова задачі

Для заданого поперечного перерізу необхідно:

а) виписати розміри прокатних профілів, з яких складається переріз, із таблиць сортаменту [1] і накреслити його в масштабі 1:2 на аркуші паперу формату А4;

б) провести допоміжні осі координат, відносно яких визначити положення центру ваги кожного профілю;

в) визначити положення центру ваги заданого перерізу та провести на кресленні центральні осі x_c, y_c;

г) визначити осьові (екваторіальні) і відцентровий момент інерції відносно центральних осей;

д) визначити положення головних центральних осей (u, v) і провести їх на кресленні;

е) визначити моменти інерції відносно головних центральних осей;

ж) визначити моменти опору заданого перерізу.

Схеми складних перерізів та номери їх профілів наведені на рисунках 1.1, 1.2 і в таблиці 1.1.

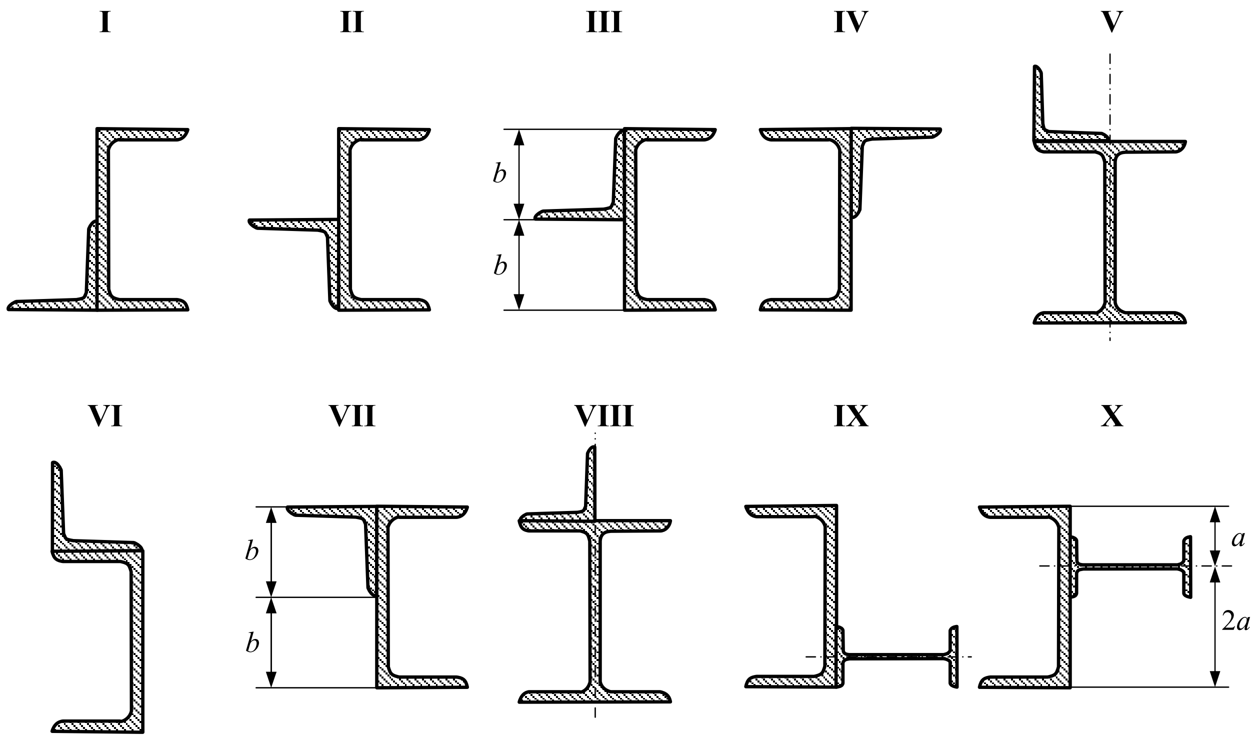


Рисунок 1.1 – Схеми складних перерізів з рівнобічним кутником

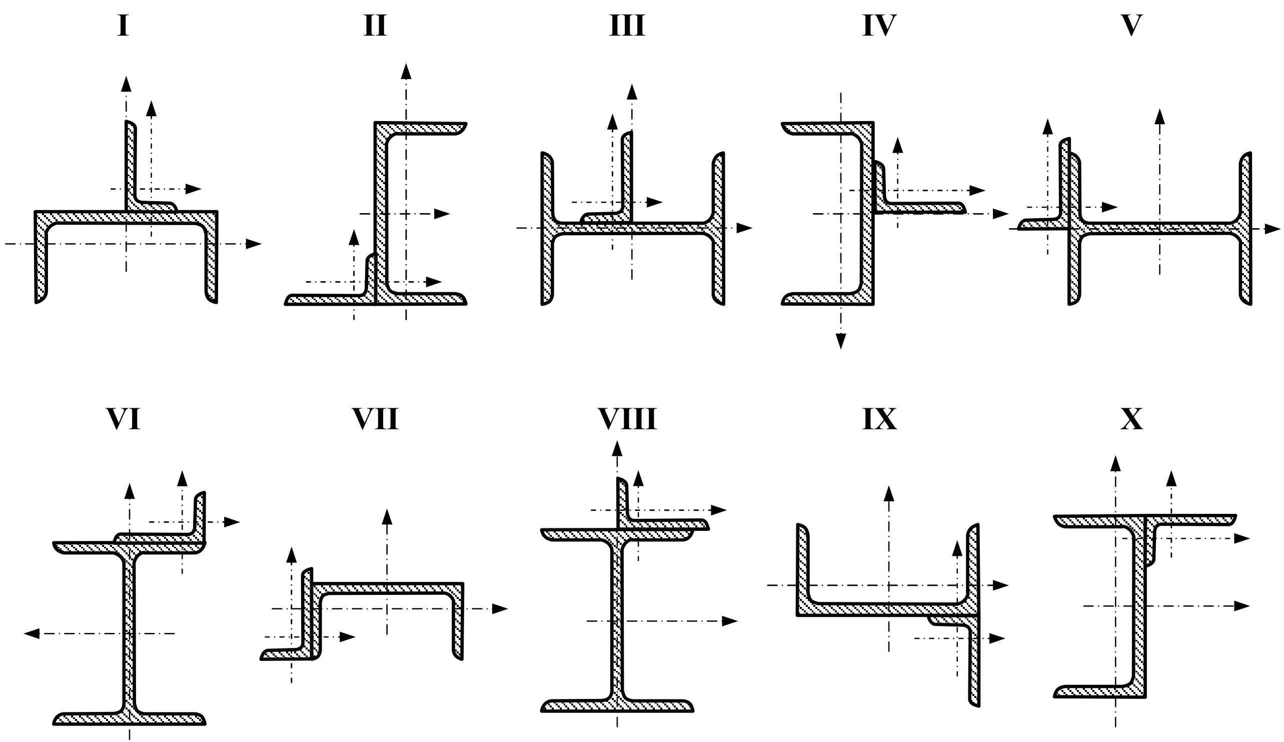


Рисунок 1.2 − Схеми складних перерізів з нерівнобічним кутником

Таблиця 1.1 – Номери профілів складного перерізу

№ рядка	Швелер	Двотавр	Рівнобічний кутник	Нерівнобічний кутник
1	14	12	№8: 80x80x8	№8/5: 80x50x5
2	16	14	№8: 80x80x6	№8/6: 80x60x8
3	18	16	№9: 90x90x8	№9/5,6: 90x56x6
4	20	18	№9: 90x90x7	№9/5,6: 90x56x8
5	22	20а	№9: 90x90x6	№10/6,3: 100x63x8
6	24	20	№10: 100x100x8	№10/6,3: 100x63x10
7	27	22а	№10: 100x100x10	№10/6,5: 100x65x8
8	30	22	№10: 100x100x12	№10/7: 100x70x8
9	33	24а	№12,5: 125x125x10	№12,5/8: 125x80x8
0	36	24	№12,5: 125x125x12	№12,5/8: 125x80x10

Примітка. Якщо номер схеми має парне число, то ескіз поперечного перерізу необхідно вибирати за рис. 1.1, а якщо непарне, то за рис. 1.2.

1.2 Приклад розрахунку задачі

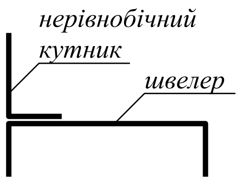


Рисунок 1.3 − Ескіз заданого складного перерізу

Нехай заданий переріз складається зі швелера №20 (ГОСТ 8210-72) і нерівнобічного кутника №16/10 (ГОСТ 8510-72), ескіз якого зображено на рис. 1.3. Згідно таблиць сортаменту зазначених стандартів виписуємо розміри і геометричні характеристики швелера (рис. 1.4, *а*) та нерівнобічного кутника (рис. 1.4, *б*), які наведені в табл. 1.2.

Таблиця 1.2 – Основні дані профілів складного перерізу

Профіль	№	h, B, см	b, см	d, см	F, см^2	I_x, см^4	I_y, см^4	$I_{u_{min}}$, см^4	y_0, см	x_0, z_0 см	$tg\ \alpha$
Швелер	20	20	7,6	0,52	23,4	1520	113	–	–	2,07	–
Кутник	16/10	16	10	1,0	25,3	667	204	121	5,23	2,28	0,39

Після цього накреслюємо заданий переріз в масштабі 1:2 і проводимо центральні осі, x_1y_1 та x_2y_2 кожного профілю з позначенням їх центрів ваги o_1,o_2. Індекси 1 і 2 прийняті відповідно нумерації профілів в заданому складному перерізі (рис. 1.5).

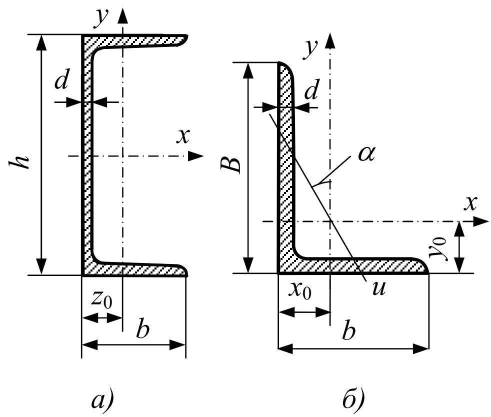


Рисунок 1.4 − Схеми заданих профілів згідно таблиць сортаменту

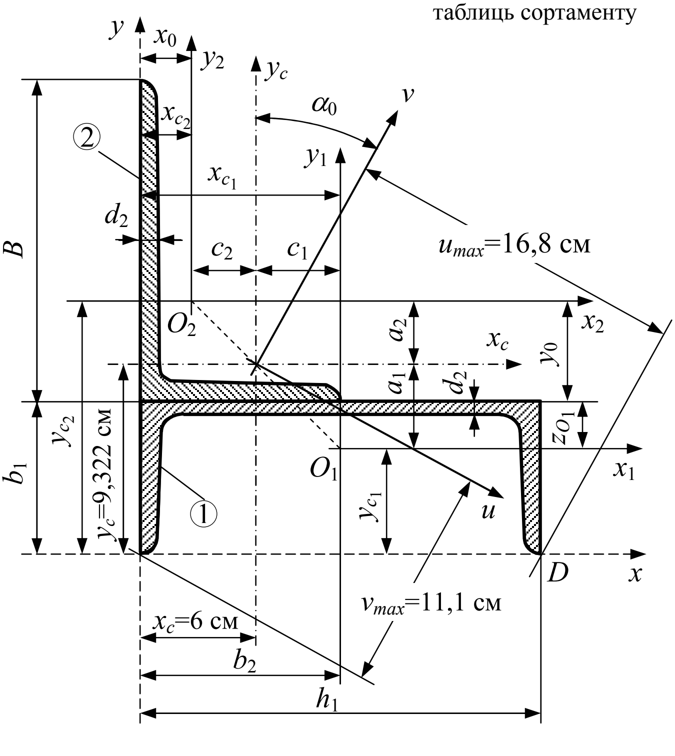


Рисунок 1.5 − Схема заданого складного перерізу

1.2.1 *Визначення положення центру ваги складного перерізу*

Для визначення положення центру ваги перерізу необхідно вибрати та провести на кресленні систему допоміжних осей і в цій системі визначити координати центрів ваги кожного профілю, тобто x_{c1}, y_{c1} та x_{c2}, y_{c2}.

Допоміжні осі можна вибирати по-різному, але для уникнення помилок зі знаками, їх проводять по крайнім лівим і крайнім нижнім точкам перерізу. Тоді координати центрів ваги o_1, o_2 будуть додатними. На рис. 1.5 допоміжні осі позначені x, y (пунктир), тому координати центрів ваги швелера і кутника визначаємо так

$$x_{c1}=h_1/2=20/2=10 \text{ см}; \quad y_{c1}=b_1-z_{o1}=7{,}6-2{,}07=5{,}53 \text{ см};$$

$$x_{c2}=x_o=2{,}28 \text{ см}; \quad y_{c2}=b_1+y_o=7{,}6+5{,}23=12{,}83 \text{ см},$$

де h_1, b_1, z_{o1}, x_o, y_o − параметри швелера і кутника (рис. 1.5).

Тепер за відомими формулами визначаємо координати центру ваги складного перерізу

$$x_c = \frac{S_y}{F} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot x_{c_i}}{\sum_{i=1}^{n} F_i} = \frac{F_1 \cdot x_{c_1} + F_2 \cdot x_{c_2}}{F_1 + F_2} =$$

$$= \frac{23{,}4 \cdot 10 + 25{,}3 \cdot 2{,}28}{23{,}4 + 25{,}3} = 5{,}989 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{S_x}{F} = \frac{\sum_{i=1}^{n} F_i \cdot y_{c_i}}{\sum_{i=1}^{n} F_i} = \frac{F_1 \cdot y_{c_1} + F_2 \cdot y_{c_2}}{F_1 + F_2} =$$

$$= \frac{23{,}4 \cdot 5{,}53 + 25{,}3 \cdot 12{,}83}{23{,}4 + 25{,}3} = 9{,}322 \text{ см},$$

де F_1, F_2 − площі поперечних перерізів швелера і кутника.

За результатами обчислення положення центру ваги перерізу проводимо на кресленні систему центральних осей x_c, y_c (штрихпунктир). Точка перетину цих осей є центр ваги складного перерізу. З метою перевірки правильності розрахунку необхідно упевнитись в тому, що точка перетину центральних осей лежить на прямій, яка з'єднує центри ваги o_1 і o_2. Тепер визначимо в системі осей x_c, y_c координати центрів ваги швелера та кутника

$$c_1 = x_{c_1} - x_c = 10 - 5{,}989 = 4{,}011 \text{ см};$$

$$a_1 = y_{c_1} - y_c = 5{,}53 - 9{,}322 = -3{,}792 \text{ см};$$

$$c_2 = x_{c_2} - x_c = 2{,}28 - 5{,}989 = -3{,}709 \text{ см};$$

$$a_2 = y_{c_2} - y_c = 12{,}83 - 9{,}322 = 3{,}508 \text{ см}.$$

1.2.2 *Визначення моментів інерції відносно центральних осей*

Момент інерції складного перерізу відносно центральних осей визначається як сума моментів інерції кожного профілю, з яких складається заданий переріз, тобто

$$I_{x_c} = I_{x_c}^{\mathrm{I}} + I_{x_c}^{\mathrm{II}} \ ;$$

$$I_{y_c} = I_{y_c}^{\mathrm{I}} + I_{y_c}^{\mathrm{II}} \ ;$$

$$I_{x_c y_c} = I_{x_c y_c}^{\mathrm{I}} + I_{x_c y_c}^{\mathrm{II}}$$

де I_{x_c} , I_{y_c} − осьові моменти інерції;

$I_{x_c y_c}$ − відцентровий момент інерції.

В свою чергу моменти інерції відносно центральних осей кожного профілю визначаються за формулами паралельного переносу осей, наприклад,

$$I_{x_c}^{\mathrm{I}} = I_{x_1} + a_1^2 F_1 \, ;$$

$$I_{y_c}^{\mathrm{I}} = I_{y_1} + c_1^2 F_1 \, ;$$

$$I^{\mathrm{I}}_{x_c y_c} = I_{x_1 y_1} + a_1 c_1 F_1,$$

де I_{x_1}, I_{y_1} − осьові моменти інерції швелера відносно своїх центральних осей x_1 y_1 (рис. 1.5);

$I_{x_1 y_1}$ − відцентровий момент інерції швелера відносно осей x_1, y_1.

Якщо підставити відповідні числові значення у наведені залежності, будемо мати наступне.

1.2.2.1 *Осьові моменти інерції*

$$I_{x_c} = I^{\mathrm{I}}_{x_c} + I^{\mathrm{II}}_{x_c} = 449{,}475 + 978{,}343 = 1427{,}82\ \text{см}^4;$$

$$I^{\mathrm{I}}_{x_c} = I_{x_1} + a_1^2 \cdot F_1 = 113 + (-3{,}792)^2 \cdot 23{,}4 = 449{,}475\ \text{см}^4;$$

$$I^{\mathrm{II}}_{x_c} = I_{x_2} + a_2^2 \cdot F_2 = 667 + 3{,}508^2 \cdot 25{,}3 = 978{,}343\ \text{см}^4;$$

$$I_{y_c} = I^{\mathrm{I}}_{y_c} + I^{\mathrm{II}}_{y_c} = 1896{,}462 + 552{,}044 = 2448{,}507\ \text{см}^4;$$

$$I^{\mathrm{I}}_{y_c} = I_{y_1} + c_1^2 \cdot F_1 = 1520 + 4{,}011^2 \cdot 23{,}4 = 1896{,}462\ \text{см}^4;$$

$$I^{\mathrm{II}}_{y_c} = I_{y_2} + c_2^2 \cdot F_2 = 204 + (-3{,}709)^2 \cdot 25{,}3 = 552{,}044\ \text{см}^4,$$

де I_{x_1}=113 см^4, I_{y_1}=1520 см^4 − моменти інерції швелера відносно осей x, y (рис. 1.4, *а*), які позначені на рис. 1.5 як осі x_1 та y_1 відповідно, тобто швелер в складному перерізі має горизонтальне положення, а не таке, як в таблиці сортаменту[1].

1.2.2.2 *Відцентровий момент інерції*

$$I_{x_c y_c} = I^{\mathrm{I}}_{x_c y_c} + I^{\mathrm{II}}_{x_c y_c} = -355{,}91 - 542{,}08 = -897{,}99\ \text{см}^4.$$

---

[1] Це застереження відноситься і до двотавра на схемах IX, X (рис. 1.1), III, V (рис. 1.2) та швелера на схемах I, VII, IX (рис. 1.2). Позначення центральної системи координат нерівнобічного кутника (рис. 1.2) співпадає з даними таблиць сортаменту тільки для схем I, III, VII, IX.

$$I^{\mathrm{I}}_{x_c y_c} = I_{x_1 y_1} + a_1 c_1 F_1 = 0 + (-3{,}792)\cdot 4{,}011\cdot 23{,}4 = -355{,}91\ \text{см}^4;$$

$$I^{\mathrm{II}}_{x_c y_c} = I_{x_2 y_2} + a_2 c_2 F_2 = -212.9 + 3{,}508\cdot\left(-3{,}709\right)\cdot 25{,}3 = -542{,}08\ \text{см}^4,$$

де $I_{x_1 y_1}$ − відцентровий момент інерції швелера відносно своїх осей x_1, y_1;

$I_{x_2 y_2}$ − відцентровий момент інерції кутника відносно своїх осей x_2, y_2.

Так як осі x_1, y_1 швелера є головними центральними осями (вісь x_1 є віссю симетрії), то $I_{x_1 y_1}$=0. Це стосується також і двотаврового профілю.

Осі x_2, y_2 нерівнобічного кутника не є головними, тому відцентровий момент інерції відносно таких осей можна визначити за формулою

$$I_{x_2 y_2} = (I_x - I_{u_{min}})\cdot tg\alpha = (667-121)\cdot 0{,}39 = -212{,}9\ \text{см}^4.$$

Знак відцентрового моменту визначається знаком відцентрових моментів окремих частин кутника, розташованих у відповідних квадрантах центральної системи осей x, y (рис. 1.6, *а*), тобто

$$I_{xy} = \int\limits_F xydF = \int\limits_{F_{\mathrm{II}}} xydF + \int\limits_{F_{\mathrm{III}}} xydF + \int\limits_{F_{\mathrm{IV}}} xydF = I^{\mathrm{II}}_{xy} + I^{\mathrm{III}}_{xy} + I^{\mathrm{IV}}_{xy}.$$

Так як сума площ окремих частин кутника (F_{II}+F_{IV}) з від’ємними добутками координат xy більша ніж площа F_{III} з додатнім добутком xy, то відцентровий момент кутника згідно рис. 1.6, *а* є від’ємним, тобто I_{xy}<0.

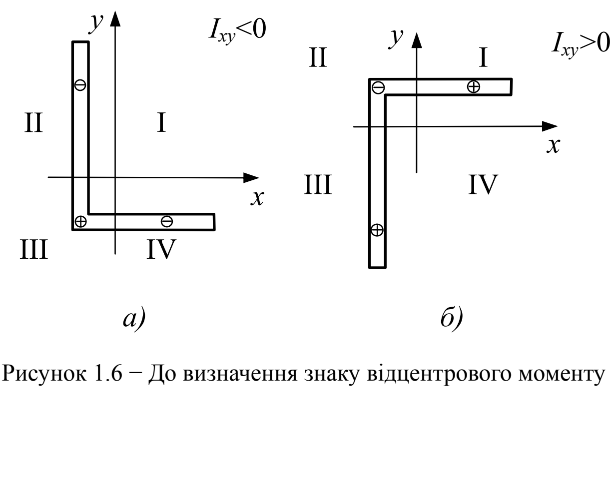


Рисунок 1.6 − До визначення знаку відцентрового моменту

Порівнюючи зображення нерівнобічного кутника і напрям центральних осей x_2, y_2 на рис. 1.5 та x, y на рис. 1.6, *а*, можна дійти висновку, що $I_{x_2 y_2}<0$. Для іншого напрямку центральних осей або іншого розташування кутника, наприклад, зображеного на рис. 1.6, *б*, можна визначити, що відцентровий момент кутника в цьому випадку є доданій ($I_{xy}>0$.)

Описані вище пояснення щодо знаку відцентрового моменту стосуються також і рівнобічного кутника (рис. 1.7), модуль якого визначається формулою

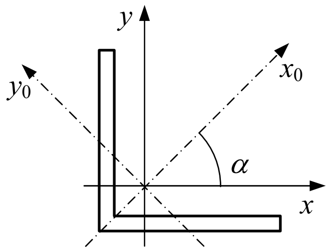


Рисунок 1.7 − До визначення відцентрового моменту рівнобічного кутника

$$I_{xy} = \frac{I_{x_0\,max} - I_{y_0\,min}}{2} sin\,2\alpha,$$

де $I_{x_{0max}}$, $I_{x_{0min}}$ − головні моменти інерції відносно головних осей x_0, y_0.

Головна вісь x_0 є віссю симетрії, тому кут α=45°, а $sin2\alpha$=1.

1.2.3 *Визначення положення головних осей інерції складного перерізу*

Положення головних осей інерції визначається формулою

$$tg2\alpha_0 = \frac{2I_{x_c y_c}}{I_{y_c} - I_{x_c}}$$

або

$$tg2\alpha_0 = -\frac{2I_{x_c y_c}}{I_{x_c} - I_{y_c}}.$$

Після підстановки значень I_{x_c}, I_{y_c}, $I_{x_c y_c}$ будемо мати

$$tg2\alpha_0 = \frac{2(-897{,}99)}{2448{,}507 - 1427{,}82} = -1{,}75958\,;$$

$$\alpha_0=\tfrac{1}{2}arctg(-1{,}75958)=-30{,}2°.$$

Знак мінус вказує на те, що головні осі, відносно центральних, необхідно повернути за годинниковою стрілкою.

На рис. 1.5 головні осі позначені як u, v (жирна суцільна лінія). З метою перевірки правильності визначення кута α_0 обчислимо відцентровий момент відносно головних осей, який повинен дорівнювати нулю

$$I_{uv}=\frac{I_{x_c}-I_{y_c}}{2}sin2\alpha_0+I_{x_cy_c}cos2\alpha_0=$$
$$=\frac{1427{,}82-2448{,}507}{2}\cdot\left(-0{,}86941\right)+\left(-897{,}99\right)\cdot 0{,}4941=$$
$$=8{,}8\cdot10^{-4}\approx 0.$$

Головні центральні осі мають найбільш практичне значення, так як розрахунок напружень і деформацій в системі цих осей набагато спрощується. Всі подальші розрахунки в óпорі матеріалів будемо виконувати в системі головних центральних осей.

1.2.4 *Визначення головних моментів інерції*

$$I_{\substack{max\\min}}=\frac{I_{x_c}+I_{y_c}}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{I_{x_c}-I_{y_c}}{2}\right)^2+I_{x_cy_c}^2}=$$
$$=\frac{1427{,}82+2448{,}507}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1427{,}82-2448{,}507}{2}\right)^2+\left(-897{,}99\right)^2}=$$
$$=1938{,}164\pm1032{,}878;$$

$$I_{max}=1938{,}164+1032{,}878=2971{,}042\text{ см}^4\rightarrow I_v;$$
$$I_{min}=1938{,}164-1032{,}878=905{,}286\text{ см}^4\rightarrow I_u;$$

Так як $I_{y_c}>I_{x_c}$, то максимальний момент буде відносно головної осі v, яка відхиляється від центральної осі y_c на кут α_0.

1.2.5 *Визначення моментів опору*

$$W_u = \frac{I_u}{v_{max}} = \frac{905{,}286}{11{,}1} = 81{,}56 \text{ см}^3;$$

$$W_v = \frac{I_v}{u_{max}} = \frac{2971{,}042}{16{,}8} = 176{,}8 \text{ см}^3,$$

де v_{max}, u_{max} – відстані від головних осей до найбільш віддалених точок перерізу, які можна відшукувати за допомогою трикутника та лінійки безпосередньо на кресленні або за аналітичними формулами

$$u = y\, sin\,\alpha + x\, cos\,\alpha;$$

$$v = y\, cos\,\alpha - x\, sin\,\alpha.$$

Наприклад, координати крайньої точки *D* (рис. 1.5) в системі центральних осей будуть такими

$$x_D = c_1 + h_1/2 = 4{,}011 + 10 = 14{,}011 \text{ см};$$

$$y_D = -y_c = -9{,}322 \text{ см};$$

$$\text{кут } \alpha = \alpha_0 = -30{,}2°,$$

тоді $u_{max} = -9{,}322 \cdot sin(-30{,}2) + 14{,}011 \cdot cos(-30{,}2) = 16{,}8$ см.

Аналогічно обчислюють або відшукують відстані інших крайніх точок і серед них вибирають максимальні.

[1, С. 23−35; 3, С. 154−162; 4, С. 5−6].

2 ПОБУДОВА ЕПЮР ПОЗДОВЖНІХ СИЛ І ПЕРЕМІЩЕНЬ ПРИ РОЗТЯГАННІ СХІДЧАСТОГО СТРИЖНЯ З УРАХУВАННЯМ ВЛАСНОЇ ВАГИ

2.1 Умова задачі

Сталевий стрижень находиться під дією поздовжньої сили P і власної ваги. Модуль пружності матеріалу стрижня E=2·10^5 мПа, питома вага γ=78 кН/м^3.

При виконанні задачі необхідно:

а) використовуючи метод перерізів, побудувати епюру поздовжніх сил $N_{(z)}$;

б) побудувати епюру переміщень $\Delta l(z)$.

Розрахункові схеми та вихідні дані наведені на рис. 2.1 і в табл. 2.1.

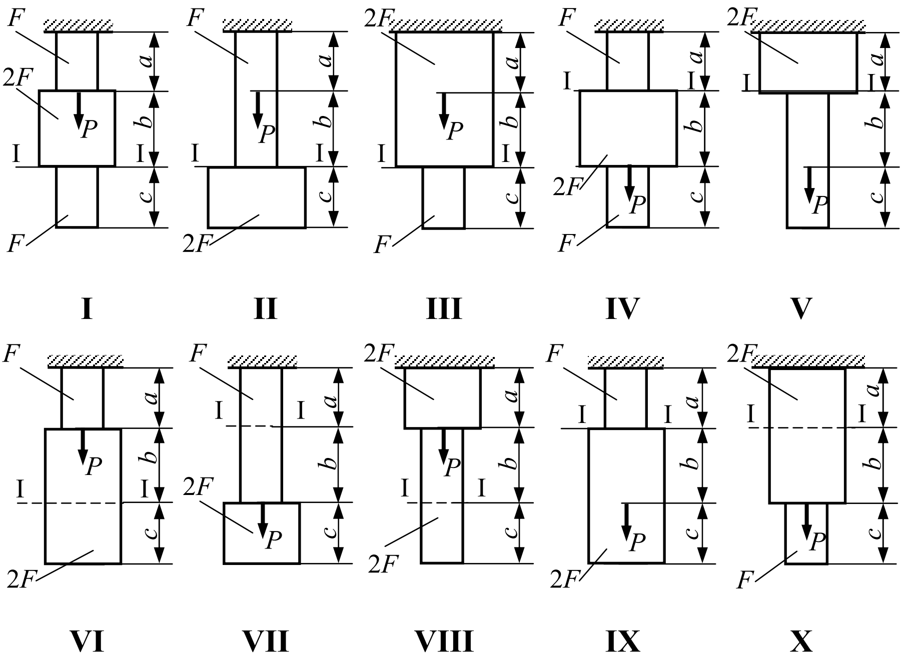


Рисунок 2.1 − Розрахункові схеми

Таблиця 2.1 − Вихідні дані

№ рядка	Площа, $F \cdot 10^4$ м^2	Довжина ділянок, м			Зосереджена сила P, кН
		а	*в*	*с*	
1	11	2,1	2,1	1,1	1,1
2	12	2,2	2,2	1,2	1,2
3	13	2,3	2,3	1,3	1,3
4	14	2,4	2,4	1,4	1,4
5	15	2,5	2,5	1,5	1,5
6	16	2,6	2,6	1,6	1,6
7	17	2,7	2,7	1,7	1,7
8	18	2,8	2,8	1,8	1,8
9	19	2,9	2,9	1,9	1,9
0	20	3,0	3,0	2,0	2,0

2.2 Приклад виконання задачі

Вихідні данні:

$$P=1{,}2\ \text{кН};\quad F=20\cdot 10^{-4}\ \text{м}^2;\quad a=2{,}2\ \text{м};\quad b=3\ \text{м};$$

$$c=1{,}2\ \text{м};\quad E=2\cdot 10^5\ \text{МПа};\quad \gamma=78\ \text{кН/м}^3;$$

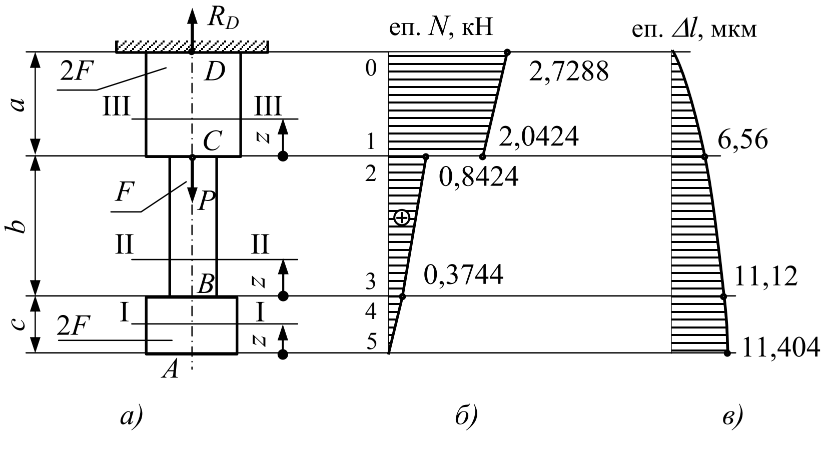


Рисунок 2.2 − Розрахункова схема і епюри повздовжніх сил та переміщень

2.2.1 ***За вихідними даними накреслимо розрахункову схему*** (рис. 2.2, *а*), в певному масштабі, наприклад: довжина (*а, в, с*) − 1 м=10 мм; товщина (діаметр) стрижня, що відповідає площі, − $10\cdot10^{-4}$ $м^2$=5 мм.

2.2.2 ***Побудова епюри поздовжніх сил***

Розпочинаючи будувати епюру, стрижень поділяють на силові ділянки. Границями ділянок навантаження є місця (точки) прикладення зовнішніх сил та зміна розмірів поперечного перерізу стрижня.

В нашому випадку маємо три ділянки: *AB, BC* та *CD* (рис. 2.2, *а*). Поздовжня (осьова) сила вважається додатною, якщо вона спричинює розтягання, та від'ємною, якщо вона спричинює стискання.

Поздовжню силу в довільному перерізі стрижня знаходимо з рівняння рівноваги, яке записуємо для відсіченої частини у вигляді

$$N+\sum P_z=0, \qquad (2.1)$$

де $\sum P_z$ − алгебраїчна сума проекції на вісь стрижня всіх зовнішніх сил, які діють по одну сторону від перерізу.

Початок координат для кожної ділянки вибираємо в точках *A, B, C*.

Проведемо довільний переріз I−I на ділянці *AB* (рис. 2.2, *а*) та, умовно відкинувши верхню частину стрижня, розглянемо рівновагу нижньої (рис. 2.3).

На цю частину діє відшукуване зусилля *N* (додатне, направлене від перерізу в сторону розтягання) і вага відсіченої частини $\gamma 2\cdot F\cdot z$ (направлена униз, як зовнішня сила).

Складаючи рівняння рівноваги, будемо мати

$$N_{(I)}-\gamma 2\cdot F\cdot z=0; \quad N_{(I)}=\gamma 2\cdot F\cdot z.$$

Ділянка AB (переріз I−I):

$$0\le z\le c$$

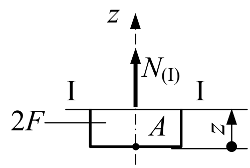


Рисунок 2.3 − Відсічена нижня частина стрижня

Це рівняння похилої лінії до осі стрижня.

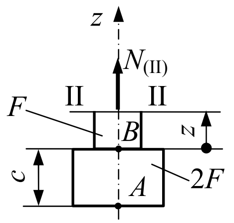
При z=0; → точка *A* або 5 (рис. 2.2, *б*): $N_{(A)}=N_5=0$;

$z=c$; → точка *B* або 4: $N_{(B)}=N_4=\gamma 2\cdot F\cdot z=78\cdot2\cdot20\cdot10^{-4}\cdot1{,}2=0{,}3744$ кН.

Виконуючи аналогічні дії на ділянках *BC* і *CD*, визначаємо поздовжнє зусилля в контрольних точках 3, 2, 1, 0 (рис. 2.2, *б*).

Ділянка BC (переріз II–II): $N_{(II)}-\gamma 2\cdot F\cdot c-\gamma F\cdot z=0;$

$0\le z\le \text{в}$ $N_{(II)}=\gamma 2\cdot F\cdot c+\gamma F\cdot z.$



При $z=0$; → точка B або 3:

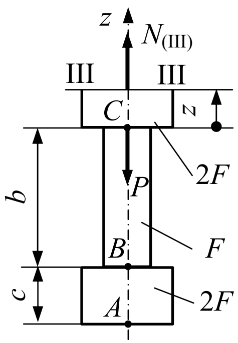
$$N_{(B)}=N_3=\gamma 2\cdot F\cdot c=0{,}3744 \text{ кН};$$

$z=\text{в}$; → точка C або 2:

$$N_{(C)}=N_2=0{,}3744+78\cdot 20\cdot 10^{-4}\cdot 3=0{,}8424 \text{ кН}.$$

Ділянка CD (переріз III–III): $N_{(III)}-P-\gamma 2\cdot F\cdot c-\gamma F\cdot \text{в}-\gamma 2\cdot F\cdot z=0;$

$0\le z\le a$ $N_{(III)}=P+\gamma F(2\cdot c+\text{в})+\gamma 2\cdot F\cdot z.$



При $z=0$; → точка C або 1:

$$N_{(C)}=N_1=P+\gamma F(2\cdot c+\text{в})=1{,}2+0{,}8424=$$
$$=2{,}0424 \text{ кН};$$

$z=a$; → точка D або 0:

$$N_{(D)}=N_0=P+\gamma F(2\cdot c+\text{в})+\gamma 2\cdot F\cdot a=$$
$$=2{,}0424+78\cdot 2\cdot 20\cdot 10^{-4}\cdot 2{,}2=$$
$$=2{,}7288 \text{ кН}.$$

Застосовуючи метод перерізів, можна було б на ділянці *CD* залишити верхню частину стрижня (рис. 2.4), тобто довільну координату z відрахувати від точки *D* униз. В цьому випадку необхідно спочатку визначити реакцію R_D в закріпленні стрижня, так як ця реакція відноситься до числа зовнішніх сил, які діють на залишену (верхню) частину стрижня.

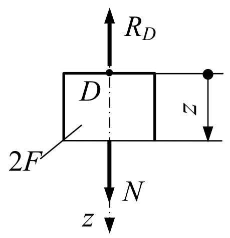


Рисунок 2.4 – Відсічена верхня частина стрижня

Поздовжнє зусилля $N_{(D)}=N_0$ є найбільше і дорівнює реакції R_D в закріпленні стрижня (рис. 2.2, *а*). За результатами розрахунку будуємо графік, що показує, як змінюється поздовжня сила по довжині стрижня. Для цього проведемо вертикальну лінію паралельно осі стрижня і відкладемо в довільно вибраному масштабі (наприклад, 1 кН=10мм) значення поздовжніх сил в точках 5, 4, 3, 2, 1, 0. Додатну силу N (розтягання) відкладаємо вправо від вертикальної лінії. Побудований графік називають *епюрою поздовжніх сил* (рис. 2.2, *б*).

Епюру прийнято штрихувати перпендикулярно осі стрижня. Кожна лінія штриховки (ордината графіка) в даному масштабі виражає значення поздовжньої сили у відповідному (розташованому проти нього) поперечному перерізі стрижня.

На всіх ділянках маємо рівняння похилих до осі стрижня прямих. Проте, оскільки площі поперечних перерізів на ділянках різні, нахил епюри на ділянках *AB* та *CD* неоднаковий, а на ділянках *AB* і *CD* похилі прямі повинні бути паралельними (рис. 2.2, *б*).

В точках дії зосереджених зовнішніх сил на епюрі мають бути “*стрибки*”, розмір яких дорівнює величині діючої сили (точка *C*, рис. 2.2, *б*).

2.2.3 *Побудова епюри переміщень*

В загальному вигляді переміщення при розтяганні (стисканні) визначаються за формулою

$$\Delta l = \int_l \frac{N_{(z)} dz}{EF} \tag{2.2}$$

Якщо стрижень має декілька силових ділянок, то формула (2.2) набуває вигляду

$$\Delta l = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} \int_{l_i} \frac{N_{(z)} dz}{EF_i}, \tag{2.3}$$

де EF_i − жорсткість поперечного перерізу стрижня на i-й ділянці;
l_i − довжина i-ї ділянки;
n − кількість ділянок.

Зважаючи на те, що в межах кожної ділянки жорсткість поперечного перерізу є величина стала, а інтегрування функції $N(z)=f(z)$ зводиться до обчислення площі епюри поздовжніх сил на кожній ділянці, то формулу для визначення переміщень запишемо так

$$\Delta l = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\omega_{N(i)}}{EF_i}, \tag{2.4}$$

де $\omega_{N(i)}$ − площа епюри N на i-й ділянці.

Початкове переміщення визначається за граничними умовами, тобто вибирається такий переріз, де воно відоме. Для нашого прикладу це є жорстке закріплення, точка *D* (рис. 2.2, *а*).

В жорсткому закріпленні $\Delta l_{(D)}=0$. Далі визначимо переміщення в позначених точках *C*, *B*, *A*

$$\Delta l_{(C)} = \Delta l_{(D)} + \frac{\omega_{N(DC)}}{E \cdot 2F} = 0 + \frac{0{,}5\left(N_0 + N_1\right) \cdot a}{E \cdot 2F} =$$

$$= \frac{0{,}5\left(2{,}7288 + 2{,}0424\right) \cdot 10^{-3} \cdot 2{,}2}{2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = 6{,}5604 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

Для зручності побудови епюри переміщень переведемо метри в мікрометри, тобто визначене переміщення помножимо на 10^6. Тоді

$$\Delta l_{(C)}=6{,}5604 \text{ мкм;}$$

$$\Delta l_{(B)} = \Delta l_{(C)} + \frac{\omega_{N(CB)}}{E \cdot F} = 6{,}5604 + \frac{0{,}5\left(N_2 + N_3\right) \cdot b}{E \cdot F} =$$

$$= 6{,}5604 + \frac{0{,}5\left(0{,}8424 + 0{,}3744\right) \cdot 10^{-3} \cdot 3}{2 \cdot 10^5 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} \cdot 10^6 =$$

$$= 6{,}5604 + 4{,}563 = 11{,}123 \text{ мкм;}$$

$$\Delta l_{(A)} = \Delta l_{(C)} + \frac{\omega_{N(BA)}}{E \cdot 2F} = 11{,}123 + \frac{0{,}5\left(N_4 + N_5\right) \cdot c}{E \cdot 2F} =$$

$$= 11{,}123 + \frac{0{,}5\left(0{,}3744 + 0\right) \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}2}{2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} \cdot 10^6 =$$

$$= 11{,}123 + 0{,}2808 = 11{,}404 \text{ мкм.}$$

За результатами розрахунку будуємо епюру переміщень, яка змінюється по довжині стрижня за законом квадратичної параболи (рис. 2.2, *в*).

Масштаб переміщень: 1 мкм =1 мм.

[1, С. 42−43, 123−128; 3, С. 22−31, 52; 4, С. 6−7].

3 ПРОЕКТУВАЛЬНИЙ РОЗРАХУНОК СТРИЖНЯ ПРИ РОЗТЯГАННІ АБО СТИСКАННІ

3.1 Умова задачі

Сталевий стрижень навантажений розподіленим вантажем q та зосередженими силами P_1 і P_2.

Потрібно:

а) побудувати епюру поздовжніх сил;
б) за умовою міцності визначити розміри круглого поперечного перерізу стрижня сталої та змінної жорсткості;
в) побудувати епюру переміщень для ступінчастого стрижня.

Загальні дані:

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \quad [\sigma] = 160 \text{ МПа};$$

Розрахункові схеми та вихідні дані наведені на рисунку 3.1 і в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1 − Вихідні дані

№ рядка	Довжина, l м	Розподілене навантаження, q кН/м	Зосереджені сили, кН	
			P_1	P_2
1	0,2	50	10	35
2	0,3	40	20	15
3	0,4	60	30	20
4	0,5	80	40	25
5	0,6	70	50	10
6	0,3	90	40	15
7	0,2	100	30	20
8	0,4	40	20	25
9	0,6	50	10	30
0	0,5	60	15	40

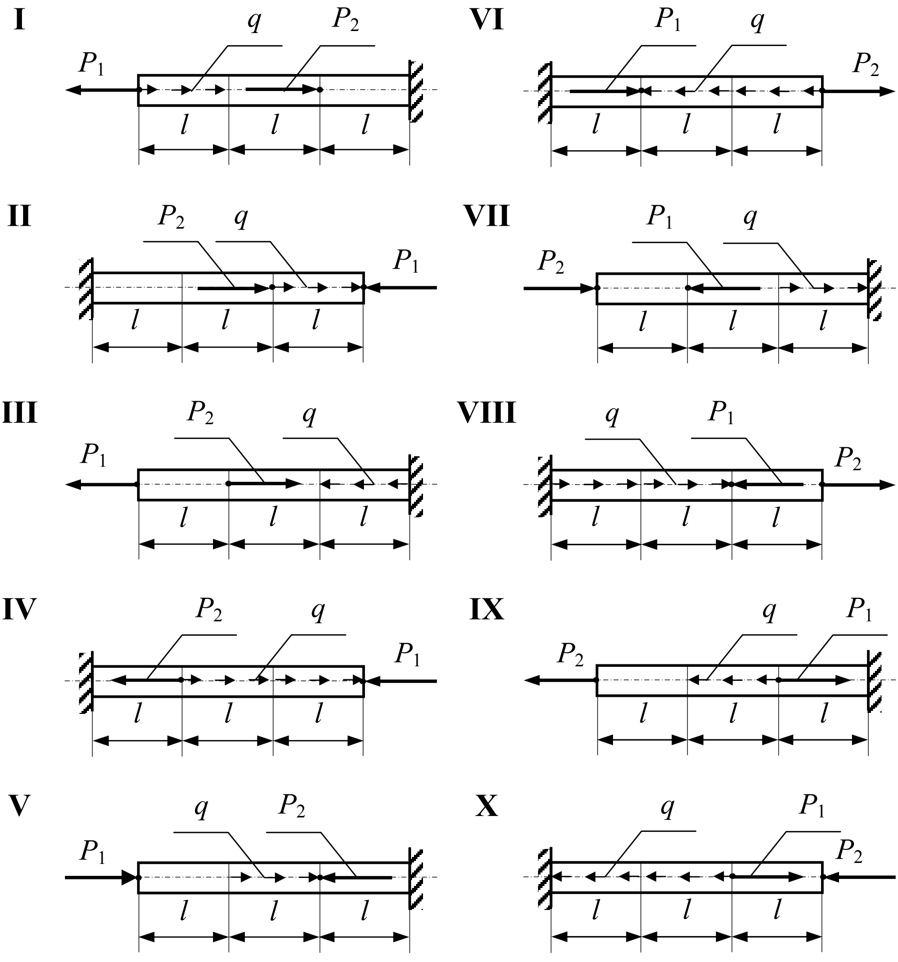


Рисунок 3.1 − Розрахункові схеми

3.2 Приклад розрахунку

Вихідні данні:

$$q=100 \text{ кН/м}; \quad P_1=10 \text{ кН}; \quad P_2=30 \text{ кН};$$

$$l=0{,}5 \text{ м}; \quad E=2\cdot10^5 \text{ МПа}; \quad [\sigma]=160 \text{ МПа}.$$

В певному масштабі виконуємо креслення розрахункової схеми, яка показана на рис. 3.2, *а*.

3.2.1 ***Побудова епюр поздовжніх сил*** (рис. 3.2)

Аналіз розрахункової схеми дає можливість встановити, що вона має три силових ділянки: *AB*, *BC* і *CD*.

Для побудови епюри поздовжніх сил застосовуємо метод перерізів. Щоб надати можливість розглянути ліву чи праву відсічену частину стрижня для відповідного перерізу, спочатку необхідно визначити реактивне зусилля, тобто реакцію R_A в жорсткому закріпленні.

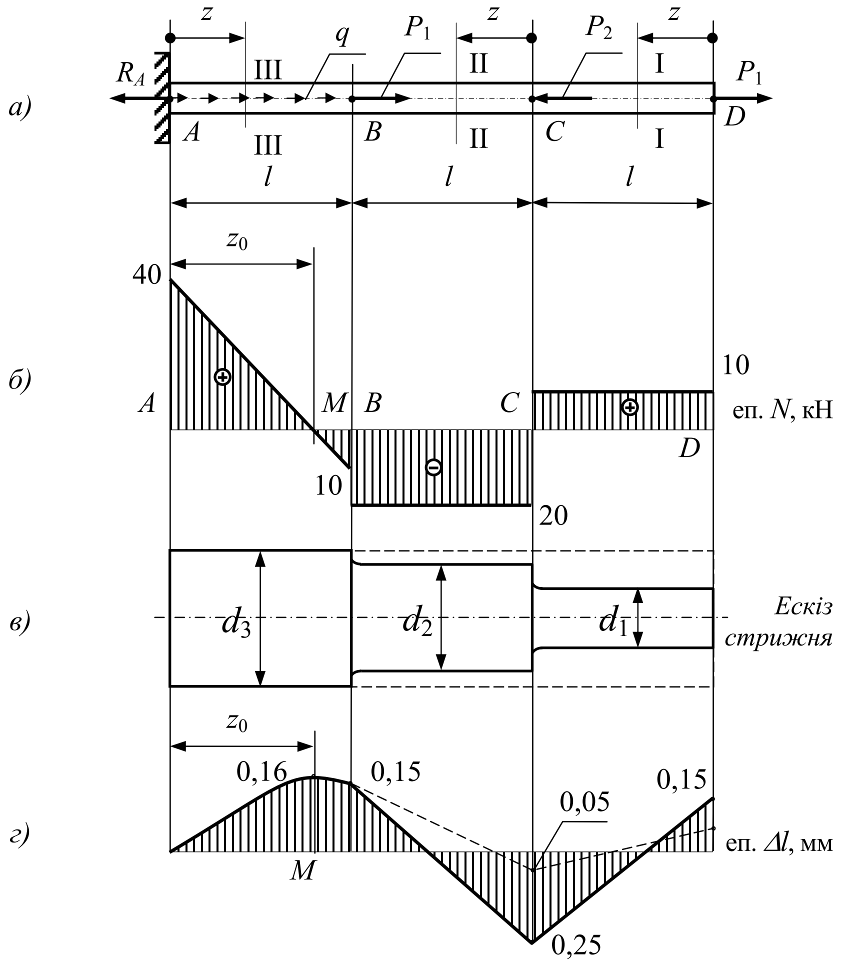


Рисунок 3.2 – Розрахункова схема і епюри повздовжніх сил та переміщень

Запишемо рівняння рівноваги всього стрижня як проекцію всіх сил на горизонтальну вісь, включаючи і R_A,

$$\Sigma P_{гор}=0; \quad R_A-lq-2P_1+P_2=0,$$

звідки $R_A=l\cdot q+2P_1-P_2=100\cdot1{,}5+2\cdot10-30=40$ кН.

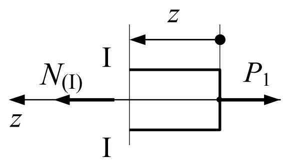
Знак „+” вказує на те, що попередній напрямок R_A співпадає з дійсним.

Тепер проводимо послідовно перерізи з довільною координатою z на кожній ділянці і записуємо для відсіченої частини рівняння рівноваги, загальний вид якого − формула 2.1 (с. 19).

Умовно відкинемо ліву частину стрижня і розглянемо праву його частину, на яку діє задане зусилля P_1 і в перерізі I−I поздовжня сила $N_{(\mathrm{I})}$.

Ділянка CD (переріз I−I):

$$0\le z\le l$$



Поздовжню силу вважаємо додатною, тобто направленою від перерізу в бік розтягання.

Для відсіченої частини записуємо рівняння рівноваги

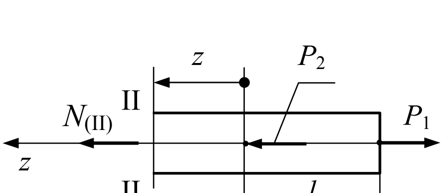
$$N_{(\mathrm{I})}-P_1=0,$$

звідки $N_{(\mathrm{I})}=P_1=10$ кН$=const.$

Таким чином на ділянці *CD* поздовжня сила є величиною сталою і додатною, тобто діє на розтягання (рис. 3.2, *б*).

Ділянка BC (переріз II−II):

$$0\le z\le l$$



Розглянемо праву відсічену частину і запишемо рівняння рівноваги

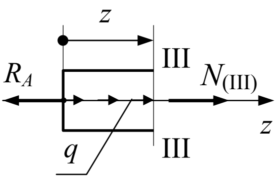
$$N_{(\mathrm{II})}+P_2-P_1=0;$$

$$N_{(\mathrm{II})}=P_1-P_2=10-30=-20\ \text{кН}=const.$$

На ділянці *BC* поздовжня сила також є величиною сталою, але від’ємною, тобто діє на стискання (рис. 3.2, *б*).

Ділянка AB (переріз III−III):

$0 \le z \le l$



Розглянемо ліву відсічену частину і запишемо рівняння рівноваги

$$N_{(III)}+q\cdot z-R_A=0,$$

звідки $N_{(III)}=R_A-q\cdot z=40-100\cdot z$.

Отримане рівняння показує, що в поперечних перерізах ділянки *AB* поздовжня сила змінюється за лінійним законом, тобто епюра окреслена прямою, нахиленою до осі стрижня (рис. 3.2, *б*).

Визначимо значення $N_{(III)}$ в крайніх точках ділянки

$$z=0; \rightarrow N_{(A)}=40 \text{ кН};$$

$$z=l; \rightarrow N_{(B)}=40-100\cdot l=40-100\cdot 0{,}5=-10 \text{ кН}.$$

Координату z_0, як точку перетину нахиленої лінії з віссю стрижня, визначаємо з умови, що при $z=z_0$, $N_{(III)}=0$, тобто

$$0=40-100\, z_0; \rightarrow z_0=40/100=0{,}4 \text{ м}.$$

Штриховка епюри поздовжніх сил виконується перпендикулярно осі стрижня.

Для перевірки правильності побудови епюри поздовжньої сили необхідно користуватися наступними правилами:

- на ділянках, де відсутнє розподілене навантаження ($q=0$), поздовжня сила є сталою ($N=const$), а епюра окреслена прямою, паралельною осі стрижня (ділянки *CD, BC*; рис. 3.2, *б*);
- на ділянках, де діє рівномірно розподілене навантаження ($q=const$), поздовжня сила змінюється за лінійним законом ($N=f(z)$), а епюра окреслена прямою, нахиленою до осі стрижня (ділянка *AB*; рис. 3.2, *б*);
- в точках прикладання зосереджених сил на епюрі N мають місце стрибки на величину прикладених сил (точки *A*, *B, C*, *D*; рис. 3.2, *б*).

3.2.2 ***Визначення діаметра круглого поперечного перерізу стрижня сталої та змінної жорсткості***

Умова міцності при розтяганні або стисканні має такий вид

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{F} \le [\sigma],$$

де σ_{max} − максимальне напруження;
N_{max} − абсолютне максимальне зусилля на тій чи іншій ділянці;
F − площа поперечного перерізу;
$[\sigma]$ − допустиме напруження.

Для визначення діаметра стрижня сталої жорсткості знаходимо на епюрі поздовжньої сили (рис. 3.2, *б*) найбільше за абсолютною величиною значення N_{max}. Це зусилля має місце на ділянці *АВ* в закріпленні, тобто N_{max}=|40| кН.

Із умови міцності визначаємо площу F_3 поперечного перерізу (ділянка *АВ*)

$$F_3 \ge \frac{N_{max}}{[\sigma]} \ge \frac{40 \cdot 10^{-3}}{160} \ge 2{,}5 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^2\text{=2,5 см}^2.$$

Визначаємо діаметр стрижня

$$F_3 = \frac{\pi d^2}{4} = 2{,}5\ \text{см}^2;$$

$$d_3 = \sqrt{\frac{4F_3}{\pi}} = 1{,}13\sqrt{F_3} = 1{,}13\sqrt{2{,}5} = 1{,}7867\ \text{см},$$

тобто d_3=17,867 мм.

За даними розмірами креслимо в певному масштабі ескіз стрижня (рис. 3.2, *в* − пунктирна лінія).

Визначимо напруження в поперечних перерізах стрижня на кожній ділянці при d_3=17,867 мм.

Ділянка AB (точка *A*): $\sigma_{(A)} = \dfrac{N_{(A)}}{F_3} = \dfrac{40 \cdot 10^{-3}}{2{,}5 \cdot 10^{-4}} = 160 \text{ МПа};$

(точка *B*): $\sigma_{(B)} = \dfrac{N_{(B)}}{F_3} = \dfrac{-10 \cdot 10^{-3}}{2{,}5 \cdot 10^{-4}} = -40 \text{ МПа}.$

Ділянка BC (точки *B, C*):

$$\sigma_{(B,C)} = \frac{N_{(B,C)}}{F_3} = \frac{-20 \cdot 10^{-3}}{2{,}5 \cdot 10^{-4}} = -80 \text{ МПа}.$$

Ділянка CD (точки *C, D*):

$$\sigma_{(C,D)} = \frac{N_{(C,D)}}{F_3} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{2{,}5 \cdot 10^{-4}} = 40 \text{ МПа}.$$

Аналіз розрахунку напружень показує, що вони мають допустимі значення напружень тільки в одному перерізі (точка *A*), а в перерізах, які проходять через точку *B* (ділянка *AB*) і будь-яку іншу точку на ділянках *BC* та *CD*, напруження набагато менші допустимих.

Таке розподілення напружень по довжині стрижня не є раціональним, так як на ділянках *BC* і *CD* стрижень з діаметром d_3 має зайву матеріалоємність, що не економічно.

З метою зменшення матеріалоємності елементів конструкцій чи з інших технологічних вимог застосовують стрижні змінної жорсткості, зазвичай ступінчасті, тобто за умовою міцності визначають розміри поперечного перерізу за найбільшим абсолютним зусиллям на кожній ділянці.

Для нашого прикладу на ділянці *BC* − N_{max}=|20| кН, а на ділянці *CD* − N_{max}=|10| кН. Тоді

$$F_2 = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{160} = 1{,}25 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 1{,}25 \text{ см}^2;$$

$$d_2 = 1{,}13\sqrt{1{,}25} = 1{,}2634 \text{ см} = 12{,}634 \text{ мм};$$

$$F_1 = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{160} = 0{,}625 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2\text{=0,625 см}^2;$$

$$d_1\text{=1,13}\sqrt{0{,}625}\text{ =0,8933 см=8,933 мм.}$$

За результатами розрахунку креслимо ескіз стрижня змінної жорсткості (рис. 3.2, *в* − суцільна лінія). Тепер напруження на ділянках *BC* і *DC* в будь-якому перерізі будуть дорівнювати допустимим, тобто

$$\sigma_{(B,C)} = \frac{N_{(B,C)}}{F_2} = \frac{-20 \cdot 10^{-3}}{1{,}25 \cdot 10^{-4}} = -160 \text{ МПа;}$$

$$\sigma_{(C,D)} = \frac{N_{(C,D)}}{F_1} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{0{,}625 \cdot 10^{-4}} = 160 \text{ МПа.}$$

Елементи конструкцій, у яких напруження в довільних перерізах дорівнюють допустимим, називаються рівноміцними, тому вони є більш раціональні. Таким вимогам задовольняють ділянки *BC* і *CD* ступінчастого стрижня.

3.2.3 *Визначення переміщень ступінчастого стрижня*

Переміщення визначаємо за відомими формулами 2.2, 2.3 та 2.4 (с. 21).

В нашому прикладі таких ділянок три. В межах кожної ділянки жорсткість стрижня є величина стала, тобто

Ділянка AB: $EF_3 = 2 \cdot 10^5 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-4} = 50$ мН=$50 \cdot 10^3$ кН.

Ділянка BC: $EF_2 = 2 \cdot 10^5 \cdot 1{,}\ 25 \cdot 10^{-4} = 25$ мН=$25 \cdot 10^3$ кН.

Ділянка CD: $EF_1 = 2 \cdot 10^5 \cdot 0{,}625 \cdot 10^{-4} = 12{,}5$ мН=$12{,}5 \cdot 10^3$ кН.

При сталій жорсткості процедуру інтегрування простих лінійно залежних функцій можна замінити обчисленням площі, яка обмежена даною функцією і віссю стрижня, тобто площі епюри $N_{(z)}$.

Тому для визначення переміщень використовуємо формулу 2.4.

Переміщення необхідно обчислювати, починаючи з тієї точки (перерізу), де вони відомі, тобто враховувати граничні умови, якими визначається стала інтегрування. В нашому прикладі такою є точка *A* (жорстке закріплення), де переміщення дорівнює нулю, тобто $\Delta l_{(A)}=0$.

Далі визначимо переміщення в характерних точках (перерізах) стрижня (рис. 3.2, *б*)

$$\Delta l_{(M)} = \Delta l_{(A)} + \frac{\omega_{N(AM)}}{EF_3} = 0 + \frac{\frac{1}{2}\cdot 40\cdot 0{,}4}{50\cdot 10^3} = 1{,}6\cdot 10^{-4}\text{ м}=0{,}16\text{ мм},$$

де $\omega_{N(AM)}$ – площа епюри *N* на ділянці *AB* від точки *A* до точки *M*, додатна (площа трикутника);

$$\Delta l_{(B)} = \Delta l_{(M)} + \frac{\omega_{N(MB)}}{EF_3} = 1{,}6\cdot 10^{-4} + \frac{\frac{1}{2}\cdot(-10)\cdot 0{,}1}{50\cdot 10^3} =$$

$$= 1{,}5\cdot 10^{-4}\text{ м} = 0{,}15\text{ мм},$$

де $\omega_{N(MB)}$ – площа епюри *N* на ділянці *AB* від точки *M* до точки *B*, від'ємна (площа трикутника);

$$\Delta l_{(C)} = \Delta l_{(B)} + \frac{\omega_{N(BC)}}{EF_2} = 1{,}5\cdot 10^{-4} + \frac{-20\cdot 0{,}5}{25\cdot 10^3} =$$

$$= -2{,}5\cdot 10^{-4}\text{ м} = -0{,}25\text{ мм},$$

де $\omega_{N(BC)}$ – площа епюри *N* на ділянці *BC*, від'ємна (площа прямокутника);

$$\Delta l_{(D)} = \Delta l_{(C)} + \frac{\omega_{N(CD)}}{EF_1} = -2{,}5\cdot 10^{-4} + \frac{10\cdot 0{,}5}{12{,}5\cdot 10^3} =$$

$$= 1{,}5\cdot 10^{-4}\text{ м} = 0{,}15\text{ мм},$$

де $\omega_{N(CD)}$ − площа епюри N на ділянці CD, додатна (площа прямокутника).

За результатами обчислення в певному масштабі будуємо епюру переміщень (рис. 3.2, *г* − суцільна лінія). Слід зауважити, що на ділянці AB епюра переміщень має вид дуги квадратичної параболи, так як поздовжня сила N змінюється за лінійним законом.

На ділянках BC і CD епюра переміщень зображена прямими, нахиленими до осі стрижня лініями, так як тут N=*const.* Штриховка епюри переміщень виконується так, як і епюра поздовжніх сил.

Для порівняння обчислювались переміщення в точках C і D при умові, що стрижень на ділянках BC і CD має жорсткість $EF_3=50\cdot10^3$ кН, тобто на всіх ділянках стрижень має однакову жорсткість. результати обчислення показують (рис. 3.2, *г* − пунктирна лінія), що стрижень сталої жорсткості має менші переміщення (менш піддатливий, ніж стрижень змінної жорсткості).

Така властивість елементів конструкцій змінної жорсткості (більша піддатливість) є доцільною при використанні їх як різного роду пружних елементів у спорудах і механізмах.

[1, С. 115−123; 3, С. 22−31; 54−57; 4, С. 6−7].

4 РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНОЇ СТРИЖНЕВОЇ СИСТЕМИ, ЕЛЕМЕНТИ ЯКОЇ ПРАЦЮЮТЬ НА РОЗТЯГАННЯ АБО СТИСКАННЯ

Стрижневі системи, у яких кількість невідомих, в тому числі і реактивних сил, більша кількості рівнянь рівноваги (статики) називають статично невизначуваними. Ступінь статичної невизначуванності є різниця між кількістю невідомих і кількістю рівнянь статики, які можна скласти для даної системи.

При розв’язуванні таких задач завжди необхідно розглядати три групи рівнянь:

– рівняння рівноваги;
– геометричні рівняння (рівняння сумісності деформацій);
– фізичні рівняння (закон Р. Гука), за допомогою яких можна виразити статичні та геометричні рівняння через зусилля або переміщення.

Якщо за основні невідомі системи сприймати зусилля, то такий підхід називається *методом сил*, а якщо за основні невідомі сприймати переміщення, то − *методом переміщень*.

4.1 Умова задачі

Абсолютно жорсткий брус закріплений до шарнірно нерухомої опори і підтримується двома стрижнями, з’єднаними з ним за допомогою шарнірів.

Необхідно:

а) визначити зусилля і напруження в стрижнях, виражаючи їх через зовнішню силу Q;

б) визначити допустиме навантаження $[Q]$, прирівнюючи більше із напружень в двох стрижнях допустимому напруженню $[\sigma]$=160 МПа;

в) визначити граничну вантажопід’йомність Q_T і допустиме навантаження $[Q_T]$, якщо границя текучості σ_T=240 МПа, і коефіцієнт запасу міцності n_T=1,5;

г) порівняти величини $[Q]$ та $[Q_T]$.

Розрахункові схеми та вихідні дані наведені на рисунку 4.1 і в таблиці 4.1.

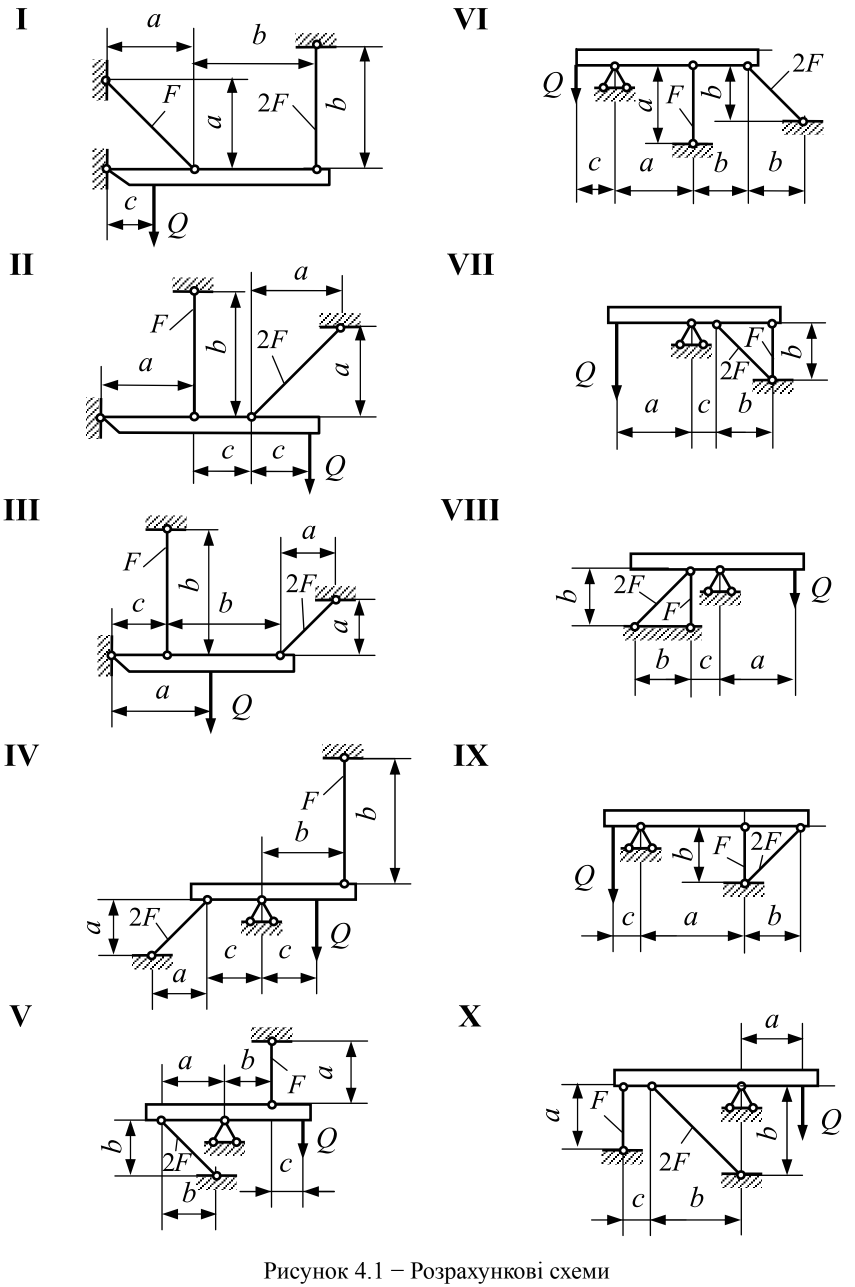


Рисунок 4.1 − Розрахункові схеми

Таблиця № 4.1 − Вихідні дані

№ рядка	Площа $F\cdot10^4$, м^2	Довжина, м		
		a	*b*	*c*
1	11	2,1	3,0	1,1
2	12	2,2	2,9	1,2
3	13	2,3	2,8	1,3
4	14	2,4	2,7	1,4
5	15	2,5	2,6	1,5
6	16	2,6	2,5	1,6
7	17	2,7	2,4	1,7
8	18	2,8	2,2	1,8
9	19	2,9	2,2	1,9
0	20	3,0	2,1	2,0

4.2 Приклад розрахунку

Вихідні данні:

$$a=1\text{ м};\quad b=2\text{ м};\quad c=0{,}5\text{ м};\quad F=10\cdot10^{-4}\text{ м}^2.$$

В певному масштабі креслимо задану стрижневу систему (рис. 4.2, *а*).

Шарнірно нерухому опору позначено через C, а шарніри за допомогою яких стрижні закріплені до абсолютно жорсткого бруса – через A і B (рис. 4.1, *а*).

Вертикальний стрижень позначимо через 1, а нахилений − через 2. Щоб показати зусилля, які виникають у двох стрижнях при навантаженні силою Q, умовно розріжемо їх, і в перерізі зображаємо зусилля N_1 та N_2 додатнього напряму (в бік розтягання, рис. 4.1, *б*). Крім цього, показуємо на рис. 4.1, *б* попереднього напряму реактивні сили R_C та H_C. Тепер зробимо висновок, що задана система має чотири невідомих (N_1, N_2, R_C, R_C), а рівнянь рівноваги для плоскої системи сил, як завгодно розташованих, можна скласти три. Тому досліджувана стрижнева система є один раз статично невизначуваною.

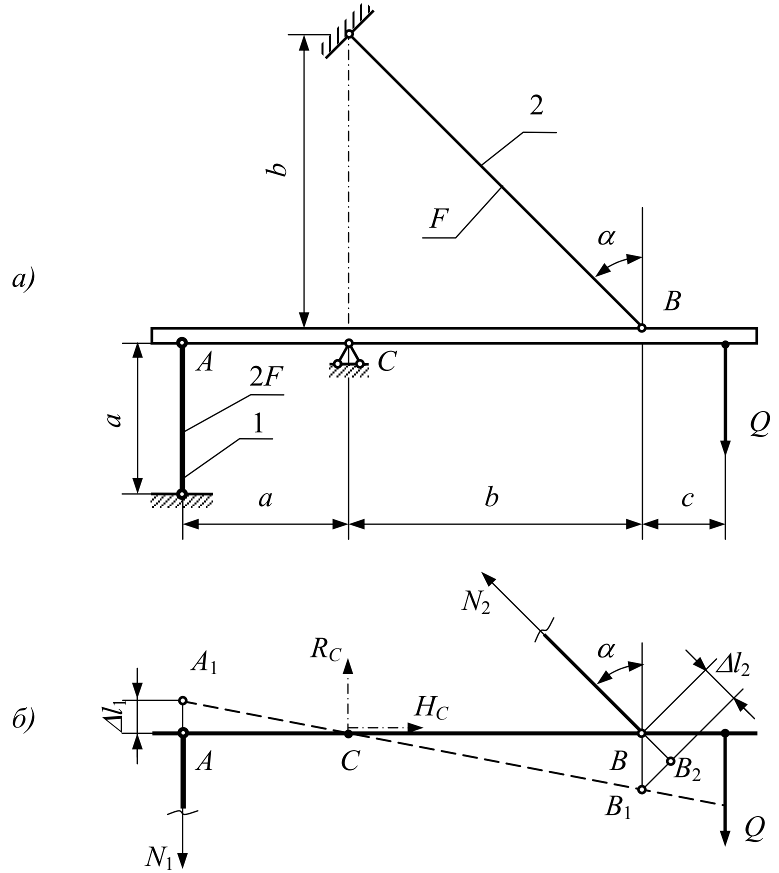


Рисунок 4.2 − Схеми статично невизначуваної стрижневої системи

4.2.1 *Визначення зусиль і напружень в стрижнях*

Задачу будемо розв’язувати методом сил, тобто за основні невідомі приймаємо зусилля N_1 і N_2 (рис. 4.1, *б*).

4.2.1.1 *Статичне обстеження задачі. Рівняння рівноваги*

Оскільки в задачі не ставиться за мету знайти реактивні сили R_C та H_C, то із трьох рівнянь статики треба застосувати таке, яке б автоматично виключало ці реакції.

Таким рівнянням є рівняння моментів відносно шарніра C.

$$\sum M_{(C)}=0;\quad N_1\cdot a+N_2\cdot cos\,\alpha\cdot b-Q\cdot(b+c)=0.$$

Так як за умовою задачі кут α=45°, то cos45°=$\frac{\sqrt{2}}{2}$. Тоді остаточно рівняння рівноваги запишемо так

$$N_1\cdot a+N_2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot b=Q\cdot(b+c). \tag{4.1}$$

4.2.1.2 *Геометричне обстеження задачі. Геометричне рівняння (рівняння сумісності деформацій)*

В рівняння (4.1) входять два невідомих зусилля. Тому для їх визначення необхідно скласти ще одне, геометричне рівняння, яке визначає аналітичну залежність між подовженнями першого і другого стрижня.

Завдяки тому, що абсолютно жорсткий брус закріплений до шарнірно нерухомої опори, то під дією сили Q він може тільки нахилитися (повернутися) на деякий кут навколо шарніра C, деформуючи обидва стрижні. Таке положення брусу показано умовно на рис. 4.1, *б* − пунктирна лінія.

В результаті деформування системи точка A переміститься в точку A_1, а точка B − в точку B_1.

Відрізок AA_1 першого (вертикального) стрижня є його подовження Δl_1, а відрізок BB_2 − подовження Δl_2 другого (нахиленого) стрижня. Точка B_2 знаходиться на перетині перпендикуляра, опущеного з точки B_1 на продовження напрямку другого стрижня. Таким чином, із ΔBB_1B_2 маємо, $BB_1=\Delta l_2/cos\,\alpha$.

Для отримання геометричного рівняння розглянемо подібність трикутників $\Delta AA_1C\sim\Delta BB_1C$ і запишемо пропорцію їх сторін

$$\frac{AA_1}{a}=\frac{BB_1}{b}\quad\text{або}\quad\frac{\Delta l_1}{a}=\frac{\Delta l_2}{b\cdot cos\,\alpha}.$$

Звідси маємо геометричне рівняння

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 \cdot \frac{2a}{b \cdot \sqrt{2}}. \tag{4.2}$$

Треба зауважити, що рівняння (4.2) стосується тільки даної схеми, а для інших схем воно буде мати інший вигляд (іншу залежність).

4.2.1.3 *Фізичне рівняння. Закон Р. Гука*

Рівняння (4.1) і (4.2) не залежать одне від одного. Тому необхідно розглянути фізичне рівняння, за допомогою якого можна виразити зусилля через подовження або навпаки.

Згідно закону Р. Гука, при розтяганні або стисканні зусилля і подовження пов'язані наступною залежністю

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot F},$$

де l − довжина стрижня;

$E \cdot F$ − жорсткість поперечного перерізу стрижня.

Для нашого прикладу

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot F_1} = \frac{N_1 \cdot a}{E \cdot 2 \cdot F}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot F_2} = \frac{N_2 \cdot b \cdot \sqrt{2}}{E \cdot F},$$

де $l_1=a$; $F_1=2 \cdot F$− відповідно довжина і площа поперечного перерізу першого стрижня;

$l_2=b \cdot \sqrt{2}$; $F_2=F$ − відповідно довжина і площа поперечного перерізу другого стрижня.

Якщо підставити визначені подовження Δl_1, Δl_2 в рівняння (4.2), будемо мати

$$\frac{N_1 \cdot a}{E \cdot 2 \cdot F} = \frac{N_2 \cdot b \cdot \sqrt{2}}{E \cdot F} \cdot \frac{2 \cdot a}{b \cdot \sqrt{2}}, \text{ звідки } N_1=4 \cdot N_2. \tag{4.3}$$

Далі проводимо синтез, в результаті чого розв'язуємо сумісно рівняння (4.1) та (4.3), як систему рівнянь

$$4\cdot N_2\cdot a+N_2\cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot b=Q\cdot(b+c);$$

$$N_2\cdot(4\cdot a+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot b)=Q\cdot(b+c),$$

звідси

$$N_2=\frac{Q\cdot(b+c)}{4\cdot a+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot b}=\frac{Q\cdot(2+0{,}5)}{4\cdot 1+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2}=0{,}46175\cdot Q.$$

Тоді

$$N_1=4\cdot N_2=4\cdot 0{,}46175\cdot Q=1{,}847\cdot Q.$$

Визначаємо напруження в першому і другому стрижні

$$\sigma_{(1)}=\frac{N_1}{F_1}=\frac{1{,}847\cdot Q}{2F}=0{,}9235\frac{Q}{F};$$

$$\sigma_{(2)}=\frac{N_2}{F_2}==0{,}46175\frac{Q}{F}.$$

Так як $\sigma_{(1)}>\sigma_{(2)}$, то $\sigma_{max}=\sigma_{(1)}=0{,}9235\frac{Q}{F}$.

4.2.2 *Визначення допустимого навантаження*

Із умови міцності при розтяганні визначаємо допустиме зусилля $[Q]$

$$\sigma_{max}=0{,}9235\frac{Q}{F}\leq[\sigma];$$

$$[Q]=\frac{F\cdot[\sigma]}{0{,}9235}=\frac{10\cdot 10^{-4}\cdot 160}{0{,}9235}=0{,}17325\ \text{МН}.$$

При такому зусиллі визначаємо напруження в стрижнях

$$\sigma_{(1)}=0{,}9235\frac{Q}{F}=0{,}9235\frac{0{,}17325}{10\cdot 10^{-4}}=160\ \text{МН}.$$

$$\sigma_{(2)}=0{,}46175\frac{Q}{F}=0{,}46175\frac{0{,}17325}{10\cdot 10^{-4}}=80\ \text{МН}.$$

4.2.3 ***Визначення граничної вантажопід'йомності***

Результати обчислення напружень показують, що розрахунок з використанням умови міцності (за допустимим напруженням) обмежує тільки один найбільш навантажений стрижень системи, тоді як в інших елементах системи напруження можуть бути набагато меншими ніж допустимі. Такий розрахунок не завжди є раціональним. Тому в інженерній практиці існує розрахунок за граничним станом, який дає можливість зменшити металоємкість або підвищити продуктивність статично невизначуваних систем.

Сутність граничного стану полягає в тому, що при поступовому збільшенні навантаження від допустимого зусилля $[Q]$ до граничного Q_T напруження в елементах системи досягатимуть почергово, починаючи з більш навантаженого, границі текучості σ_T. При цьому зусилля в елементах будуть визначатися як $N_i=\sigma_T\cdot F_i$. Для нашого прикладу

$$N_{1T}=\sigma_T\cdot F_1=\sigma_T\cdot 2\cdot F;\quad N_{2T}=\sigma_T\cdot F_2=\sigma_T\cdot F.$$

Для визначення Q_T підставимо в рівняння рівноваги (4.1) зусилля N_{1T} та N_{2T}

$$N_{1T}\cdot a+N_{2T}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot b=Q_T\cdot(b+c);$$

$$\sigma_T\cdot 2\cdot F\,a+\sigma_T\cdot F\,\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot b=Q_T\cdot(b+c).$$

Звідси

$$Q_T = \frac{\sigma_T \cdot F \cdot \left(2a + b\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}{b+c} =$$

$$= \frac{240 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \cdot \left(2 \cdot 1 + 2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2+0{,}5} = 0{,}3278 \text{ МН}.$$

Так як при граничному зусиллі система повністю втрачає несучу здатність, то його треба обмежити коефіцієнтом запасу, тобто визначити допустиме зусилля за граничним станом

$$[Q_T] = \frac{Q_T}{n_T} = \frac{0{,}3278}{1{,}5} = 0{,}2185 \text{ МН}.$$

При зусиллі $[Q_T]$ напруження в стрижнях будуть такими

$$\sigma_{(1)} = 0{,}9235\frac{Q_T}{F} = 0{,}9235\frac{0{,}2185}{10 \cdot 10^{-4}} = 201{,}8 \text{ МПа}.$$

$$\sigma_{(2)} = 0{,}46175\frac{Q_T}{F} = 0{,}46175\frac{0{,}2185}{10 \cdot 10^{-4}} = 100{,}9 \text{ МПа}.$$

Визначимо відношення допустимих зусиль

$$\frac{[Q_T]}{[Q]} = \frac{0{,}2185}{0{,}17325} = 1{,}26\,.$$

[1, С. 130−140; 3, С. 58−69].

5 АНАЛІТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ В ТОЧЦІ ДЕФОРМОВАНОГО ТІЛА

Досліджуючи напружений стан елементів конструкцій, найчастіше доводиться мати справу з плоским (двовісним) напруженим станом. Він буває при крученні, згинанні та складному опорі. При практичних розрахунках, як правило, вдається визначити (теоретично чи експериментально) нормальні чи дотичні напруження на двох взаємно перпендикулярних площадках деформованого тіла, наприклад, на площадках, що перетинають точку A (рис. 5.2, *а*).

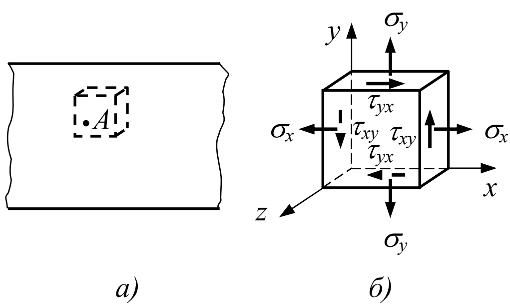


Рисунок 5.1 − Зображення плоского напруженого стану

Щоб дослідити напружений стан в заданій точці, поблизу неї виділяють елемент об'єму у вигляді нескінченно малого паралелепіпеда (рис. 5.1, *а*), який у збільшеному масштабі зображено на рис. 5.1, *б*, де початок координат суміщено з точкою A, а координатні осі направлено вздовж відповідних ребер, так, що грані паралелепіпеда перпендикулярні до напрямів осей x, y, z. На гранях виділеного елемента діють напруження σ_x, σ_y, τ_{xy} (інтенсивності внутрішніх зусиль), які замінюють дію відкинутої частини деформованого тіла. Внаслідок малості виділеного елемента можна вважати, що напруження на кожній його грані розподілені рівномірно.

Нормальні напруження вважають додатними, якщо вони спричинюють розтягання (направлені від грані), та від'ємними, якщо стискання (направлені до грані).

Знак дотичних напружень будемо визначати за напрямом τ_{xy}, яке діє на правій грані виділеного елемента. Якщо напрям τ_{xy} збігається з напрямом осі y (направлено уверх), то воно додатне, якщо − вниз, то від'ємне. Напрям τ_{yx} та τ_{xy} на інших гранях вибирають у відповідності закону парності дотичних напружень.

Отже, за цим правилом компоненти напружень на рис. 5.1, *б* − додатні.

5.1 Умова задачі

Виділений елемент деформованого тіла зазнає плоский напружений стан. Потрібно визначити:

а) положення головних площадок і головні напруження;

б) максимальні дотичні напруження;

в) відносні лінійні деформації і відносну зміну об'єму;

г) питому потенціальну енергію деформації;

д) коефіцієнт запасу міцності за четвертою теорією.

Матеріал − сталь: σ_T=240 МПа; $E=2\cdot10^5$ МПа; μ=0,3.

Розрахункові схеми виділених елементів (зображені в плані) показані на рис. 5.2, а вихідні дані наведені в табл. 5.1.

Таблиця 5.1 − Вихідні дані[2]

№ рядка	Напруження, МПа		
	σ_x	σ_y	τ_{xy}
1	10	50	30
2	20	60	40
3	30	70	50
4	40	80	60
5	50	100	70
6	60	90	80
7	70	40	90
8	80	30	100
9	90	20	10
0	100	10	20

[2] Знаки напружень, які зображені на розрахункових схемах, необхідно узгодити відповідно наведених вище правил. Відсутність на схемах σ_x або σ_y означає, що ці напруження дорівнюють нулю.

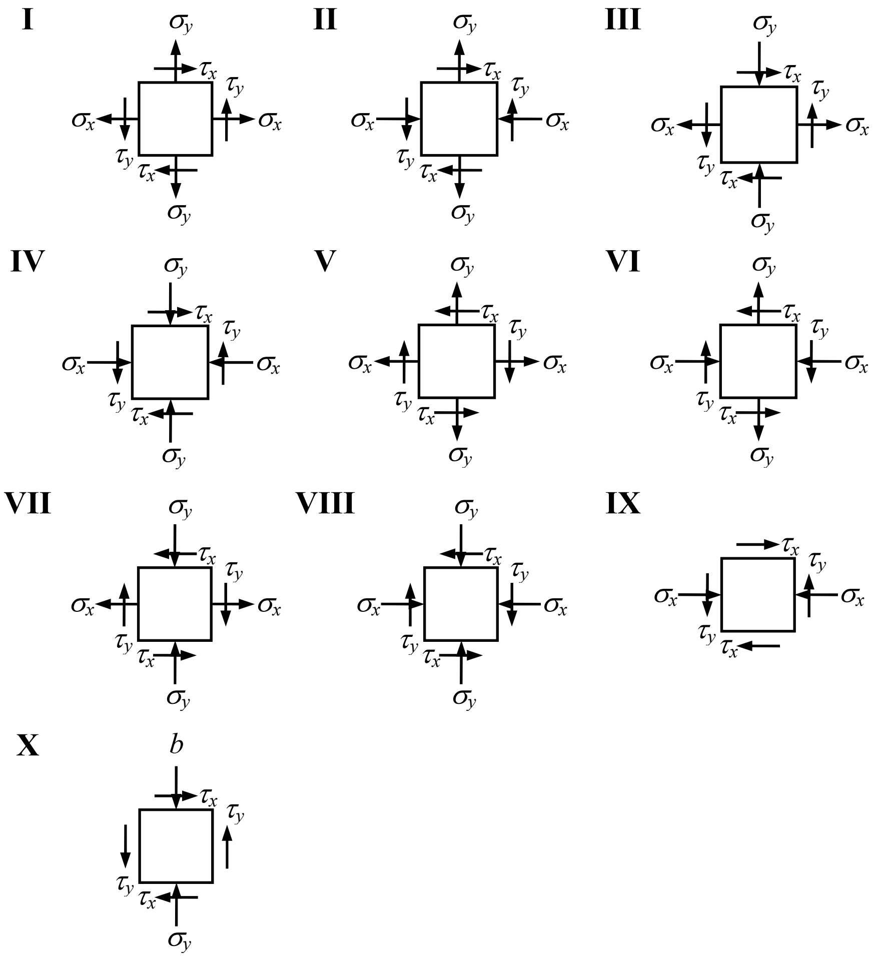


Рисунок 5.2 − Розрахункові схеми виділених елементів

5.2 Приклад розрахунку

Вихідні данні: σ_x=50 МПа; σ_y=−30 МПа; τ_{xy}=−20 МПа.

За відповідною схемою креслимо в певному масштабі виділений елемент (рис. 5.3, *a*). Так як нормальне напруження σ_y спричинює стискання, а τ_{xy} направлене униз, то вони є від'ємними, тобто перед виписаними з таблиці абсолютними значеннями ставимо знак мінус.

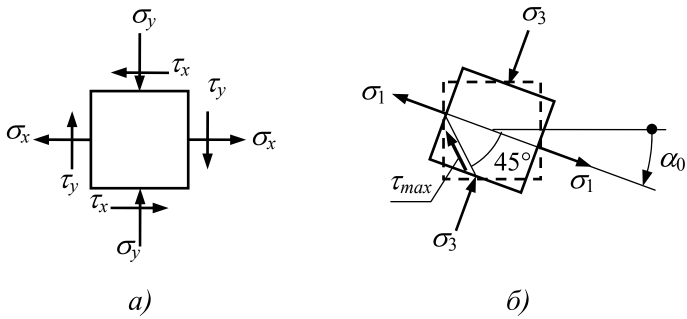


Рисунок 5.3 − Схема плоского напруженого стану

5.2.1 *Визначення положення головних площадок і головних напружень*

Положення головних площадок визначаємо за формулою

$$tg2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2\cdot(-20)}{50-(-30)} = -0{,}5;$$

$$\alpha_0 = ½\cdot arctg(-0{,}5) = -13{,}28°.$$

Якщо кут α_0 від'ємний, то виділений елемент необхідно повернути (орієнтувати) на даний кут за годинниковою стрілкою (рис. 5.3, *б*). На головних площадках дотичні напруження дорівнюють нулю, а нормальні напруження − екстремальні, значення їх обчислюємо за формулою

$$\sigma_{\substack{max\\min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2};$$

$$\sigma_{\substack{max\\min}} = \frac{50+(-30)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{50-(-30)}{2}\right)^2 + (-20)^2} = 10 \pm 44{,}72;$$

$$\sigma_{max} = 10+44{,}72 = 54{,}72 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{min} = 10-44{,}72 = -34{,}72 \text{ МПа}.$$

Індекси екстремальним (головним) напруженням слід розставляти так, щоб виконувалась нерівність $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Так як у нашому прикладі є додатне і від'ємне екстремальне напруження, то між ними є число нуль. Тому

$$\sigma_{max} = \sigma_1 = 54{,}72 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = 0; \; \sigma_{min} = \sigma_3 = -34{,}72 \text{ МПа}.$$

Максимальне головне напруження (σ_1) діє на площадці, нормаль до якої відхиляється на кут α_0 від напряму алгебраїчно більшого нормального напруження, тобто σ_y (рис. 5.3, *б*).

5.2.2 *Визначення максимальних дотичних напружень*

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{54{,}72 - (-34{,}72)}{2} = 44{,}72 \text{ МПа}.$$

Максимальні дотичні напруження діють на площадках, які завжди орієнтовані під кутом 45° до напряму головних напружень (рис. 5.3, *б*).

5.2.3 *Визначення відносних лінійних та об'ємних деформацій*

Згідно узагальненого закону Р. Гука відносні лінійні деформації визначаємо за наступними залежностями

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu \cdot \left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right] = \frac{1}{2 \cdot 10^5}\left[50 - 0{,}3 \cdot (-30 + 0)\right] = 0{,}295 \cdot 10^{-3};$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu \cdot \left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right] = \frac{1}{2 \cdot 10^5}\left[-30 - 0{,}3 \cdot (50 + 0)\right] = -0{,}225 \cdot 10^{-3};$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu \cdot \left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] = \frac{1}{2 \cdot 10^5}\left[0 - 0{,}3 \cdot (50 + (-30))\right] =$$

$$= -0{,}03 \cdot 10^{-3}.$$

За відносними лінійними деформаціями визначаємо відносну зміну об'єму

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_x + \varepsilon_z = (0{,}295 - 0{,}225 - 0{,}03) \cdot 10^{-3} = 0{,}04 \cdot 10^{-3}.$$

5.2.4 ***Визначаємо питому потенціальну енергію деформації***

$$u=\frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\mu\cdot\left(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2\cdot 2\cdot 10^5}\left[54{,}72^2+0+\left(-34{,}72\right)^2-2\cdot 0{,}3\cdot\left(0+0+\left(-34{,}72\right)54{,}72\right)\right]=$$

$$=0{,}0133492\ \text{МДж}/\text{м}^3=13349{,}2\ \text{Дж}/\text{м}^3.$$

5.2.5 ***Визначення коефіцієнта запасу міцності***

Коефіцієнт запасу міцності − це відношення граничного (небезпечного) напруження до діючого максимального, яке виникає при деформуванні елемента конструкції. Для пластичних матеріалів, наприклад, сталей, небезпечним напруженням є границя текучості σ_T. Щоб оцінити міцність матеріалу, який зазнає плоский напружений стан, необхідно визначити еквівалентні напруження $\sigma_{екв}$ за відповідною теорією.

Тоді коефіцієнт запасу міцності за границею текучості n_T будемо визначати як $n_T=\sigma_T/\sigma_{екв}$.

У нашому прикладі коефіцієнт n_T треба визначати за четвертою теорією міцності, тобто

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{IV}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\sigma_1-\sigma_2\right)^2+\left(\sigma_2-\sigma_3\right)^2+\left(\sigma_3-\sigma_1\right)^2\right]}.$$

Так як $\sigma_2=0$, то формула для визначення $\sigma_{\text{екв}}^{\text{IV}}$ спрощується і набуває наступного вигляду

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{IV}}=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_3^2-\sigma_1\cdot\sigma_3}=$$

$$=\sqrt{54{,}72^2+\left(-34{,}72\right)^2-54{,}72\cdot\left(-34{,}72\right)}=78{,}1\ \text{МПа}.$$

Тепер визначаємо коефіцієнт запасу $n_T=240/78{,}1=3{,}07$, на підставі якого робимо висновок, що при заданому навантаженні елемент конструкції має достатню міцність.

[1, С. 158−166; 3, С. 92−103; 4, С. 7−8.]

6 РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ТА ЖОРСТКІСТЬ ПРИ КРУЧЕННІ ВАЛА КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ

6.1 Умова задачі

Сталевий вал навантажений трьома крутними моментами M_1, M_2, M_3 та попередньо невідомим моментом X.

Необхідно:

а) визначити значення моменту X при умові, що кут закручування правого кінцевого перерізу вала дорівнює нулю;

б) з урахуванням визначеного моменту X побудувати епюру крутних моментів;

в) за умовою міцності визначити діаметр валу і округлити його до найближчого більшого або меншого значення стандартного ряду діаметрів (ГОСТ 6636-69)[3] в межах розбіжності по напруженням ±5%;

г) побудувати епюру кутів закручування;

д) визначити найбільший відносний кут закручування.

Модуль пружності другого роду прийняти рівним G=8·10^4 МПа.

Розрахункові схеми і вихідні дані наведені на рисунку 6.1 та в таблиці 6.1.

Таблиця 6.1 − Вихідні дані

№ рядка	Довжина, м			Моменти, кН·м			$[\tau]$, МПа
	a	b	c	M_1	M_2	M_3	
1	1,1	1,5	2,0	1,1	1,6	2,0	35
2	1,2	1,6	1,9	1,2	1,7	1,9	40
3	1,3	1,7	1,8	1,3	1,8	1,8	45
4	1,4	1,8	1,7	1,4	1,9	1,7	50
5	1,5	1,9	2,6	1,5	2,0	1,6	55
6	1,6	2,0	1,5	1,6	1,1	1,5	60
7	1,7	1,1	1,4	1,7	1,2	1,4	65
8	1,8	1,2	1,3	1,8	1,3	1,3	70
9	1,9	1,3	1,2	1,9	1,4	1,2	75
0	2,0	1,4	1,1	2,0	1,5	1,1	80

[3] При округленні дотримуватись діаметрів кратних числу 5.

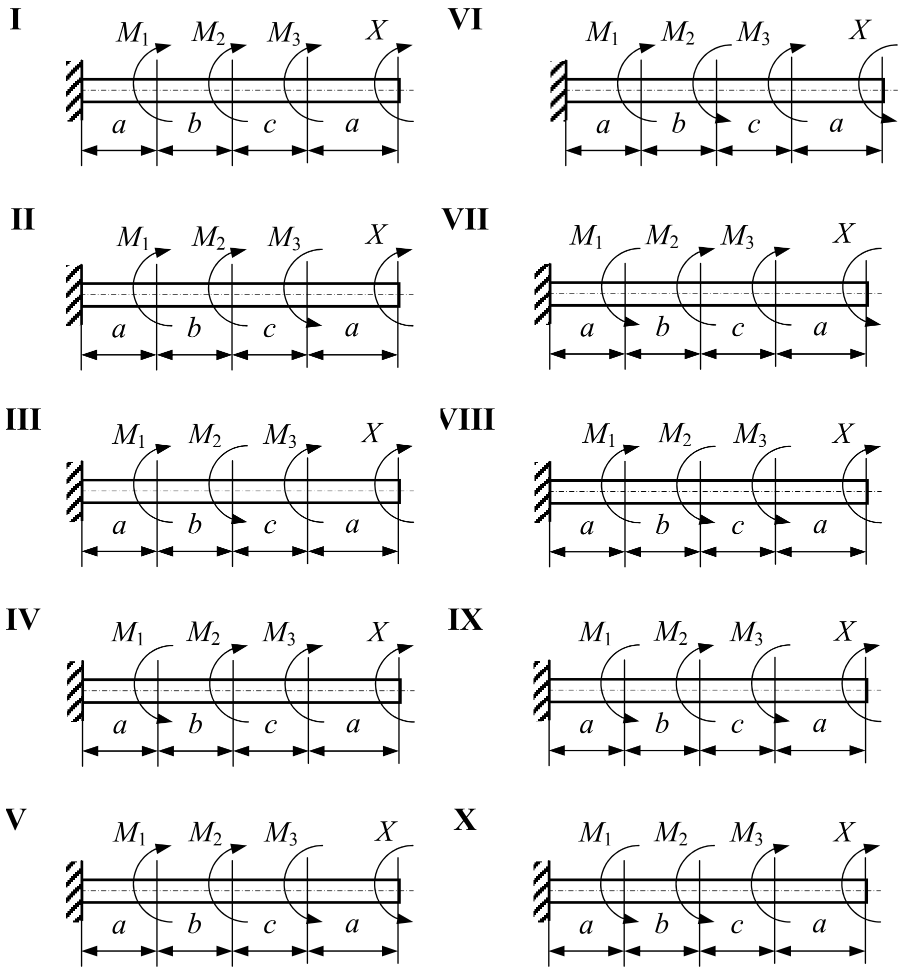


Рисунок 6.1 – Розрахункові схеми

6.2 Приклад розрахунку

Вихідні данні: a=2 м; b=1 м; c=0,5 м; M_1=2,5 кН·м; M_2=2,0 кН·м; M_3=3,0 кН·м; $[\tau]$=70 МПа.

За відповідним варіантом креслимо в певному масштабі розрахункову схему (рис. 6.2, *а*).

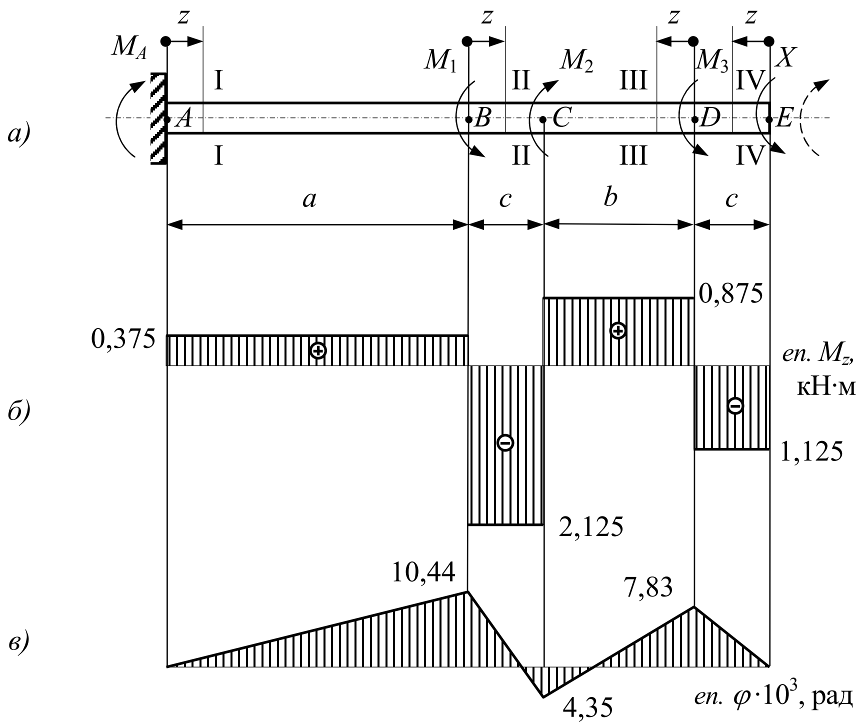


Рисунок 6.2 − Розрахункова схема і епюри крутних моментів та кутів закручування

6.2.1 *Визначення невідомого моменту X*

Для визначення моменту X запишемо рівняння, яке задовольняє умові, що сума кутів закручування кінцевого перерізу вала (точка E, рис. 6.2, *а*) від трьох моментів ($\varphi_{(E),\sum M}$) і моменту X ($\varphi_{(E),X}$) дорівнює нулю, тобто

$$\varphi_{(E),\sum M}+\varphi_{(E),X}=0. \tag{6.1}$$

За законом Р. Гука при крученні залежність між крутним моментом і кутом закручування має такий вид

$$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot l}{G \cdot J_p},$$

де l − довжина вала (або його ділянка), яка піддається закручуванню;

$G \cdot J_p$ − жорсткість поперечного перерізу при крученні.

Вважаємо, що кут закручування моменту X додатний. Тоді, уявляючи, що на вал діє тільки момент X, потім тільки M_3, за ним − M_2 і нарешті − M_1, запишемо рівняння (6.1) в розгорнутому вигляді

$$\frac{X \cdot (a+b+2c)}{G \cdot J_p} + \frac{M_3 \cdot (a+b+c)}{G \cdot J_p} - \frac{M_2 \cdot (a+c)}{G \cdot J_p} + \frac{M_1 \cdot a}{G \cdot J_p} = 0 .$$

Звідси

$$X = \frac{M_2 \cdot (a+c) - M_3 \cdot (a+b+c) - M_1 \cdot a}{a+b+2c} =$$

$$= \frac{3 \cdot (2+0{,}5) - 2 \cdot (2+1+0{,}5) - 2{,}5 \cdot 2}{2+1+2 \cdot 0{,}5} = -1{,}125 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Знак мінус вказує на те, що напрям моменту X (пунктир) є протилежним показаному на розрахунковій схемі.

Тепер визначимо реактивний момент в закріплені (M_A), для чого записуємо рівняння рівноваги крутних моментів відносно осі вала

$$\sum M_{кр}=0; \quad M_A - M_1 + M_2 - M_3 + X = 0;$$

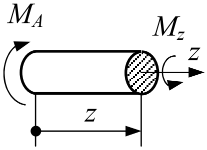
$$M_A = M_1 - M_2 + M_3 - X = 2{,}5 - 3 + 2 - 1{,}125 = 0{,}375 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Знак плюс вказує на те, що попередній напрям M_A співпадає з дійсним.

6.2.2 *Побудова епюри крутних моментів M_z*

Розрахункова схема має чотири силових ділянки: *AB*, *BC*, *CD*, *ED*. Крутний момент в перерізі будемо вважати додатним, якщо він діє проти годинникової стрілки, якщо дивитись з боку перерізу.

Ділянка AB (переріз I−I): $0 \le z \le a$



Рівняння рівноваги для відсіченої частини

$$M_z + \sum \mathfrak{M}_z = 0;$$

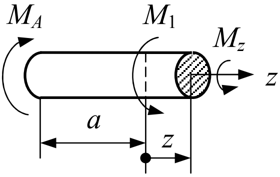
$$M_z - M_A = 0.$$

Звідси $M_z = M_A = 0{,}175$ кН·м.

Так як крутний момент на ділянці *AB* додатний і не залежить від координати z, то епюра M_z окреслена прямою, паралельною осі вала (рис. 6.2, *б*).

Аналогічно складаємо рівняння рівноваги і визначаємо крутні моменти на інших ділянках.

Ділянка BC (переріз II−II): $0 \le z \le c$



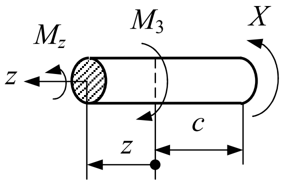
$$M_z + M_1 - M_A = 0;$$

$$M_z = M_1 - M_A = -2{,}5 + 0{,}375 =$$

$$= -2{,}125 \text{ кН·м} = const -$$

момент від'ємний.

Ділянка CD (переріз III−III): $0 \le z \le b$



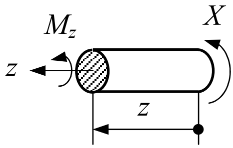
$$M_z - M_3 + X = 0;$$

$$M_z = M_3 - X = 2 - 1{,}125 =$$

$$= 0{,}875 \text{ кН·м} = const -$$

момент додатний.

Ділянка DE (переріз IV−IV): $0 \le z \le b$



$$M_z + X = 0;$$

$$M_z = -X = -1{,}125 \text{ кН·м} = const -$$

момент від'ємний.

Остаточна епюра крутних моментів показана на рис. 6.2, *б*.

Для перевірки правильності побудови епюри M_z необхідно дотримуватись наступних правил:

- на ділянках, де розподілений момент відсутній (m=0), крутний момент є величиною сталою (M_z=$const$), а епюра окреслена прямою, паралельною осі вала;
- на ділянках, де діє рівномірно розподілений крутний момент (m=$const$), крутний момент змінюється за лінійним законом (Mz=(fz)), а епюра окреслена прямою, нахиленою до осі вала;
- в перерізах (точках), де прикладені зосереджені моменти, на епюрі M_z мають місце стрибки (розриви) на величину цих моментів.

6.2.3 ***Визначення діаметру вала***

Аналіз епюри M_z дає можливість виявити небезпечний переріз, де крутний момент за модулем є найбільший, тобто максимальний.

Для нашого прикладу це є ділянка BC, де M_{zmax}=|2,125| кН·м.

Умову міцності при крученні записуємо за формулою

$$\tau_{max} = \frac{M_{z\,max}}{W_p} \le [\tau],$$

де $W_p = \dfrac{\pi \cdot d^3}{16}$ − полярний момент опру для круглого поперечного перерізу.

Якщо підставити значення W_p в умову міцності, будемо мати

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{16 M_{z\,max}}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2{,}125 \cdot 10^{-3}}{3{,}14 \cdot 70}} = 0{,}05368 = 53{,}68 \text{ мм}.$$

Приймаємо стандартний діаметр d=55 мм.

6.2.4 *Побудова епюри кутів закручування*

Кут закручування φ визначаємо за відомою формулою

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \int_{l_i} \frac{M_z dz}{G \cdot J_p},$$

де l_i – довжина i-ї ділянки.

Так як на кожній ділянці жорсткість поперечного перерізу вала є величина стала ($G \cdot J_p = const$), то процедуру інтегрування можна замінити процедурою обчислення площі епюри M_z на кожній ділянці, тобто

$$\varphi = \frac{1}{G \cdot J_p} \sum_{i=1}^{n} \omega_{M_z(i)}$$

де $\omega_{M_z(i)}$ – площа епюри M_z на i-й ділянці, яка у нашому прикладі має форму прямокутника (рис. 6.2, *б*).

Починати обчислення, необхідно з тієї ж точки (перерізу), де кут закручування відомий, із умови закріплення (граничні умови).

В нашому прикладі це може бути точка *A* (жорстке закріплення, $\varphi_{(A)}=0$) або точка *E* (за умовою задачі $\varphi_{(E)}=0$).

Спочатку визначимо жорсткість поперечного перерізу вала

$$G \cdot J_p = 8 \cdot 10^4 \frac{\pi \cdot d^4}{32} = 8 \cdot 10^4 \frac{3{,}14 \cdot 0{,}055^4}{32} = 0{,}07183 \text{ мН·м}^2.$$

Тепер визначимо послідовно кут закручування в точках *B*, *C*, *D*, *E*, починаючи від жорсткого закріплення.

$$\varphi_{(B)} = \varphi_{(A)} + \frac{\omega_{M_z(AB)}}{G \cdot J_p} = 0 + \frac{0{,}375 \cdot 10^{-3} \cdot 2}{0{,}07183} = 10{,}44 \cdot 10^{-3} \text{ рад},$$

де $\omega_{M_z(AB)}$ – площа епюри M_z на ділянці *AB*, додатна;

$$\varphi(C) = \varphi(B) + \frac{\omega_{M_z(BC)}}{G \cdot J_p} = 10{,}44 \cdot 10^{-3} + \frac{-2{,}125 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}5}{0{,}07183} =$$

$$= -4{,}35 \cdot 10^{-3} \text{ рад,}$$

де $\omega_{M_z(BC)}$ − площа епюри M_z на ділянці *BC*, від'ємна;

$$\varphi(D) = \varphi(C) + \frac{\omega_{M_z(CD)}}{G \cdot J_p} = -4{,}35 \cdot 10^{-3} + \frac{0{,}875 \cdot 10^{-3} \cdot 1}{0{,}07183} =$$

$$= 7{,}83 \cdot 10^{-3} \text{ рад,}$$

де $\omega_{M_z(CD)}$ − площа епюри M_z на ділянці *CD*, додатна;

$$\varphi(E) = \varphi(D) + \frac{\omega_{M_z(DE)}}{G \cdot J_p} = 7{,}83 \cdot 10^{-3} + \frac{-1{,}125 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}5}{0{,}07183} \cong 0 \text{ рад,}$$

де $\omega_{M_z(DE)}$ − площа епюри M_z на ділянці *DE*, від'ємна.

За результатами обчислення будуємо епюру кутів закручування (рис. 6.2, *в*), яка окреслена прямими, нахиленими до осі вала.

6.2.5 *Визначення максимального відносного кута закручування Θ_{max}*

$$\Theta_{max} = \frac{M_{z\,max}}{GJ_p} = \left| \frac{2{,}125 \cdot 10^{-3}}{0{,}07183} \right| = 0{,}0296 \text{ рад/м.}$$

[1, С. 206−214; 3, С. 169−181; 4, С. 9−10].

7 РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ПРИ ЗГИНАННІ ПРЯМИХ БАЛОК

7.1 Умова задачі

Для заданих двох схем балок необхідно:

а) написати вирази поперечної сили Q_y і згинального моменту M_x для кожної ділянки в загальному вигляді;

б) побудувати епюри Q_y та M_x;

в) знайти абсолютне значення максимального моменту $M_{x_{max}}$ і визначити:

– для схеми (*а*) − розміри дерев'яної балки круглого і прямокутного поперечного перерізу при співвідношеннях сторін прямокутника $h/b=2$ і $[\sigma]=10$ МПа та порівняти їх за коефіцієнтом раціональності;

– для схеми (*б*) − розміри двотаврового перерізу і перевірити їх за максимальним дотичним напруженням при $[\sigma]=160$ МПа і $[\tau]=80$ МПа.

Розрахункові схеми і вихідні дані наведені на рис. 7.1 і в табл. 7.1.

Таблиця 7.1 − Вихідні дані

№ рядка	l_1	l_2	Відстань в долях прогону			M, кН·м	P, кН	q, kН/м
	м		a_1/a	a_2/a	a_3/a			
1	1,1	6	1	9	1	20	10	10
2	1,2	7	2	8	2	10	9	20
3	1,3	3	3	7	3	3	8	9
4	1,4	4	4	6	4	4	7	8
5	1,5	5	5	5	5	5	6	7
6	1,6	6	6	6	1	6	5	6
7	1,7	7	7	7	2	7	4	5
8	1,8	8	8	8	3	8	3	4
9	1,9	9	9	9	4	9	10	3
0	2,0	10	2	10	5	10	20	10

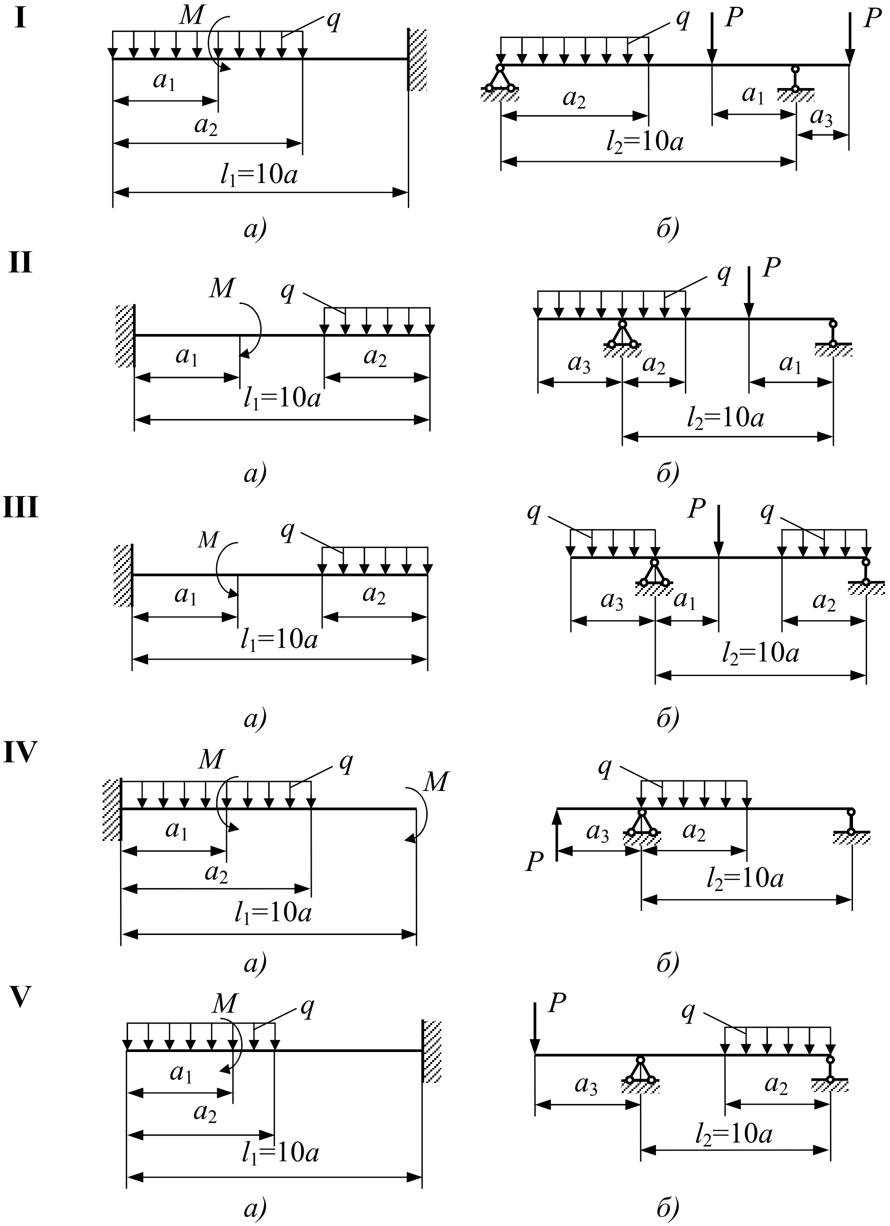
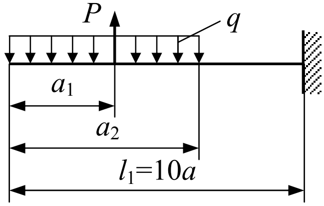
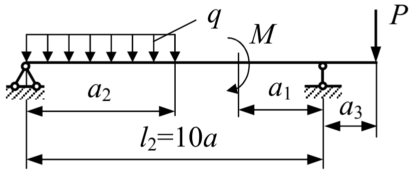


Рисунок 7.1 − Розрахункові схеми

VI

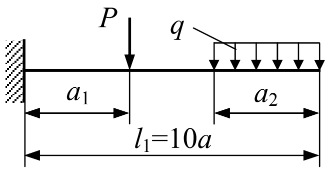


а)

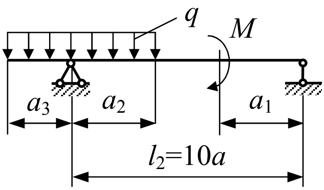


б)

VII

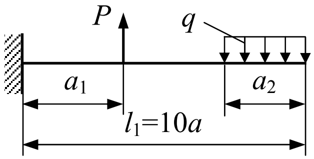


а)

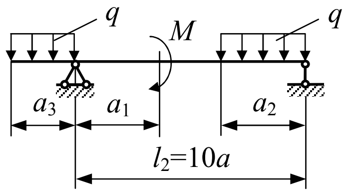


б)

VIII

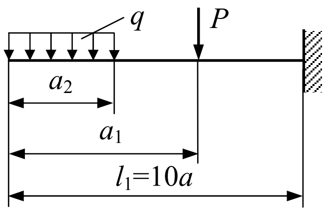


а)

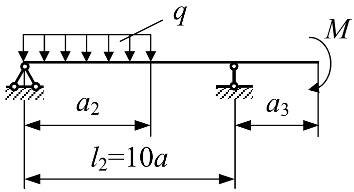


б)

IX

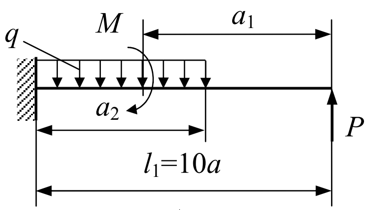


а)

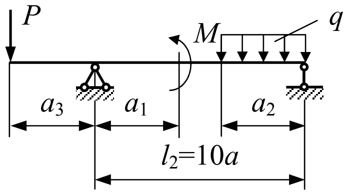


б)

X



а)



б)

Продовження рисунка 7.1

7.2 Приклад розрахунку консольної балки

Вихідні данні:

$$l_1=1{,}2 \text{ м};\quad a_1/a=2;\quad a_2/a=4;$$

$$M=2{,}0 \text{ кН·м};\quad P=2{,}0 \text{ кН};\quad q=6 \text{ кН/м}.$$

За відповідним варіантом креслимо в масштабі розрахункову схему (рис. 7.2, *а*) попередньо визначивши довжину a_2, на якій діє розподілене навантаження, і відстань a_1, яка визначає, де знаходиться точка прикладання зосередженого моменту. Це обчислення виконуємо так.

За даними схеми відомо, що довжина консолі $l_1=10a=1{,}2$ м, звідки $a=0{,}12$ м. Тоді $a_1=2a=0{,}24$ м; $a_2=4a=0{,}48$ м.

Далі виділяємо на схемі три силових ділянки: *AB, BC, CD* (рис. 7.2, *а*) і визначаємо реактивні зусилля R_A та M_A, для чого складаємо рівняння рівноваги у вигляді проекцій усіх сил на вертикальний напрям і моментів відносно точки *A*, тобто

$$\sum P_{верт}=0,\quad R_A-q\cdot a_2-P+2P=0,$$

звідки $R_A=q\cdot a_2-P=6\cdot 0{,}48-2=0{,}88$ кН;

$$\sum M_{(A)}=0,\quad M_A+q\cdot a_2\cdot\frac{a_2}{2}+P\cdot a_2+M-2P\,l_1=0,$$

звідки

$$M_A=-q\cdot\frac{a_2^2}{2}-P\cdot a_2-M+2P\cdot l_1=-6\cdot 0{,}48^2/2-2\cdot 0{,}48-2+2\cdot 2\cdot 1{,}2=1{,}149 \text{ кН}.$$

Реакція R_A і момент M_A мають додатний знак тому, що попередній їх напрям співпадає з дійсним.

Для побудови епюр поперечної сили та згинального моменту використовуємо метод перерізів. При цьому будемо дотримуватись наступних правил щодо визначення їх знаків:

– поперечна сила Q_y у перерізі додатна, якщо її вектори намагаються обертати частини розсіченої балки за годинниковою стрілкою;

– згинальний момент M_x у перерізі додатний, якщо він спричинює стискання у верхніх волокнах балки.

Розглянемо поступово всі відповідні ділянки та перерізи (рис.7.2, *а*).

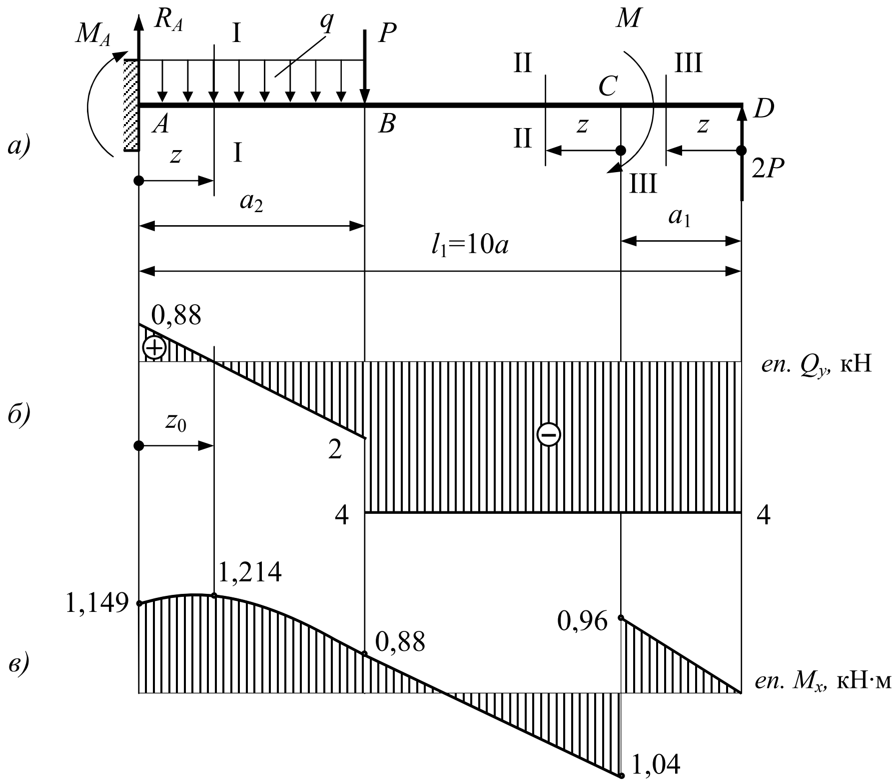


Рисунок 7.2 − Розрахункова схема і епюри поперечної сили та згинального моменту

Записуємо рівняння рівноваги відсіченої частини в загальному вигляді

$$Q_y+\sum P_y=0; \quad M_x+\sum \mathcal{M}_x=0,$$

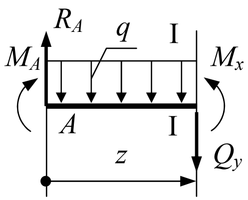
де $\sum P_y$ − сума проекцій на вертикальний напрям усіх зовнішніх сил, які діють на відсічену частину;

$\sum \mathcal{M}_x$ − сума моментів усіх сил відносно центра ваги перерізу I−I.

Для нашого прикладу маємо

Ділянка AB (переріз I−I):

$$0 \le z \le a_2$$



$$Q_y+q\cdot z-R_A=0; \quad M_x+ q\cdot z\cdot z/2-M_A-R_A\, z=0,$$

звідки $Q_y=R_A-q\cdot z$ – це рівняння прямої лінії, похилої до осі балки;

$M_x=M_A+R_A\cdot z-q\cdot z^2/2$ – це рівняння квадратичної параболи.

Визначаємо значення Q_y і M_x в крайніх точках ділянки AB

$z=0$, точка A: $Q_y=R_A=0{,}88$ кН; $M_x=M_A=1{,}149$ кН·м;

$z=a_2=0{,}48$ м, точка B: $Q_y=R_A-q\cdot a_2=0{,}88-6\cdot 0{,}48=-2$ кН;

$M_x=M_A+R_A\cdot a_2-q\cdot z^2/2=1{,}149+0{,}88\cdot 0{,}48-6\cdot 0{,}48^2/2=0{,}88$ кН·м.

Так як Q_y в межах ділянки AB змінює знак, то необхідно визначити координату z_0 точки перетину епюри Q_y з базовою лінією (віссю балки), де згинальний момент має екстремальне значення. Для цього запишемо умову, що при $z=z_0$, $Q_y=0$ і підставимо в рівняння для Q_y

$$Q_y=R_A-q\cdot z_0=0,\quad z_0=R_A/q=0{,}88/6=0{,}147 \text{ м.}$$

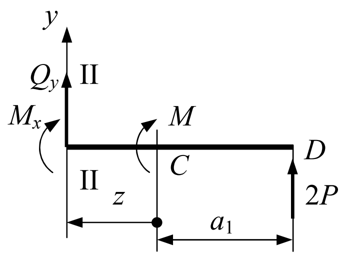
Тепер в точці перетину визначаємо згинальний момент

$$M_x=M_A+R_A\cdot z_0-q\cdot z_0^2/2=1{,}149+0{,}88\cdot 0{,}147-6\cdot 0{,}147^2/2=1{,}214 \text{ кН·м.}$$

Аналогічні обчислення виконуємо на інших ділянках.

Ділянка ВС (переріз II–II):

$0\le z\le l_1-(a_1+a_2)$



Рівняння рівноваги

$$Q_y+2P=0;$$

$Q_y=-2P=-2\cdot 2=-4$ кН$=const$ – це пряма лінія, паралельна осі балки, тобто Q_y на ділянці BC, не залежить від довільної координати z і має від'ємний знак.

$$M_x+M-2P(a_1+z)=0;$$

$M_x=-M_A-2P(a_1+z)$ – це рівняння прямої лінії, похилої до осі балки.

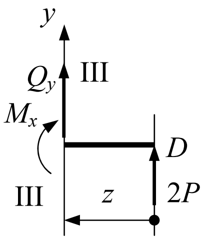
При $z=0$; $M_x=-M+2P\cdot a_1=-2+2\cdot 2\cdot 0{,}24=-1{,}04$ кН·м; – момент від'ємний.

$$z=l_1-(a_1+a_2)=1{,}2-(0{,}24+0{,}48)=0{,}48 \text{ м;}$$

$M_x=-M+2P(a_1+0{,}48)=-2+2\cdot 2(0{,}24+0{,}48)=0{,}88$ кН·м – момент додатний.

Ділянка DC (переріз III−III):

$0 \le z \le a_1$



Рівняння рівноваги

$$Q_y + 2P = 0;$$

$$Q_y = -2P = -2 \cdot 2 = -4 \text{ кН} = const;$$

$$M_x - 2P \cdot z = 0; \quad M_x = 2P \cdot z;$$

При $z=0$; $M_x=0$; при $z=a_1$; $M_x=2P \cdot a_1 = 2 \cdot 2 \cdot 0{,}24 = 0{,}96$ кН·м − момент додатний.

За результатами обчислення будуємо в масштабі епюри Q_y (рис.7.2, *б*) і M_x (рис.7.2, *в*).

Для перевірки правильності побудови епюр необхідно дотримуватись наступних правил:

– на ділянках, де не має розподіленого навантаження ($q=0$), епюра Q_y (рис.7.2, *б*) окреслена прямою, паралельною базі, а епюра M_x − похилою прямою (рис.7.2, *в* − ділянка *BC* і *CD*);
– на ділянках, де діє рівномірно розподілене навантаження ($q=const$), епюра Q_y обмежується похилою прямою, а епюра M_x − квадратичною параболою(рис.7.2, *б*, *в* − ділянка *AB*)[4];
– у перерізах, де $Q_y=0$ (змінює знак), на епюрі M_x має місце екстремум, а дотична до епюри M_x − паралельна базі (рис.7.2, *б*, *в*);
– у перерізах, де до балки прикладені зосереджені сили на епюрі Q_y будуть стрибки на значення прикладених сил у напрямі їх дії (рис.7.2, *б*, точки *A*, *B*, *D*), а на епюрі M_x будуть переломи, при чому , вістря перелому напрямлене проти дії сили (рис.7.2, *в*, точка *B*);
– у перерізах, де до балки прикладені зосереджені моменти на епюрі M_x мають місце стрибки на значення цих моментів, а на епюрі Q_y ніяких змін не буде (рис.7.2, *б*, *в*, точка *C*)[5].

Після побудови епюр Q_y і M_x знаходимо небезпечний переріз там, де діє максимальний за абсолютною величиною згинальний момент.

---

[4] Оскільки епюру M_x будуємо на стиснутих волокнах, то опуклість параболи звернена в бік, протилежний напряму дії навантаження q.

[5] Напрям стрибка залежить від напряму зовнішнього моменту.

Для нашого прикладу

$$M_{x,\,max}\text{=1,214 кН·м (рис.7.2, } \textit{в}\text{).}$$

Тепер визначимо розміри круглого та прямокутного поперечних перерізів із умови міцності за нормальними напруженнями

$$\sigma_{max} = \frac{M_{x,max}}{W_x} \le [\sigma],$$

де W_x − осьовий момент опру.

З умови міцності маємо

$$W_x = \frac{M_{x,max}}{[\sigma]} = \frac{1{,}214 \cdot 10^{-3}}{10} = 0{,}1214 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^3\text{=121,4 см}^3.$$

Для круглого поперечного перерізу визначаємо діаметр d і площу F_k

$$W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32}\text{=121,4 см}^3;\quad d = \sqrt[3]{\frac{32 W_x}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 121{,}4}{3{,}14}}\text{=10,74 м≈11 см;}$$

$$F_k = \pi \cdot d^2/4 = 3{,}14 \cdot 11^2/4 = 94{,}985\ \text{м}^2 \approx 95\ \text{см}^2.$$

Для прямокутного поперечного перерізу при $h/b=2$

$$W_x = b \cdot h^2/6 = b \cdot (2b)^2/6 = 2b^3/3 = 121{,}4\ \text{см}^3,$$

звідки $$b = \sqrt[3]{3W_x/2} = \sqrt[3]{3 \cdot 121{,}4/2} = 5{,}668\ \text{см} \approx 6\ \text{см};$$

$$h = 2b = 2 \cdot 6 = 12\ \text{см};\quad F_П = h \cdot b = 6 \cdot 12 = 72\ \text{см}^2.$$

Порівняємо поперечні перерізи за коефіцієнтом раціональності, який визначимо за формулою

$$\eta = \frac{W_x}{\sqrt{F^3}},$$

− круглий поперечний переріз

$$\eta_к = \frac{121{,}4}{\sqrt{95^3}} = 0{,}131;$$

− прямокутний поперечний переріз

$$\eta_П = \frac{121{,}4}{\sqrt{72^3}} = 0{,}199 \approx 0{,}2.$$

Таким чином прямокутний переріз більш раціональний, так як

$$\eta_к > \eta_П.$$

Можна порівняти балки також за їх вагою, враховуючи, що вага пропорційна площі F перерізу, тоді

$$F_к/F_П = 95/72 = 1{,}32,$$

Тобто балка круглого поперечного перерізу для забезпечення міцності буде у 1,32 рази важча, ніж прямокутного перерізу.

7.3 Приклад розрахунку на міцність двохопорної балки

Вихідні данні: l_2=10 м; a_1/a=4; a_2/a=8; a_3/a=2;

M=30 кН·м; P=15 кН; q=8 кН/м.

Згідно з варіантом креслимо в масштабі розрахункову схему (рис. 7.3, *а*), визначивши при цьому довжини a_1, a_2, a_3

$$l_2 = 10 \cdot a = 10 \text{ м}; \quad a = 1 \text{ м}; \quad a_1 = 4 \cdot a = 4 \text{ м}; \quad a_2 = 8 \cdot a = 8 \text{ м}; \quad a_3 = 2 \cdot a = 2 \text{ м}.$$

З розрахункової схеми видно, що вона має чотири силові ділянки: *AK*, *AC*, *CD* і *BD*.

Перед побудовою епюр Q_y і M_x необхідно визначити реактивні зусилля R_A і R_B, склавши рівняння моментів відносно опори *A* та *B*

$$\sum M_{(A)} = 0; \quad R_B \cdot l_2 - P \cdot a_2 - M - q \cdot a_2 \cdot a_2/2 + q \cdot a_3 \cdot a_3/2 = 0,$$

звідки

$$R_B = \left(P \cdot a_2 + M + q\frac{a_2^2}{2} - q\frac{a_3^2}{2} \right) \Big/ l_2 = (15 \cdot 8 + 30 + 8 \cdot 8^2/2 - 8 \cdot 2^2/2)/10 = 39 \text{ кН};$$

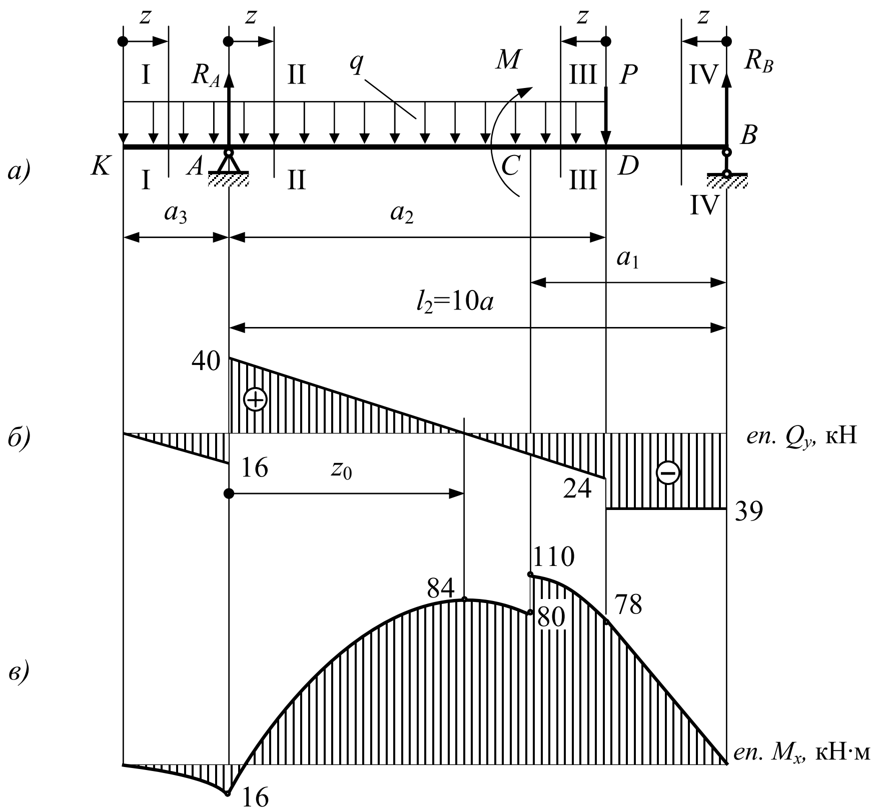


Рисунок 7.3 − Розрахункова схема і епюри поперечної сили та згинального моменту

$$\sum M_{(B)}=0; \quad R_A \cdot l_2 - q(a_2+a_3)[(a_2+a_3)/2+l_2-a_2]+M-P(l_2-a_2)=0;$$

$$R_A=\{q(a_2+a_3)\ [l_2-(a_2-a_3)/2]+P(l_2-a_2)-\text{M}\}/l_2=$$

$$=\{8(8+2)\ [10-(8-2)/2]+15(10-8)-30\}/10=56 \text{ кН}.$$

Правильність визначення реакцій перевіряємо рівнянням рівноваги у вигляді суми проекцій усіх зусиль на вертикальний напрям (вісь y), тобто

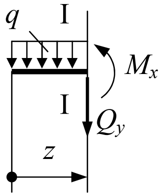
$$\sum P_{\text{у}}=0; \quad R_A+R_B-q(a_2+a_3)-P=0;$$

$$56+39-(8+2)-15=0.$$

Для побудови епюр Q_y і M_x розглянемо почергово силові ділянки і запишемо рівняння рівноваги для кожної відсіченої частини аналогічно, як у попередньому прикладі.

Ділянка AK (переріз I−I):

$0 \le z \le a_3 = 2$ м



$$Q_y + q \cdot z = 0; \quad Q_y = -q \cdot z;$$

$$M_x + q \cdot z \cdot z/2 = 0; \quad M_x = -q \cdot z^2/2.$$

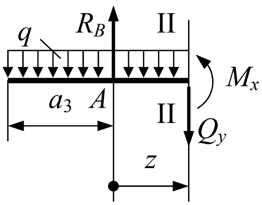
$z=0$; $\quad M_x=0$; $\quad Q_y=0$; − точка K.

$z=a_3$; $\quad Q_y=-q \cdot a_3=-8 \cdot 2=-16$ кН;

$$M_x = -q \cdot \frac{a_3^2}{2} = -8 \cdot 2^2/2 = -16 \text{ кН·м} - \text{точка } A.$$

Ділянка AC (переріз II−II):

$0 \le z \le l_2 - a_1 = 6$ м



$$Q_y - R_A + q(a_3 + z) = 0;$$

$$M_x - R_A \cdot z + q(a_3 + z)^2/2 = 0,$$

звідки $\quad Q_y = R_A - q(a_3 + z);$

$$M_x = R_A \cdot z - q(a_3 + z)^2/2.$$

Визначаємо значення Q_y і M_x в крайніх точках ділянки AC

$z=0$; $\quad Q_y=R_A-q \cdot a_3=56-8 \cdot 2=40$ кН;

$$M_x = -q \cdot \frac{a_3^2}{2} = -8 \cdot 2^2/2 = -16 \text{ кН·м} - \text{точка } A.$$

$z=l_2-a_1=6$ м; $\quad Q_y=R_A-q(a_3+6)=56-8(2+6)=-8$ кН;

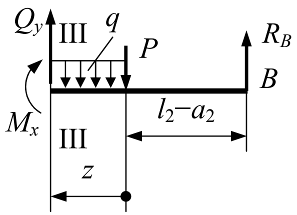
$$M_x = R_A \cdot 6 - 8(a_3+6)^2/2 = 56 \cdot 6 - 8(2+6)^2/2 = 80 \text{ кН·м} - \text{точка } C.$$

Визначимо координату z_0 точки перетину епюри Q_y з базовою лінією при $z=z_0$, $Q_y=0$, тобто

$$Q_y = R_A - q(a_3 + z_0) = 0; \quad z_0 = \frac{R_A - q \cdot a_3}{q} = \frac{56 - 8 \cdot 2}{8} = 5 \text{ м};$$

Тоді $\quad M_x = R_A \cdot z_0 - q(a_3 + z_0)^2/2 = 56 \cdot 5 - 8(2+5)^2/2 = 84$ кН·м.

Ділянка DC (переріз III−III): $0 \le z \le a_1 + a_2 - l_2 = 2$ м



$$Q_y + R_B - P - q \cdot z = 0; \quad Q_y = P - R_B + q \cdot z;$$

$$M_x - R_B(l_2 - a_2 + z) - P \cdot z - q \cdot z \cdot z/2 = 0;$$

$$M_x = R_B(l_2 - a_2 + z) + P \cdot z + q \cdot z^2/2.$$

$z = 0$;

$Q_y = P - R_B = 15 - 39 = -24$ кН − точка D;

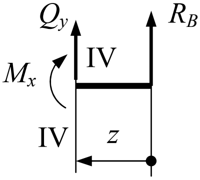
$M_x = R_B(l_2 - a_2) = 39(10 - 8) = 78$ кН·м − точка D.

$z = a_1 + a_2 - l_2 = 2$ м;

$Q_y = -24 + 8 \cdot 2 = -8$ кН − точка C;

$M_x = R_B(l_2 - a_2 + 2) - P \cdot 2 - q \cdot 2^2/2 = 39(10 - 8 + 2) - 15 \cdot 2 - 8 \cdot 4/2 = 110$ кН·м − точка C.

Ділянка BD (переріз IV−IV): $0 \le z \le l_2 - a_2 = 2$ м



$$Q_y + R_B = 0; \quad Q_y = -R_B = -39 \text{ кН} = const;$$

$$M_x - R_B \cdot z = 0; \quad M_x = R_B \cdot z.$$

$z = 0$; $\quad M_x = 0$ − точка B.

$z = l_2 - a_2 = 2$ м;

$M_x = R_B \cdot 2 = 39 \cdot 2 = 78$ кН·м − точка D.

За результатами обчислення будуємо епюри Q_y і M_x (рис. 7.3, *б*, *в*).

Правила перевірки правильності побудови епюр наведені у попередньому прикладі (с. 62).

Виберемо переріз двотаврової балки з умови міцності за нормальними напруженнями

$$\sigma_{max} = M_{x_{max}} / W_x \le [\sigma].$$

Найбільший згинальний момент (небезпечний переріз) має місце в точці C з боку ділянки DC, тобто $M_{x_{max}} = 110$ кН·м (рис. 7.3, *в*).

З умови міцності

$$W_x = M_{x_{max}} / [\sigma] = \frac{110 \cdot 10^{-3}}{160} = 0{,}6875 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 688{,}5 \text{ см}^3.$$

За таблицею сортаменту вибираємо двотавр №36, для якого $W_{x_{таб}}$=743 см^3, а J_x=13380 см^4.

Тоді максимальні напруження в двотаврі будуть такими

$$\sigma_{max}=\frac{110\cdot 10^{-3}}{0{,}743\cdot 10^{-3}}=148{,}05 \text{ МПа},$$

що менше за допустиме напруження на 7,5%. Це відхилення відрізняється від норми, при чому, в сторону збільшення коефіцієнту запасу. Нормативна розбіжність між допустимими і максимальними напруженнями знаходиться в межах ±5%.

Перевіримо міцність балки за дотичними напруженнями.

Умова міцності, згідно з формулою Д. І. Журавського, має вигляд

$$\tau_{max}=\frac{Q_{y_{max}}\cdot S_{x_{max}}}{J_x\cdot b_{(y)}}\le[\tau].$$

Ширина перерізу по нейтральній лінії (товщина стінки двотавра) $b_{(y)}=d$=0,75 см, а статичний момент половини двотавра відносно осі x, $S_{x_{max}}$=423 см^3 (таблиця сортаменту, двотавр №36).

Найбільша поперечна сила має місце в точці A з боку ділянки AC, тобто $Q_{y_{max}}$=40 кН (рис. 7.3, *б*).

Підставивши числові значення в умову міцності, матимемо

$$\tau_{max}=\frac{40\cdot 10^{-3}423\cdot 10^{-6}}{13380\cdot 10^{-8}\cdot 0{,}75\cdot 10^{-2}}=16{,}86\ \text{МПа}<[\tau]=80 \text{ МПа}.$$

Отже, розміри перерізу балки задовольняють умови міцності як за нормальними, так і за дотичними напруженнями.

[1, С. 237−255; 2, С. 220−231; 267; 4, С. 10−11].

8 РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ СКЛАДЕНОЇ БАЛКИ НА РУХОМЕ НАВАНТАЖЕННЯ

8.1 Умова задачі

Сталева балка довжиною l має поперечний переріз, який складається з двотавра і приварених до нього двох прямокутних смуг (рис. 8.1).

На двох таких балках, укладених паралельно, переміщується двовісний візок крана, який має корисне навантаження і власну вагу, які в сумі складають $2P$.

При цьому на одну вісь (на два колеса) передається тиск $\frac{n-1}{n}\cdot 2P$, на другу – $\frac{1}{n}\cdot 2P$, де коефіцієнт n характеризує розподіл загального навантаження між вісями.

Таким чином навантаження на кожну балку дорівнює

$$P_1 = \frac{n-1}{n}\cdot P; \quad P_2 = \frac{1}{n}\cdot P,$$

де P – половина загального навантаження на візок (рис. 8.2, *а*).

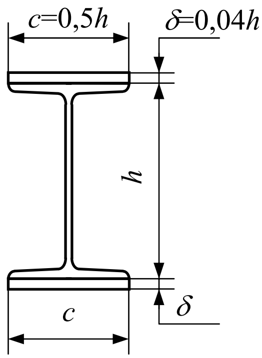


Рисунок 8.1 – Поперечний переріз складеної балки

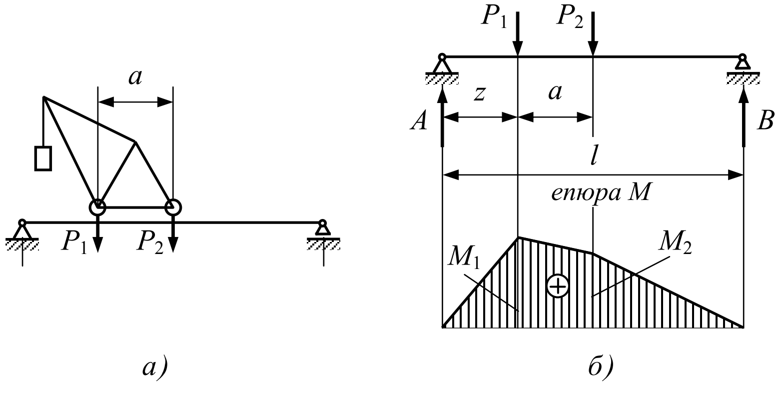


Рисунок 8.2 – Схема крана і балки та епюра моментів

Необхідно:

а) обчислити момент опору поперечного перерізу балки і найбільший згинальний момент, який балка може витримати;

б) знайти найбільш невигідне положення візка в прогоні балки, при якому згинальний момент має найбільше значення;

в) знайти найбільшу силу P (половину сумарного навантаження на візок), яку балка може витримати (власну вагу балки не враховувати).

Вихідні дані наведені в табл. 8.1.

Таблиця 8.1 − Вихідні дані

№ рядка	№ двотавра	Прогон балки l, м	Відстань між вісями візка a, м	Коефіцієнт n
1	60	11	2,1	2,1
2	65	12	2,2	2,2
3	70	13	2,3	2,3
4	30	4	2,4	2,4
5	33	5	2,5	2,5
6	36	6	1,6	2,6
7	40	7	1,7	2,7
8	45	8	1,8	2,8
9	50	9	1,9	2,9
0	55	10	2,0	3,0

8.2 Приклад розрахунку задачі

Вихідні данні: двотавр №40

h=40 см; F=72,6 см^2; J_x=19062 см^4; l=10 м;

a=1 м; n=2,5; $[\sigma]$=160 МПа.

Смуга: $c=0{,}5h=0{,}5\cdot 40{,}0=20{,}0$ см;

$\delta=0{,}04h=0{,}04\cdot 40{,}0=1{,}6$ см.

8.2.1 ***Обчислення моменту опору складеного перерізу балки*** − за формулою

$$W_x = \frac{J_x}{y_{max}},$$

де J_x − осьовий момент інерції складеного перерізу;

y_{max} − найбільша відстань від центральних осей до крайніх точок складеного перерізу, тобто

$$y_{max} = \frac{h}{2} + \delta = \frac{40}{2} + 1{,}6 = 21{,}6 \text{ см};$$

$$J_x = J_{x_{дв}} + 2 \cdot J_{x_{см}},$$

де $J_{x_{см}}$ − момент інерції смуги відносно центральної осі x двотавра.

Враховуючи паралельний перенос осей

$$J_{x_{\text{см}}} = \frac{c \cdot \delta^3}{12} + \left(\frac{h+\delta}{2}\right)^2 \cdot c \cdot \delta =$$

$$= \frac{20 \cdot 1{,}6^3}{12} + \left(\frac{40+1{,}6}{2}\right)^2 \cdot 20 \cdot 1{,}6 = 13848{,}75 \text{ см}^4.$$

Тоді J_x=19062+2·13848,75=46759,5 см^4.

Таким чином

$$W_x = \frac{46759{,}5}{21{,}6} = 2164{,}8 \text{ см}^3.$$

8.2.2 ***Визначення найбільшого згинального моменту із умови міцності за нормальними напруженнями***

$$\sigma_{max} = \frac{M_{x_{max}}}{W_x} \le [\sigma],$$

звідки $M_{x_{max}} = W_x \cdot [\sigma] = 2164{,}8 \cdot 10^{-6} \cdot 160 = 0{,}3464$ МН·м=

=346,4 кН·м.

8.2.3 *Визначення найбільш невигідного положення візка в прогоні балки, при якому згинальний момент буде найбільшим*

При цьому вважати, що $P_1 > P_2$.

Епюра M_x в цьому випадку буде мати вигляд (рис. 8.2, *б*). Визначення реакцій опор R_A і R_B

$$\sum M_B = 0; \quad -R_A \cdot l + P_1(l - z) + P_2(l - a - z) = 0;$$

$$R_A \cdot l = P_1(l - z) + P_2(l - a - z).$$

Враховуючи, що

$$P_1 = P\frac{n-1}{n} = P\frac{2{,}5-1}{2{,}5} = 0{,}6P; \quad P_2 = \frac{1}{n}P = \frac{1}{2{,}5}P = 0{,}4P,$$

одержимо

$$R_A = \frac{0{,}6P \cdot l - 0{,}6P \cdot z + 0{,}4P \cdot l - 0{,}4P \cdot a - 0{,}4P \cdot z}{l};$$

$$R_A = \frac{P}{l}(l - z - 0{,}4a).$$

Найбільший згинальний момент буде під силою P_1

$$M_{x_{max}} = R_A \cdot z = \frac{P}{l}z(l - z - 0{,}4a).$$

Скориставшись умовою екстремуму, тобто

$$\frac{dM_x}{dz} = 0\,; \rightarrow \frac{dMx}{dz} = P - \frac{2P}{l}z - \frac{P}{l} \cdot 0{,}4a = 0\,,$$

визначимо

$$z=(l-0{,}4a)/2=(10-0{,}4\cdot 1)/2=4{,}8 \text{ м}.$$

Визначаємо найбільшу силу P

$$M_{x\,max} = \frac{P \cdot z}{l}\left(l - z - 0{,}4a\right) = 346{,}4 \text{ кН·м};$$

$$P = \frac{346{,}4 \cdot l}{z\left(l - z - 0{,}4a\right)} = \frac{346{,}4 \cdot 10}{4{,}8 \cdot \left(10 - 4{,}8 - 0{,}4 \cdot 1\right)} = 150{,}35 \text{ кН}.$$

[2, С. 36–37;].

ЛІТЕРАТУРА

1. Опір матеріалів. Підручник /Г.С. Писаренко, О.А. Квітка, Е.С. Уманський; За ред. Г.С. Писаренка. − К.: Вища школа, 2004. − 655 с.

2. Сопротивление материалов. Методические указания и контрольные задачи для студентов-заочников всех специальностей высших учебных заведений. / А. В. Дарков, Б. Н. Кутуков. − М.: Высш. шк., 1985. − 56 с.

3. Дарков А. В., Шпиро Г. С. Сопротивление материалов: Учебник для техн. вузов. − 5-е узд. − М.: Высш. шк., 1989. − 624 с.

4. Методичні вказівки для самостійної роботи і перевірки рівня засвоєння курсу „Опір матеріалів” з використанням програмного комплексу для студентів всіх спеціальностей денної форми навчання. /А. О. Будник, В. Г. Шевченко, С. Л. Рягін. − Запоріжжя: ЗНТУ, 2004. − 15 с.