

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**Національний університет “Запорізька політехніка”**

Омельченко О.С., Скрєбцов А.А., Штанько П.К.

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ З ДИСЦИПЛІНИ**  
**ОСНОВИ СКЛАДНОГО ОПОРУ**  
**МАТЕРІАЛІВ І КОНСТРУКЦІЙ**  
для студентів спеціальностей 131, 133, 134 усіх форм навчання

2023

Конспект лекцій з дисципліни «**Основи складного опору матеріалів і конструкцій**» для студентів спеціальностей 131, 133, 134 усіх форм навчання / Укл.: Омельченко О.С., Скребцов А.А., Штанько П.К.,– Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2023. –160 с.

Укладачі: О.С. Омельченко, ст. викладач.  
А.А. Скребцов, доцент, канд.техн.наук;  
П.К. Штанько, доцент, канд.техн.наук;

Рецензент: В.І. Пожуєв, професор, д-р фіз-мат.наук

Відповідальний  
за випуск: В.Г. Шевченко, завідувач каф. «Механіка»

Затверджено  
на засіданні кафедри  
“Механіка”  
Протокол № 5  
від “12” 12 2022.

Рекомендовано до видання  
НМК ФБАД  
Протокол № 4  
від “28” 12 2022.

## ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	6
1. СКЛАДНИЙ ОПІР .....	7
1.1 Косе згинання.....	7
1.2 Розрахунки на міцність та жорсткість при косому згинанні.....	10
1.3 Складне згинання з розтяганням прямого бруса.....	12
1.4 Позацентрове розтягання і стискання прямого бруса.....	15
1.5 Визначення напружень при згинанні з крученням.....	21
1.6 Розрахунки на міцність і жорсткість валів при згинанні з крученням.....	26
1.7 Повздожньо-поперечне згинання.....	27
1.8 Контрольні запитання.....	30
2. ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ.....	31
2.1 Поняття по потенційну енергію деформації.....	31
2.2 Теорема про взаємність робіт і переміщень (теорема Кастіліано).....	33
2.3 Визначення переміщень по методу Мора.....	34
2.4 Визначення переміщень способом Верещагіна.....	37
2.5 Контрольні запитання.....	43
3. НДС ПЛОСКИХ КРИВИХ БРУСІВ ВЕЛИКОЇ КРИВИЗНИ.....	44
3.1 Епюри внутрішніх зусиль в криволінійних брусах.....	45
3.2 Визначення напружень плоских кривих стержнях.....	46
3.3 Розрахунки на міцність кривих брусів.....	54
3.4 Визначення переміщень у кривих брусах.....	55
3.5 Контрольні запитання.....	62
4. СТІЙКІСТЬ СТИСНУТИХ СТЕРЖНІВ.....	63
4.1 Диференційне рівняння пружної лінії деформованого стержня.....	63
4.2 Задача Ейлера.....	64
4.2.1 Критична сила.....	64
4.2.2 Вплив умов закріплення.....	67
4.3 Умови застосування формули Ейлера.....	68
4.4 Розрахунки на стійкість за допомогою коефіцієнтів зменшення основного допустимого напруження.....	70

4.5 Розрахунки на стійкість за межею гнучкості матеріалів.....	72
4.6 Добір матеріалу та раціональної форми для стиснутих стержнів.....	74
4.7 Контрольні запитання.....	75
<b>5. РОЗРАХУНКИ СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ.....</b>	<b>76</b>
5.1 Основні поняття та визначення. Етапи розрахунку статично невизначуваних систем.....	76
5.2 Розрахунок простої статично невизначуваної балки.....	80
5.3 Канонічні рівняння методу сил.....	83
5.4 Теорема про взаємність робіт та переміщень.....	86
5.5 Контрольні запитання.....	88
<b>6. БАГАТОПРОЛЕТНІ НЕРОЗРІЗНІ БАЛКИ.....</b>	<b>89</b>
6.1 Розрахунок нерозрізних балок. Основні поняття.....	89
6.2 Рівняння трьох моментів.....	92
6.3 Окремі випадки застосування рівняння трьох моментів..	101
6.45 Контрольні запитання.....	104
<b>7. РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ПРИ ДИНАМІЧНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ.....</b>	<b>105</b>
7.1 Розрахунок на міцність з урахуваннями сил інерції.....	105
7.2 Визначення напружень в кільцях, що обертаються.....	107
7.3 Розрахунки на міцність прямого обертового стержня.....	111
7.4 Контрольні запитання.....	112
<b>8. ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕННЯ І РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ПРИ УДАРНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ.....</b>	<b>113</b>
8.1 Допущення при ударі.....	113
8.2 Напруження при ударі. Умова міцності.....	114
8.3 Механічні властивості матеріалу при ударі.....	117
8.4 Контрольні запитання.....	120
<b>9. ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ І РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ПРИ КОЛИВАННЯХ.....</b>	<b>121</b>
9.1 Коливання: основні поняття.....	124
9.2 Вільні (гармонійні) коливання пружної системи з одним ступенем вільності.....	125
9.3 Вимушені коливання систем з одним ступенем вільності.....	127
9.4 Явище резонансу і заходи по його запобіганню.....	130

9.5	Визначення напружень і розрахунки на міцність при коливаннях.....	131
9.6	Контрольні запитання.....	3
10.	<b>ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ І РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ПРИ ПОВІЛЬНО-ЗМІННИХ НАВАНТАЖЕННЯХ.....</b>	<b>134</b>
10.1	Явище втомленості матеріалів. Означення.....	134
10.2	Параметри циклу повторно-змінних напружень.....	136
10.3	Методи визначення границі втомленості.....	138
10.4	Вплив конструктивно-технологічних факторів.....	140
10.5	Розрахунки на міцність при повторно-змінних навантаженнях.....	143
10.6	Контрольні запитання.....	146
11.	<b>КОНТАКТНІ НАПРУЖЕННЯ.....</b>	<b>147</b>
11.1	Основні поняття.....	147
11.2	Формули для визначення контактних напружень.....	148
11.3	Умови міцності при контактних напруженнях.....	157
11.4	Контрольні запитання.....	159
	<b>РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА.....</b>	<b>160</b>

## ПЕРЕДМОВА

Опір матеріалів є однією з найважливіших дисциплін, яка формує інженерне мислення студентів механічних спеціальностей вищих технічних навчальних закладів і є теоретичним фундаментом їх технічної освіти. Тому розроблений конспект лекцій є актуальним та містить основні положення, визначення, правила, теореми, розрахункові формули та методи опору матеріалів, викладені у конспективній формі відповідно до розділів курсу. Методика виведення розрахункових формул наведена без деталізації проміжних результатів. У конспекті є також достатня кількість довідкових матеріалів, необхідних для розв'язування практичних задач або виконання розрахунково-графічних робіт, у вигляді схем та довідникових таблиць.

Матеріал розбитий на розділи, кожен з яких складається з теоретичної частини та контрольних запитань. Контрольні запитання можуть бути одночасно запитаннями модульного контролю, тому побудовані так, що вимагають логічно обґрунтованих відповідей.

Значна увага приділена розділам, які вважаються складнішими, зокрема енергетичним методам визначення переміщень, міцності стержнів при періодично-змінних та динамічних навантаженнях, стійкості стержнів.

Конспект призначений для ефективної самопідготовки студентів при мінімальних витратах часу, для впорядкування та закріплення набутих знань, а також при дистанційній формі навчання. Конспект відповідає стандартам освітніх програм по опору матеріалів для студентів механічних спеціальностей та адаптований для освітнього рівня здобувачів.

## 1. СКЛАДНИЙ ОПІР

Раніше ми вивчали найпростіші **види деформації**: поздовжні розтягання та стискання, зсув, кручення і плоске поперечне згинання.

У загальному випадку навантаження бруса у поперечних перерізах можуть діяти всі шість компонент внутрішніх сил –  $N$ ,  $Q_y$ ,  $Q_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ ,  $M_x$ , пов'язаних з чотирма простими деформаціями.

В практиці найпростіші види деформації в чистому вигляді майже не зустрічаються. Більшість деталей працюють в умовах складного опору. На елементи конструкцій діють декілька простих видів деформацій. Таким чином, у випадку **складного опору в поперечному перерізі стержня можуть виникати комбінація декількох внутрішніх зусиль**.

Якщо в стержні переміщення точок осі в порівнянні з поперечними розмірами малі, а повороти перерізів малі в порівнянні з одиницею, то при визначенні сумарних напружень застосовують **принцип незалежності дії сил**, згідно якого необхідно визначити напруження від кожного компоненту внутрішніх сил окремо за відомими формулами, а потім їх скласти.

### 1.1 Косе згинання

**Складним (неплоским) згинанням називається такий вид навантаження, при якому навантаження діють в декількох площинах, що проходять через вісь балки** (Рис. 1.1). При складному згинанні у поперечних перерізах бруса виникають **чотири внутрішніх силових фактори**:  $Q_y$ ,  $Q_x$ ,  $M_y$ ,  $M_z$ . Розраховуючи на міцність при складному згинанні, як правило, нехтують впливом дотичних напружень.

**Якщо навантаження діють в одній площині, яка не співпадає ні з однією з головних площин інерції, то такий вид згинання називається косим**.

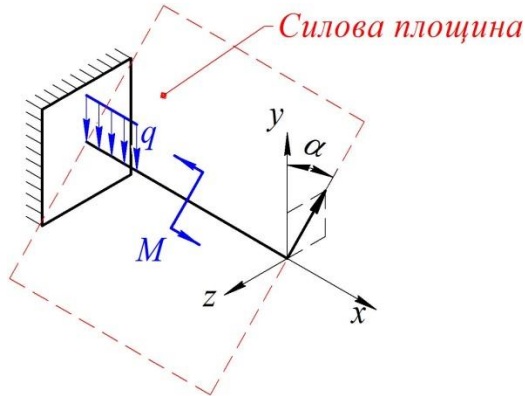


Рисунок 1.1 – Складне згинання

У випадку неплоского згинання найзручніше зводити згинання до двох плоских. Для цього навантаження треба розкласти на складові, які розташовуються в головних площинах  $xu$  та  $xz$  (тут осі  $y$  та  $z$  – основні осі інерції перерізу) (Рис. 1.2). Виходячи з принципу суперпозиції, знайдемо напруження в точці з координатами  $yz$ , розглядаючи два плоских згинання від моментів  $M_z$  і  $M_y$ . Тоді нормальні напруження в точці будуть:

$$\sigma' = \frac{M_z \cdot y}{J_z} \quad \text{і} \quad \sigma'' = \frac{M_y \cdot z}{J_y}.$$

У зв'язку з тим, що напруження однойменні, то нормальне напруження  $\sigma = \sigma' + \sigma''$ ,

$$\sigma = \frac{M_z \cdot y}{J_z} + \frac{M_y \cdot z}{J_y}. \quad (1.1)$$



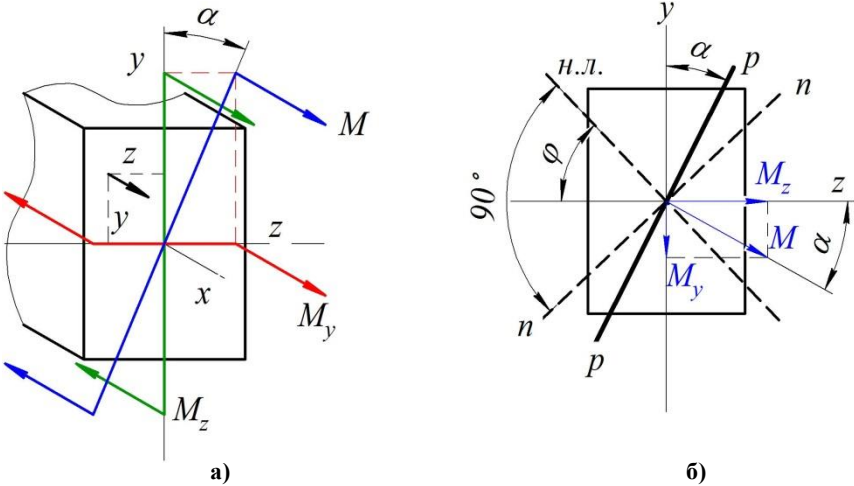


Рисунок 1.2 – Косе згинання

У випадку косоного згинання моменти  $M_z$  і  $M_y$  пов'язані залежностями:

$$M_z = M \cos \alpha; \quad M_y = M \sin \alpha. \quad (1.2)$$

Тоді, використовуючи формулу (1.1), будемо мати:

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{M \cos \alpha \cdot y}{J_z} + \frac{M \sin \alpha \cdot z}{J_y} \\ &= M \left( \frac{\cos \alpha \cdot y}{J_z} + \frac{\sin \alpha \cdot z}{J_y} \right), \end{aligned} \quad (1.3)$$

де  $M$  – згинальний момент в даному перерізі в силевій площині  $p-p$ .

Формули (1.1) і (1.3) дозволяють визначити нормальні напруження в будь-якій точці поперечного перерізу при складному або, як говорять ще, **просторовому згинанні**. Згинальний момент і координати точок, в яких визначають напруження, підставляють у формули зі своїми знаками.

Рівняння нейтральної лінії в перерізі знайдемо, вважаючи  $\sigma = 0$  і позначаючи координати точок нейтральної лінії (н.л.) через  $z_0$  і  $y_0$ :

$$\frac{y_0}{J_z} \cos \alpha + \frac{z_0}{J_y} \sin \alpha = 0. \quad (1.4)$$

Це рівняння є рівнянням прямої, що проходить через початок координат (центр ваги перерізу), оскільки звертається в нуль при  $x_0 = y_0 = 0$ .

Положення нейтральної лінії характеризується її кутовим коефіцієнтом

$$tg \varphi = \frac{y_0}{z_0} = - \frac{J_z M_y}{J_y M_z}. \quad (1.5)$$

Аналіз останньої формули показує, що:

– при косому згинанні нейтральна лінія не перпендикулярна силовій площині. Вона проходить через центр ваги перерізу та через II і IV квадранти під кутом  $\varphi$ ;

– викривлення осі бруса при косому згинанні відбувається в площині  $n - n$ , нормальній до напрямку нейтральної лінії (див. рис.13.2, б); ця площина називається **площиною згинання**,

– напрямок площини згинання ( $tg \varphi$ ) може бути перпендикулярним до площини дії зовнішнього навантаження ( $tg \alpha$ ) тільки тоді, коли остання співпадає з однією з головних площин бруса, або коли  $J_z = J_y$  (круг, квадрат і т.д.); у загальному випадку кут нахилу  $\varphi$  нейтральної лінії  $n - n$  не рівний куту  $\alpha$  нахилу силової площини.

## 1.2 Розрахунки на міцність та жорсткість при косому згинанні

Оскільки еюра нормальних напружень в перерізі балки лінійна, то максимальні напруження виникають в точці, яка найбільш віддалена від нейтральної лінії. Хай координати цієї точки  $(z_1, y_1)$ . Тоді з рівняння (13.1) одержуємо:

$$\sigma_{max} = \frac{M_z \cdot y_1}{J_z} + \frac{M_y \cdot z_1}{J_y}. \quad (1.6)$$

Коли переріз симетричний відносно обох осей, визначення найбільших напружень значно спрощується. Так, для прямокутного перерізу максимальні напруження будуть завжди в вершинах прямокутника, і для них легко записати:

$$\sigma_{max} = \frac{M_z}{J_z} y_{max} + \frac{M_y}{J_y} z_{max}.$$

або

$$\sigma_{max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y}, \quad (1.7)$$

де  
 $W_z = \frac{J_z}{y_{max}}$ ;  $W_y = \frac{J_y}{z_{max}}$  – моменти опору перерізу відносно осей  $z$  та  $y$ .

При визначенні розмірів перерізу з **умови міцності при косому згинанні** за формулою

$$\sigma_{max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma] \quad (1.8)$$

невідомі  $W_z$  та  $W_y$  не можна знайти з одного рівняння. Тому, необхідно визначити співвідношення  $\frac{W_z}{W_y}$  шляхом послідовних спроб, що задовольняє умові (1.8). У разі прямокутного перерізу

$$\frac{W_z}{W_y} = \frac{h}{b}.$$

Тому, задаючись співвідношенням, з умови (1.8) можна знайти величину  $W_z$  і розміри поперечного перерізу.

Для визначення прогинів у різних перерізах балки при косому згинанні так само, як і при визначенні напружень, використовуємо спосіб суперпозиції, тобто складання діючих сил. Позначаючи прогин у напрямках головних осей  $z$  та  $y$  через  $w$  та  $v$ , запишемо диференційні рівняння прогинів у площинах  $xz$  та  $xy$ :

$$EJ_y \cdot \frac{d^2v}{dx^2} = M_y; \quad EJ_z \cdot \frac{d^2w}{dx^2} = M_z.$$

Сумарний прогин  $f$  (Рис.1.3) визначиться як геометрична сума прогинів  $w$  та  $v$  ( $f_z = v$ ;  $f_y = w$ )

$$f = \sqrt{f_z^2 + f_y^2} = \sqrt{v^2 + w^2}. \quad (1.9)$$

**Напрямок прогину  $f$  при косому згинанні в кожному перерізі співпадає з площиною згинання, перпендикулярною нейтральній лінії (н.л.) у даному перерізі.**

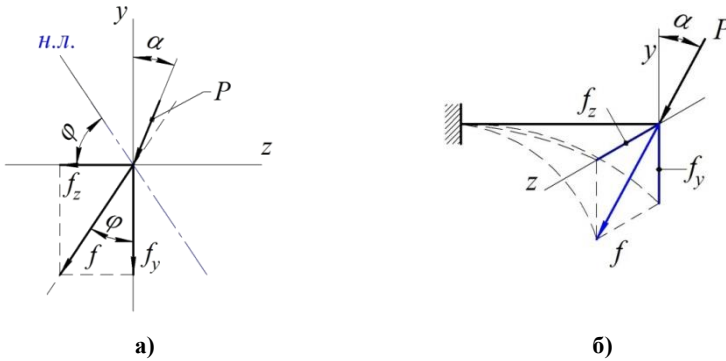


Рисунок 1.3 – Прогини при косому згинанні

### 1.3 Складне згинання з розтяганням прямого бруса

Розрахунки на спільну дію згинання та розтягання можна звести до таки двох видів:

- розрахунки на дію поздовжньо-поперечних навантажень;
- розрахунки на позацентрове розтягання (стискання).

Якщо на балку діють поздовжні та поперечні навантаження, що викривляють вісь бруса, то в поперечних перерізах виникають згинальні моменти  $M_y$  та  $M_z$ , поперечні сили  $Q_y$ ,  $Q_x$ , а також поздовжня сила  $N$  (Рис. 1.9).

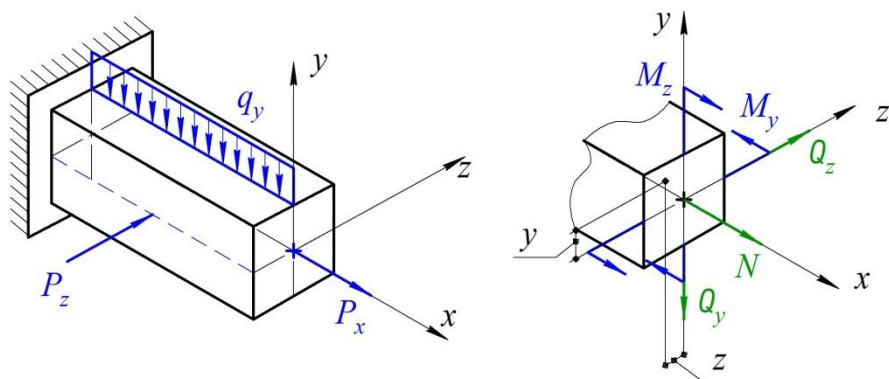


Рисунок 1.4 – Схема навантаження та внутрішні силові фактори при згинанні з розтяганням прямого бруса

Нормальні напруження в довільній точці перерізу при такому навантаженні

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z. \quad (1.10)$$

Згинальні моменти, поздовжню силу та координати точки, в якій визначають напруження, підставляють в цю формулу з урахуванням знаків.

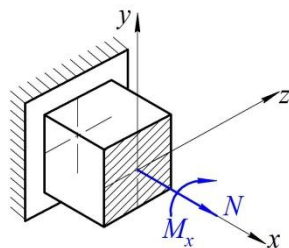
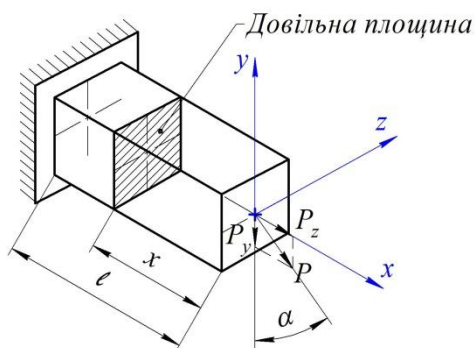
Нехтуючи дотичними напруженнями від поперечних сил, можна вважати, що напружений стан у небезпечній точці лінійний.

Отже, умова міцності має простий вигляд:

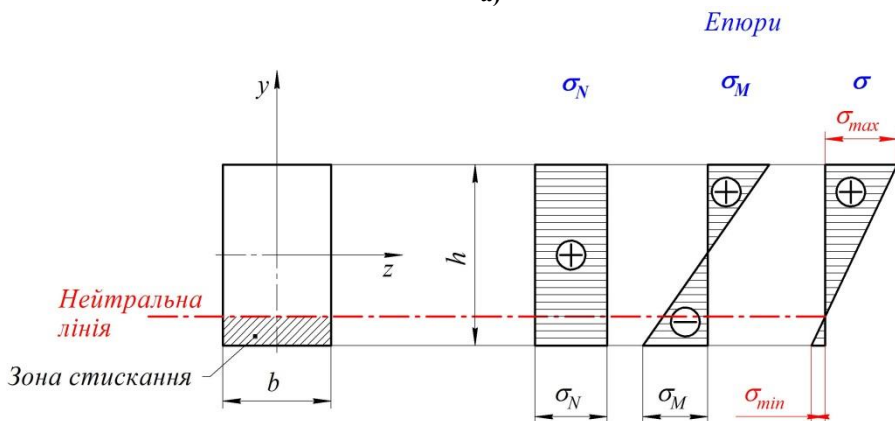
$$\sigma_{max} \leq [\sigma]. \quad (1.11)$$

Якщо переріз має дві осі симетрії, то небезпечною буде одна з кутових точок і напруження в ній визначають за формулою:

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y}. \quad (1.12)$$



а)



б)

Рисунок 1.5 – Згинання з розтяганням прямого бруса

**Зауваження.** При згинанні з стисанням формули (1.10) і (1.12) можна застосовувати лише для коротких стержнів великої жорсткості – для тонких довгих стержнів можлива втрата стійкості.

У випадку плоского згинання з розтяганням в головній площині  $xOy$  формула (1.12) спрощується:

$$\sigma = \frac{N}{F} \pm \frac{M_z}{W_z}. \quad (1.13)$$

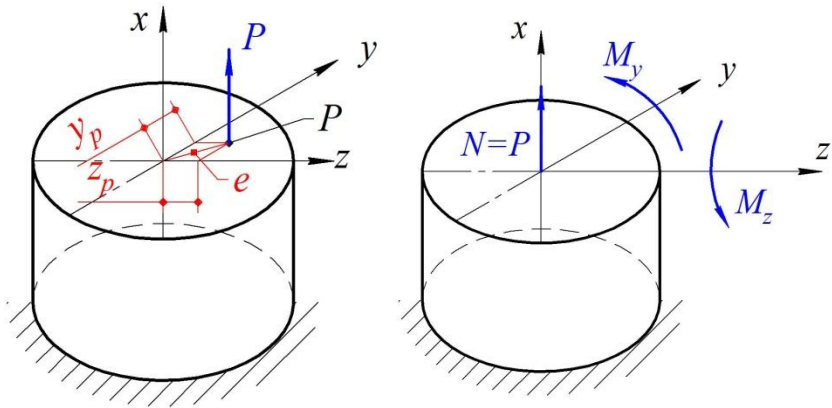
## 1.4 Позацентрове розтягання і стискання прямого бруса

Вид навантаження, при якому рівнодіюча зовнішніх сил не співпадає з віссю стрижня, а зміщена щодо його осі і залишається їй паралельною, називається позацентровим розтяганням або стисканням.

Точка прикладання рівнодіючої  $P$  називається полюсом сили.

На брус довільного перерізу діє одна сила  $P$ , яка паралельна осі бруса і прикладена в точці  $P$  перерізу. Точка прикладання зовнішніх сил має координати  $z_p, y_p$ . При такому навантаженні в будь-якому поперечному перерізі бруса діють поздовжня сила  $N = P$  і згинальні моменти (див. рис.1.6, б):

$$M_z = P y_p; \quad M_y = P z_p.$$



а) б)  
Рисунок 1.6 – Позацентрове розтягання (стискання) осі

Таким чином, позацентрове розтягання-стискання виявляється ідентичним косому згинанню. На відміну від останнього, в поперечному перерізі бруса виникають не тільки згинальні моменти, але і подовжня сила  $N = P$ .

У довільній точці з координатами  $z$  у нормальні напруження  $\sigma$  складаються з напружень осевого розтягання (стискання) силою  $N$  і напружень від чистого згинання моментів  $M_z, M_y$  див. формулу (1.10).

Очевидно, просторова епюра утворює площину (оскільки координати  $z$  і  $y$  в рівнянні входять до першого ступеню), яка не проходить через центр ваги перерізу (оскільки при  $z = 0$  і  $y = 0$   $\sigma \neq 0$ ).

Підставивши в рівняння (1.10) замість  $N, M_z, M_y$  їх значення, одержимо:

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{P \cdot y_P}{J_z} y + \frac{P \cdot z_P}{J_y} z. \quad (1.14)$$

$\frac{P}{F}$  винесемо за дужки, а моменти інерції виразимо через радіуси інерції

$$J_z = i_z^2 F; \quad J_y = i_y^2 F.$$

Одержимо формулу для визначення нормальних напружень в довільній точці перерізу:

$$\sigma = \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{y_P}{i_z^2} y + \frac{z_P}{i_y^2} z \right). \quad (1.15)$$

Складовими, що змінюються, у формулах (1.14) і (1.15) є два останніх доданки, що відображають вплив згинання. Оскільки при згинанні найбільші напруження будуть в точках, найбільш віддалених від нейтральної лінії, то, як і при косому згинанні, треба відшукати положення нейтральної лінії.

Позначимо координати точок, які належать нейтральній лінії, через  $z_0$  і  $y_0$ . На нейтральній лінії  $\sigma = 0$ , тобто

$$\sigma = \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{y_P \cdot y_0}{i_z^2} + \frac{z_P \cdot z_0}{i_y^2} \right) = 0.$$

Оскільки



$$\frac{P}{F} \neq 0, \text{ то } 1 + \frac{y_P \cdot y_0}{i_z^2} + \frac{z_P \cdot z_0}{i_y^2} = 0. \quad (1.16)$$

де  $z_P, y_P$  – координати точок прикладання рівнодіючої зовнішніх сил;

$z_0, y_0$  – координати точок нейтральної лінії.

Рівняння (1.16) є **рівнянням нейтральної лінії**, з якого видно, що нейтральна лінія не проходить через центр ваги перерізу. Щоб побудувати цю пряму, простіше за все визначити відрізки, які відсікаються нею на осях координат. Позначимо ці відрізки через  $z_H$  і  $y_H$  (Рис. 1.7).

Щоб знайти відрізок  $z_H$ , який відсікається на осі  $Ox$ , необхідно в рівнянні (1.16) взяти  $z_0 = z_H, y_0 = 0$ .

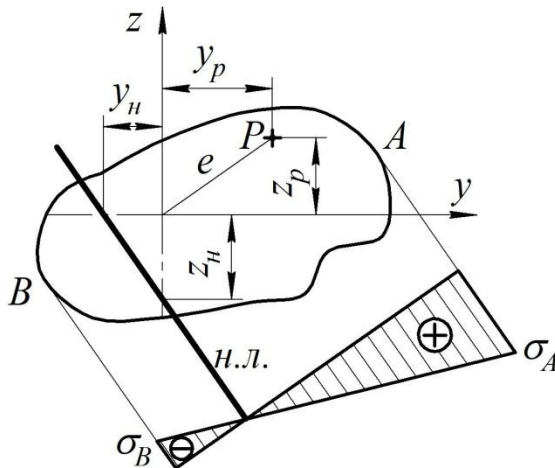


Рисунок 1.7 – Визначення розташування нейтральної лінії

Тоді одержимо

$$1 + \frac{z_P \cdot z_H}{i_y^2} = 0.$$

Звідки

$$z_H = -\frac{i_y^2}{z_P}. \quad (1.17)$$

Аналогічно, беручи  $z_0 = 0, y_0 = y_H$ , одержимо

$$y_H = -\frac{i_z^2}{y_P}. \quad (1.18)$$

З виразів (1.17) і (1.18) видно, що якщо  $y_P$  і  $z_P$  додатні, то відрізки  $z_H$  і  $y_H$  будуть від'ємні, тобто **нейтральна лінія завжди розташована в квадранті, протилежному тому, в якому знаходиться точка прикладання зовнішньої сили.**

**Якщо полюс розташований на одній з головних осей, то нейтральна лінія перпендикулярна їй.**

**Якщо полюс наближається до центра ваги перерізу, нейтральна лінія віддаляється від нього.**

Тепер, проводячи паралельно нейтральній лінії дотичні до контуру перерізу, знайдемо найбільш напружені точки  $A$  і  $B$  у розтягнутій і стиснутій зонах перерізу і побудуємо епюру нормальних напружень  $\sigma$  (див. рис.1.7).

Напруження в цих точках і **умови міцності** мають вигляд:

$$\sigma_A = \sigma_{\text{розт}}^{\text{max}} = P \left( \frac{1}{F} + \frac{y_P \cdot y_A}{i_z^2} + \frac{z_P \cdot z_A}{i_y^2} \right) \leq [\sigma_+], \quad (1.19)$$

$$\sigma_B = \sigma_{\text{стиск}}^{\text{min}} = P \left( \frac{1}{F} + \frac{y_P \cdot y_B}{i_z^2} + \frac{z_P \cdot z_B}{i_y^2} \right) \leq [\sigma_-]. \quad (1.20)$$

Для поперечних перерізів, у яких обидві головні осі інерції є осями симетрії (прямокутник, двотавр і ін.), координати  $z, y$  точок вершин одночасно досягають максимальних значень. Тому формули (1.19) і (1.20) можна записати у вигляді:

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{P}{F} + \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]. \quad (1.21)$$

### Ядро перерізу

Нейтральна лінія у загальному випадку може проходити як через поперечний переріз, так і за ним. Дійсно, якщо сила  $P$  прикладена в

центрі тяжіння ( $z_p = y_p = 0$ ), то, згідно з формулами (1.17) і (1.18), нейтральна лінія проходить в нескінченності, і напруження в цьому випадку розподілене за перерізом рівномірно. Із збільшенням **ексцентриситету** (відстані від центра ваги перерізу елемента до точки **прикладення** поздовжньої сили)  $e$  нейтральна вісь наближається до центра ваги перерізу. Конструктору бажано знати наперед, який ексцентриситет при вибраному типі перерізу можна допустити, не ризикуючи викликати в перерізі стрижня напружень різних знаків. Це важливо знати при конструюванні стрижнів з матеріалів, що по-різному працюють на розтягання і стискання. Необхідно встановити область таких віддалень сили  $P$  від осі, при яких епюра нормальних напружень за перерізом залишатиметься з одним знаком. Бажано досягнути щоб весь переріз працював на стискання.

**Ядром перерізу називається область навколо центра його ваги, прикладення сили  $P$  усередині якої викликає напруження одного знаку.**

Для побудови ядра перерізу необхідно задаватися різними положеннями нейтральної лінії і обчислити відповідні точки прикладення сили  $P$  за формулами:

$$z_p = -\frac{i_y^2}{z_H}; \quad y_p = -\frac{i_z^2}{y_H}. \quad (1.22)$$

Розраховані координати  $z_p, y_p$  визначають точки, які лежать на межі ядра перерізу (Рис.1.13).

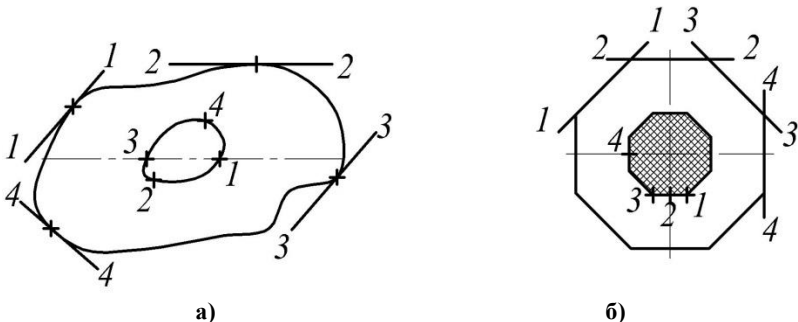


Рисунок 1.13 – Побудова ядра перерізу

При повороті нейтральної лінії навколо деякої нерухомої точки контуру перерізу точка прикладання сили переміщається вдовж деякої кривої, оскільки  $z_p, y_p$  і  $z, y$  зв'язані лінійно (див. рис. 1.8, а). Для побудови ядра перерізу якого-небудь багатокутника необхідно проводити дотичні, співпадаючі з його сторонами. Чим більше буде побудовано дотичних, тим точніше буде побудована область ядра. Ядро перерізу повторюватиме форму поперечного перерізу (див. рис.1.8, б).

Побудуємо ядро перерізу для **прямокутника** (Рис. 1.9) із сторонами  $b$  і  $h$ . Спочатку проведемо нейтральну лінію по одній із сторін прямокутника (положення  $I-I$ ). При цьому координати нейтральної лінії дорівнюють

$$z_H = -\frac{b}{2}; y_H = \infty,$$

а враховуючи, що

$$i_z^2 = \frac{J_z}{F} = \frac{bh^3}{12bh} = \frac{h^2}{12}; \quad i_y^2 = \frac{J_y}{F} = \frac{hb^3}{12bh} = \frac{b^2}{12},$$

з формул (1.9) одержимо

$y_P = 0; z_P = -\frac{b^2 \cdot 2}{12 \cdot b} = -\frac{b}{6}$  (точка  $1'$ ). Тепер проведемо нейтральну лінію через іншу сторону (положення  $II-II$ ). Координати нейтральної лінії в цьому положенні дорівнюють

$$y_H = \infty; z_H = \frac{h}{2}.$$

Тоді координати точки  $2'$  ядра перерізу

$$y_P = -\frac{h^2 \cdot 2}{12 \cdot h} = -\frac{h}{6}; z_P = 0.$$

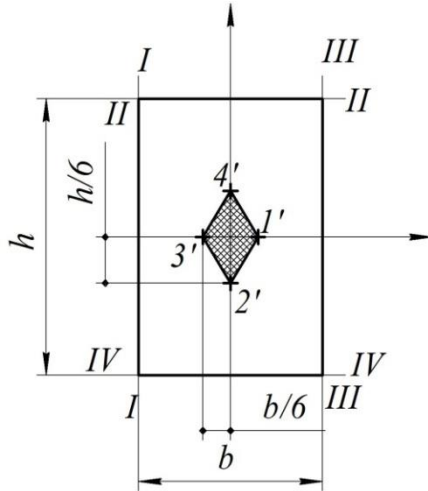


Рисунок 1.9 – Побудова ядра перерізу прямокутника

Аналогічно визначаємо координати точок 3' і 4'.

Оскільки під час переходу нейтральної лінії з однієї сторони на іншу, вона повертається навколо кутової точки перерізу, то точка прикладання сили переміщається по прямим, утворюючи контур ядра. Таким чином, **ядро перерізу прямокутника буде ромб з діагоналями, рівними одній третині відповідної сторони перерізу.**

### 1.5 Визначення напружень при згинанні з крученням

При розгляді кручення передбачалося, що в поперечних перерізах круглого стержня (валу) виникає крутильний момент. Проте такі деталі машин, як вали, рідко працюють на чисте кручення. Навіть прямий вал при роботі згинається власною вагою, вагою шківів, натягненням ременів і т.п. Таким чином, більшість зкручувальних елементів машин працюють на сумісну дію згинання і кручення.

При дії **згинання і кручення** в поперечних перерізах вала виникає п'ять внутрішніх силових факторів: крутильний момент  $M_{кр}$ , згинальні моменти  $M_z$  і  $M_y$ , і поперечні сили  $Q_z$  і  $Q_y$ .

Таким чином, в будь-якому поперечному перерізі одночасно виникають нормальні напруження від згинання в двох площинах, а також дотичні від кручення. Для розрахунку вала в першу чергу

повинні бути побудовані епюри згинальних моментів  $M_z$ ,  $M_y$  і крутильних моментів  $M_{кр} = M_x$ .

Навантаження, що діє на вал, розкладаємо на складові вздовж координатних осей, а потім будуємо епюри:

– згинальних моментів  $M_z$  від вертикальних проєкцій сил  $P_{1y}$ ,  $P_{2y}$ ,  $P_{ny}$ ;

– згинальних моментів  $M_y$  від горизонтальних проєкцій сил  $P_{1z}$ ,  $P_{2z}$ ,  $P_{nz}$ ;

– крутильних моментів, що  $M_{кр} = M_x$ .

Повний згинальний момент  $M_{згин}$  визначається як геометрична сума обох складових:

$$M_{згин} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2}.$$

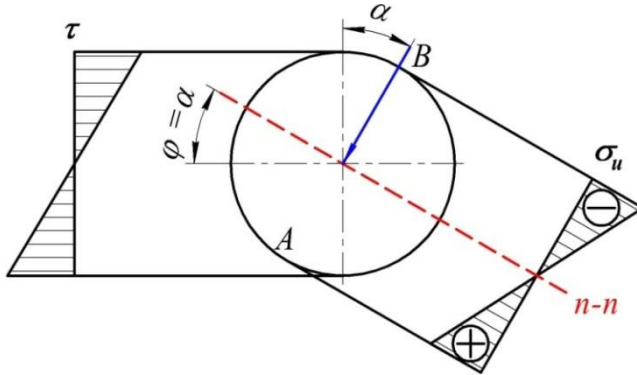
Якщо стержень (вал) **не круглого перерізу**, то для кожного перерізу ми маємо свою площину згинання моменту, але в даному прикладі, оскільки вал має круглий поперечний переріз, у якого моменти опору відносно всіх центральних осей однакові, то без впливу на результати розрахунку ми можемо сумістити площини згинальних моментів для осей перерізів і побудувати сумарну епюру  $M_{згин}$ , розташовуючи її в площині креслення. Так як сумарний момент в різних перерізах може мати різні напрямки, то навіть за відсутності розподілених навантажень епюра  $M_{згин}$ , може бути криволінійною.

Для загального випадку це легко показати аналітично. Тоді  $M_z = a + by$ ,  $M_y = c + dz$  (де  $a, b, c$  і  $d$  – постійні коефіцієнти).

$$\text{Тоді } M_{згин} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2} = \sqrt{(a + bz)^2 + (c + dz)^2}.$$

Вираз, що стоїть під радикалом, лише в деяких випадках є квадратом (наприклад, при  $c = d = 0$ ), а в більшості випадків епюра криволінійна. Величини згинального моменту  $M_{згин}$ , обчислюють лише для перерізів, в яких епюри  $M_z$  і  $M_y$  змінюють знак на протилежний. Ці величини відкладають по один бік і сполучають увігнутою параболою. Далі будуємо епюру крутильних моментів  $M_{кр}$  і

відшукуємо небезпечні перерізи, що поєднують відносний екстремум  $M_{згин}$  і  $M_{кр}$ . Небезпечними можуть бути перерізи 1, 2 і 3. Тепер в небезпечному перерізі можуть бути знайдені небезпечні точки. Очевидно, небезпечними можуть бути точки  $A$  і  $B$  (Рис. 1.10) (точки, найбільш віддалені від нейтральної лінії, положення яких легко знайти, оскільки  $\varphi = \alpha$ , а нейтральна лінія  $n - n$  перпендикулярна силовій лінії).



**Рисунок 1.10 – Епюра напружень в перерізі вала при згинанні з крученням**

Будуємо епюри  $\sigma_i$  від згинального моменту, які змінюються пропорційно відстані точок від нейтральної лінії. У точках  $A$  і  $B$  нормальні напруження від згинання і дотичні від кручення мають одночасно найбільші значення ( $\tau$  від згинання в цих точках дорівнює нулю і взагалі  $\tau_{зг} \ll \tau_{кр}$ ).

$$\sigma_{згин} = \frac{M_{згин}}{W} = \frac{\sqrt{M_z^2 + M_y^2}}{W}; \quad \tau_{кр} = \frac{M_{кр}}{W_\rho}. \quad (1.23)$$

Виділимо елементарну частинку матеріалу (Рис. 1.11) навколо найбільш небезпечної точки (наприклад, точки  $B$ ).

За чотирма гранями діють дотичні напруження, а до двох з них прикладені нормальні напруження, інші дві грані абсолютно вільні від напружень (Рис. 1.11, б). Таким чином, при згинанні з крученням

елемент у небезпечній точці знаходиться в плоскому напруженому стані.

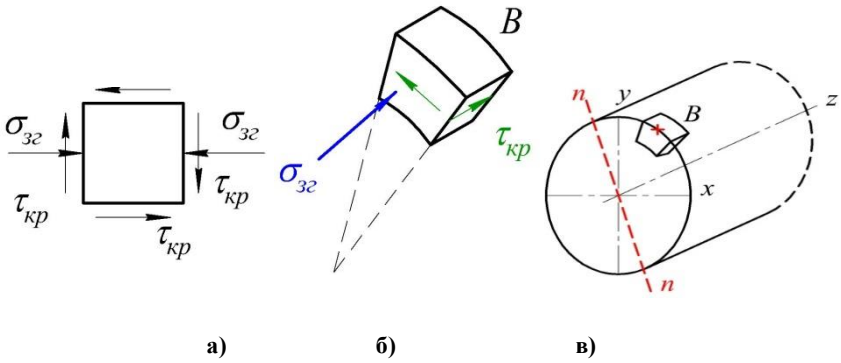


Рисунок 1.11 – Напруження біля небезпечної точки

Тому тут головні напруження треба визначати за тими ж формулами, що і при згинанні:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \left[ \sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right]; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = \frac{1}{2} \left[ \sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \right].$$

Різниця між формулами для поперечного згинання і згинання з крученням лише в тому, що в останньому випадку дотичні напруження, викликані крутильним моментом, а при згинанні – поперечною силою. Для перевірки міцності вала ми повинні визначити еквівалентні (приведені) напруження за відповідною теорією міцності і порівняти їх з допустимими. У зв'язку з тим, що вали зазвичай виготовляються з пластичних матеріалів, можна використовувати третю і четверту теорії міцності.

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma_{\text{згин}}^2 + 4\tau_{\text{кр}}^2} \leq [\sigma];$$

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma_{\text{згин}}^2 + 3\tau_{\text{кр}}^2} \leq [\sigma]. \quad (1.24)$$

Запишемо напруження  $\sigma$  і  $\tau_{\text{кр}}$  через згинальні і крутильні моменти:



$$\sigma_{\text{згин}} = \frac{M_{\text{згин}}}{W}; \quad \tau_{\text{кр}} = \frac{M_{\text{кр}}}{W_{\rho}} = \frac{M_{\text{кр}}}{2W}.$$

Підставивши їх в теорії міцності, одержимо за третьою теорією міцності:

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}} = \sqrt{\frac{M_{\text{згин}}^2}{W^2} + 4 \frac{M_{\text{кр}}^2}{(2W)^2}} \leq [\sigma].$$

Звідки

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}} = \frac{\sqrt{M_{\text{згин}}^2 + M_{\text{кр}}^2}}{W} \leq [\sigma]. \quad (1.25)$$

За четвертою теорією міцності (енергетичній)

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{IV}} = \sqrt{\frac{M_{\text{згин}}^2}{W^2} + 3 \frac{M_{\text{кр}}^2}{(2W)^2}} \leq [\sigma];$$

або

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{IV}} = \frac{\sqrt{M_{\text{згин}}^2 + 0,75M_{\text{кр}}^2}}{W} \leq [\sigma]. \quad (1.26)$$

Формули (1.25) і (1.26) за своєю структурою абсолютно співпадають з формулою (1.23), тому перевірка міцності круглого вала на сумісну дію кручення і згинання може бути записана у вигляді:

$$\sigma = \frac{M_{\text{пр}}}{W} \leq [\sigma], \quad (1.27)$$

де наведені моменти, еквівалентні дії трьох моментів, дорівнюють

$$M_{\text{пр}}^{\text{III}} = \sqrt{M_{\text{згин}}^2 + M_{\text{кр}}^2} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + M_{\text{кр}}^2} \quad (1.28)$$

або

$$M_{\text{пр}}^{\text{IV}} = \sqrt{M_{\text{згин}}^2 + 0,75M_{\text{кр}}^2} = \sqrt{M_z^2 + M_y^2 + 0,75M_{\text{кр}}^2}. \quad (1.29)$$

Маючи умову міцності, можна здійснювати **проектувальний розрахунок або підбір перерізу вала:**

$$W \leq \frac{M_{\text{пр}}}{[\sigma]}.$$

Оскільки

$$W = \frac{\pi d^3}{3r} = 0,1d^3$$

одержуємо

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{\text{пр}}}{0,1[\sigma]}}.$$

## 1.6 Розрахунки на міцність і жорсткість валів при згинанні з крученням

**За умовою міцності**, найбільші дотичні напруження не повинні перевищувати допустимі, тобто

$$\tau_{\text{max}} = \frac{M_{\text{пр}}}{W_{\rho}} \leq [\tau].$$

Звідси при відомому крутильному моменті і допустимому напруженні, можна визначити необхідний момент опору перерізу, а потім і необхідний радіус або діаметр вала, тобто виконати проектувальний розрахунок:

$$W_{\rho} \leq \frac{M_{\text{пр}}}{[\tau]}, \text{ де } [\tau] = (0,5 \dots 0,6)[\sigma].$$

Для суцільного перерізу  $W_{\rho} = 0,2D^3$ .

Звідки

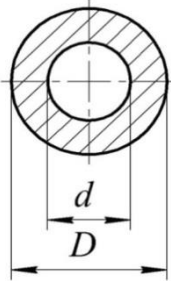
$$D \geq \sqrt[3]{\frac{M_{\text{кр}}}{0,2[\tau]}}.$$

Для порожнистого валу треба пам'ятати, що, задаючись відношенням

$$\frac{d}{D} = \alpha$$

(Рис.1.12), можна одержати

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) = 0,2D^3(1 - \alpha^4).$$



Підставляючи вираз  $W_p$  у формулу для  $D$ , отримаємо:

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{M_{кр}}{0,2 [\tau](1 - \alpha^4)}}.$$

**Рисунок 1.12 – Переріз порожнистого вала**

За умовою жорсткості **максимальний відносний кут закручування** не повинен перевищувати допустимий, тобто:

$$\theta_{max} = \frac{M_{пр}}{GJ_p} \leq [\theta].$$

Звідки полярний момент інерції:

$$J_p \geq \frac{M_{пр}}{G[\theta]}.$$

Оскільки для суцільних круглих перерізів  $J_p = 0,1D^4$ , то

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{M_{кр}}{0,1G[\theta]}}.$$

## 1.7 Повздовжньо-поперечне згинання

На практиці часто зустрічаються випадки сумісної роботи стержня на згинання та на розтягання або стискання. Такого роду

деформація може бути викликана сумісною дією на балку поздовжніх та поперечних сил, або тільки поздовжніми силами.

Перший випадок зображений на рис. 1.13. На балку АВ діють рівномірно розподілене навантаження з інтенсивністю  $q$  та поздовжні стискаючі сили  $P$ . Припустимо, що прогинами балки у порівнянні з розмірами поперечного перерізу можна знехтувати; тоді з достатнім для практики ступенем точності  $\pm 5\%$  можливо вважати, що і після деформації сили  $P$  будуть викликати лише осьове стискання балки.

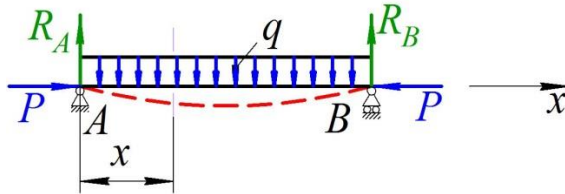


Рисунок 1.13 – Балка одночасно навантажена розподіленим навантаженням  $q$  та поздовжніми стискаючими силами  $P$

Користуючись принципом суперпозицій, ми можемо знайти нормальне напруження в кожній точці будь якого поперечного перерізу балки як алгебраїчну суму напружень, які визвано силами  $P$  і навантаженням  $q$ .

Стискаючі напруження  $\sigma_P$  від сил  $P$  рівномірно розподілені по площині  $F$  поперечного перерізу та однакові для усіх перерізів:

$$\sigma_P = -\frac{P}{F};$$

нормальні напруження від згинання в вертикальній площині в перерізі з абсцисою  $x$ , яка відраховується від лівого кінця балки та виражається формулою:

$$\sigma_q = \frac{M(x)_z}{J_y}.$$

Таким чином, повне напруження в точці з координатою  $x$  (рачуємо від нейтральної осі) для цього перерізу дорівнює:

$$\sigma = \sigma_P + \sigma_q = -\frac{P}{F} + \frac{M(x)_z}{J_y}.$$

На рис. 1.14 зображені епюри розподілення напружень в розглянутому перерізі від сил  $P$ , навантаження  $q$  та сумарна епюра.

Найбільше напруження в цьому перерізі буде в верхніх волокнах, де обидва види деформації викликають стискання; в нижніх волокнах може бути стискання або розтягання в залежності від чисельних величин напружень  $\sigma_P$  та  $\sigma_q$ . Для складання умови міцності треба знайти найбільше нормальне напруження.

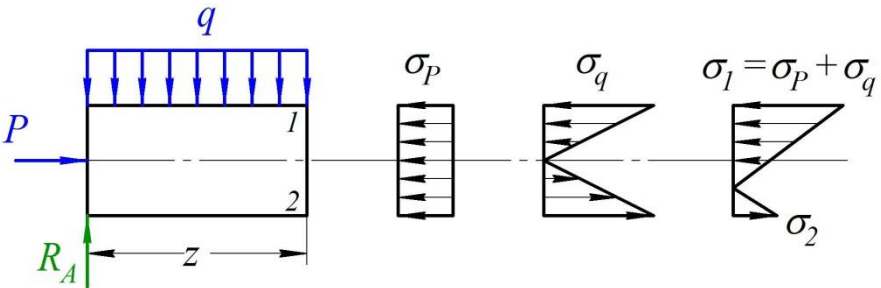


Рисунок 1.14 – Епюри розподілення напружень в розглянутому перерізі

Так як напруження від сил  $P$  в усіх перерізах однакові та рівномірно розподілені, то небезпечними будуть волокна, найбільш напружені від згинання. Такими є крайні волокна в перерізі з найбільшим згинаючим моментом для них:

$$\sigma_{q \max} = \pm \frac{M_{\max}}{W}.$$

Таким чином, напруження в крайніх волокнах 1 та 2 (Рис. 1.14) для середнього перерізу балки виражаються формулою:

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{array} \right\} = -\frac{P}{F} \pm \frac{M_{\max}}{W}, \quad (1.30)$$

та **розраховане напруження** буде дорівнювати

$$|\sigma_{max}| = |\sigma_1| = \left| \frac{P}{F} \pm \frac{M_{max}}{W} \right|. \quad (1.31)$$

Якщо б сили  $P$  були розтягуючими, то знак першого доданку змінився б, небезпечними стануть нижні волокна балки.

Позначимо буквою  $N$  стискаючу або розтягуючу силу, та запишемо загальну формулу для перевірки міцності

$$\sigma_{max} = \pm \left[ \frac{N}{F} \pm \frac{M_{max}}{W} \right] \leq [\sigma]. \quad (1.32)$$

При складанні формули (1.32) припустимо, що переріз симетричний від нейтральної вісі та матеріал чинить однаковий опір розтягання та стискання (гіпотези опору матеріалів).

## 1.8 Контрольні запитання

1. Що називається складним опором?
2. В якому випадку згинання називається косим?
3. Що таке тензор напружень?
4. Який вид навантаження називається позацентровим розтяганням або стисканням?
5. Чи проходить нейтральна лінія при косому згинанні через центр ваги поперечного перерізу?
6. У яких випадках необхідно визначати ядро перерізу?
7. Який силові чинники виникають при згинанні з крученням?
8. Умова міцності при косому згинанні.
9. Умова міцності при згинанні з розтяганням.
10. Визначення напружень в небезпечних кутових точках.
11. Умова міцності при позацентровому розтяганні-стисканні.
12. Умова міцності при згинанні з крученням (III та IV теорії міцності).
13. Умова міцності при поздовжньо-поперечному згинанні.

## 2. ЗАГАЛЬНІ МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕНЬ

Одним з найважливіших завдань опору матеріалів є оцінка жорсткості конструкції, тобто ступеня її деформації під дією навантажень, в'язів, зміни температури. Для вирішення вказаного завдання необхідно вміти визначати переміщення (лінійні та кутові) пружної системи (балки, рами, криволінійного стрижня, ферми і т.д.), навантаженої довільним чином.

Вирішення поставленої задачі необхідне не тільки для з'ясування величини самих переміщень і оцінки жорсткості конструкції. На основі визначення переміщень створюються загальні методи визначення внутрішніх силових факторів в статично невизначуваних системах.

Визначення переміщень необхідне також при дослідженні питань коливальних пружних систем.

### 2.1 Поняття по потенціальну енергію деформації

Методи визначення переміщення засновані на двох основних принципах механіки: на **принципі можливих переміщень і на законі збереження енергії**.

Згідно до **закону збереження енергії**, робота зовнішніх сил не зникає, а трансформується в потенціальну енергію, що накопичується в пружному тілі. Отже, величина накопиченої потенціальної енергії деформації визначається величиною роботи зовнішніх сил. Ця енергія виявляється у вигляді роботи, що здійснюється при розвантаженні внутрішніми силами.

Розглянемо процес деформації пружного тіла з енергетичної точки зору. Зовнішні сили, прикладені до пружного тіла, здійснюють певну роботу. Позначимо її через  $A$ . Ця робота частково переходить в потенціальну енергію  $U$  деформації тіла, а частково йде на надання швидкості масі тіла, тобто перетворюється на кінетичну енергію  $K$ .

**Баланс енергії** має вигляд

$$A = U + K.$$

Якщо навантаження проводиться поволі, і швидкість переміщення мас тіла буде вельми малою, то можна вважати  $K = 0$ . Такий процес навантаження можна вважати статичним. Тіло у будь-який момент часу знаходиться в стані рівноваги. У цьому випадку  $A = U$  вся робота зовнішніх сил переходить в потенціальну енергію деформації.

При розвантаженні тіла його внутрішні сили виконують роботу за рахунок потенціальної енергії деформації тіла. Таким чином, пружне тіло є «акумулятором» енергії (наприклад, пружина годинникового механізму, ресора і т.д.).

Таким чином, можна сказати, що повне перетворення одного виду енергії на інший має місце, якщо деформація відбувається без порушення рівноваги системи. Мірою енергії, що перетворилася на інший вид, є величина роботи, проведеної силами, що діють на конструкцію.

Позначимо величину накопиченої потенціальної енергії через  $U$ , а зменшення потенціальної енергії зовнішніх навантажень через  $U_p$ . Тоді величина  $U_p$  вимірюється позитивною роботою цих навантажень  $A_p$ . З іншого боку, накопиченню потенціальної енергії деформації відповідає негативна робота внутрішніх сил ( $-A$ ), оскільки переміщення точок тіла при деформації відбуваються у зворотному до внутрішніх сил напрямку.

**Закон збереження енергії при деформації пружних систем** набуває вигляду

$$U_p = U. \quad (2.1)$$

Замінюючи в цьому виразі величини  $U_p$  і  $U$  чисельно рівними ним значеннями  $A_p$  і  $-A$ , одержуємо інше формулювання цього закону

$$A_p = -A. \quad (2.2)$$

З рівняння (2.1) виходить, що потенціальна енергія деформації  $U$  чисельно рівна роботі зовнішніх сил  $A_p$ , виконаній ними при цій деформації, тобто



$$U = A_p. \quad (2.3)$$

**Таблиця 2.1 – Потенціальна енергія для простих видів навантаження**

<b>Розтягання-стискання</b>	$U = \int_{\ell} \frac{N^2 d\ell}{2EF}. \quad (2.4)$
<b>Чистий зсув</b>	$U = \int_{\ell} \frac{Q^2 dx}{2GF}. \quad (2.5)$
<b>Кручення</b>	$U_{кр} = \int_{\ell} \frac{M_{кр}^2 d\varphi}{2GJ_{\rho}}. \quad (2.6)$
<b>Чисте згинання</b>	$U_{згин} = \int_{\ell} \frac{M^2 d\varphi}{2EJ_z}. \quad (2.7)$
<b>Згинання пружини</b>	$U_{згин.пруж.} = \int_{\ell} \frac{2P^2 R^3 n}{Gr^4}. \quad (2.8)$

## **2.2 Теорема про взаємність робіт і переміщень (теорема Кастіліано)**

**К. Кастіліано** запропонував метод визначення переміщення, заснований на визначенні потенціальної енергії деформації.

Отримані ним результати можна трактувати ширше: **переміщення точки прикладання узагальненої сили за напрямком її дії дорівнює частковій похідній від потенціальної енергії деформації за цією силою:**

$$\Delta_P = \frac{\partial U}{\partial P}, \quad (2.9)$$

де  $\Delta_P$  – повне переміщення (лінійне переміщення або кут повороту) від узагальненої сили;

$P$  – узагальнена сила (сила або момент пари сил).

Даний висновок носить назву **теореми Кастіліано**, яка була опублікована в 1875 році.

Згідно зі способом, запропонованим Кастіліано, щоб визначити лінійне або кутове переміщення в точці, де за умовою задачі сила відсутня, в цій точці слід прикласти відповідну фіктивну узагальнену силу. Далі, написавши вираз для потенціальної енергії від системи сил, включаючи вказану фіктивну силу, слід взяти від його похідну за фіктивною силою і в одержаному виразі для переміщення застосувати **фіктивне навантаження**, яке дорівнює нулю. Не дивлячись на складність даного способу і наявність інших способів, теорема Кастіліано застосовується для визначення переміщень в нестержневих системах (пластинках, оболонках і деталях, усі три вимірювання яких мають один порядок).

Спосіб Кастіліано також зручно використовувати у випадках, коли необхідно визначити переміщення в точці прикладання сили.

### 2.3 Визначення переміщень по методу Мора

Визначення переміщень за допомогою теореми Кастіліано має очевидний недолік, вона дає можливість визначити переміщення тільки точок прикладання сил і лише у напрямку дії цих сил. На практиці часто виникає необхідність визначити переміщення будь-яких точок системи в будь-якому напрямку.

**Метод Максвелла–Мора** визначення переміщень є універсальним методом, справедливим, на відміну розглянутого вище аналітичного способу, як для балок, так і для будь-яких стержневих систем. Даний метод застосовується для обчислення переміщень довільно навантажених брусів з будь-якою формою поперечного перерізу як з прямою, так і з кривою віссю.

Якщо необхідно визначити переміщення в точці, де не прикладені зовнішні сили, ми самі прикладаємо в цій точці зовнішню фіктивну силу  $\bar{P}$  в напрямку, що цікавить нас. Далі, складаємо вираз потенціальної енергії системи з урахуванням фіктивної сили. Знаходимо переміщення даної точки в напрямку, що нас цікавить, тобто за напрямком прикладеної сили  $\bar{P}$ . Тепер залишається «пригадати», що насправді сили немає. Таким чином, визначається

шукане переміщення.

Розглянемо балку навантажену заданими силами. Зусилля в довільному перерізі позначимо через  $M_P$ ,  $Q_P$ ,  $N_P$ . Нехай потрібно визначити переміщення (узагальнено) будь-якої точки в напрямі 1. Введемо допоміжний етап: задану систему, навантажимо лише однією одиничною (узагальненою) силою  $\bar{P} = 1$ , прикладеною в тій точці, де ми маємо знайти переміщення  $\Delta_{1P}$ . Зусилля в допоміжному стані спричинені цією силою позначимо як силові фактори від одиничного навантаження  $\bar{M}_1$ ,  $\bar{Q}_1$ ,  $\bar{N}_1$ .

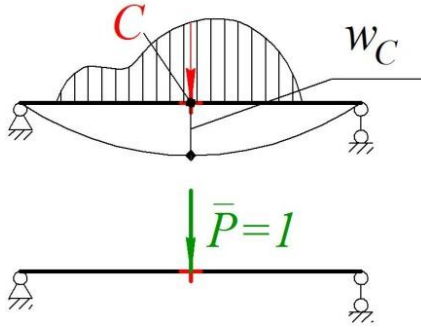


Рисунок 2.1 – Основна та допоміжна схеми навантаження балки

Відповідно до теореми про взаємність переміщень **потенціальна енергія деформації** дорівнює:

$$U_{1-2} = 1 \cdot w_C, \quad (2.10)$$

тобто дорівнює роботі сили по переміщенню точки з одного стану в інший стан.

**Прогин в точці C буде дорівнювати**

$$w_C = \int_l \frac{M_P \cdot \bar{M}_1 \cdot dx}{EJ_z}. \quad (2.11)$$

В загальному випадку навантаження системи **переміщення по методу Мора** можна визначити по формулі:

$$\Delta = \sum_{\ell} \int \frac{N_x \cdot \bar{N}_x \cdot dx}{EF} + \int \frac{M_x \cdot \bar{M}_x \cdot dx}{EF} + \int \frac{M_y \cdot \bar{M}_y \cdot dx}{EF} + \int \frac{M_z \cdot \bar{M}_z \cdot dx}{EF}, \quad (2.12)$$

де  $N_x, M_x, M_y, M_z$  – значення зусиль заданої балки в довільному перерізі від заданого навантаження.

$\bar{N}_x, \bar{M}_x, \bar{M}_y, \bar{M}_z$  – значення внутрішніх зусиль в допоміжній балці від прикладеного одиничного навантаження.

При цьому потрібно врахувати, що одиничне навантаження прикладають тільки в перерізі, де потрібно визначити переміщення. **Якщо із умови задачі потрібно визначити лінійне переміщення, то одиничним навантаженням буде сила  $\bar{P} = 1$ .**

**Якщо потрібно визначити кутове переміщення (кут повороту), то одиничним навантаженням буде зосереджений момент  $\bar{M} = 1$ .**

Якщо крім механічного до системи прикладено і температурне навантаження, то інтеграл Мора має вигляд:

$$\Delta = \sum_{\ell} \int \bar{N}_x \ell_x dx + \int \bar{M}_z \theta_x dx + \int \bar{M}_y \theta_y dx + \int EdF, \quad (2.13)$$

де  $\ell_x$  – відносна лінійна деформація системи;

$\theta_x$  – відносна кутова деформація в площі  $xz$ ;

$\theta_y$  – відносна кутова деформація або зміна кривизни стержня в площі  $yx$ ;

$$\theta_x = \frac{M_z + \int_F \delta E_y dF}{\int_F E y^2 dF},$$

де  $\delta = \beta \Delta t \ell \pm \Delta i$  – лінійні температурні та монтажні переміщення;

$\beta$  – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу;

$\Delta t$  – різниця температур;

$\ell$  – довжина стержня;

$\Delta i$  – різниця неточності виготовлення стержня.

Якщо  $\delta = 0$ , тобто температурні навантаження відсутні, то

$$\ell_z = \frac{N_z}{EF};$$

$$\theta_z = \frac{1}{\rho_z} = \frac{M_z}{EJ_z};$$

$$\theta_y = \frac{1}{\rho_y} = \frac{M_y}{EJ_y}.$$

### Порядок визначення переміщень за методом Мора.

1. Розглядаємо навантажену систему та визначаємо опорні реакції.

2. Розглядаємо кожну ділянку системи і для них записуємо аналітичні вирази згинальних моментів від заданого навантаження ( $M_z$ ) для кожної ділянки.

3. До ненавантаженої системи прикладаємо в точці, де необхідно визначити переміщення, одиничну силу (при визначенні лінійного переміщення) або одиничний момент (при визначенні кута повороту) за напрямком шуканого переміщення.

4. За кожною ділянкою системи складаємо аналітичний вираз для згинального моменту від одиничного силового фактора.

5. Обчислюємо інтеграли для відповідних виразів моментів за кожною ділянкою. Підсумовування ведемо в межах всієї конструкції.

Якщо результат вийде додатний, значить, напрям переміщення співпадає з напрямом одиничної сили. Від'ємний знак свідчить про те, що дійсний напрям шуканого переміщення протилежний напрям

одиночної сили.

## 2.4 Визначення переміщень способом Верещагіна

У багатьох випадках інтегрування по Мору можна уникнути і застосувати інші способи визначення переміщення. Одним з таких способів є спосіб Сімпсона, але також можна визначити переміщення за **способом Верещагіна**. Цей спосіб **А.К. Верещагін** запропонував в 1924 році, будучи студентом.

**Розглянемо послідовність дій за правилом Верещагіна. Початковий етап такий же, як за методом Мору, тобто спочатку будеться вантажна епюра від діючих навантажень (дійсний стан), потім розглядаємо балку в допоміжному стані.**

**Допоміжний стан виходить також як за методом Мора: спочатку усе задане навантаження треба видалити, потім прикласти "одиночний силовий чинник" в тому місці, де потрібно визначити переміщення, і по напрямку цього шуканого переміщення. Будується епюра одиничних моментів або епюра від одиночного навантаження.**

Далі переміщення обчислюється за формулою:

$$\Delta = \frac{1}{EJ_z} \sum \omega_i \cdot \bar{y}_{c_i}, \quad (2.14)$$

де  $\omega_i$  – площа вантажної епюри;

$\bar{y}_{c_i}$  – ордината одиночної епюри (обов'язково прямолінійної), узятої під центром ваги вантажної епюри;

$EJ_z$  – жорсткість перерізу.

Слід мати на увазі, що використання цього способу можливе тільки за наявності **двох умов**: жорсткість балки на даній ділянці має бути постійною ( $EJ_z = \text{const}$ ), одна з двох епюр моментів на цій ділянці (вантажна або одиночна) має бути обов'язково лінійною. При цьому обидві епюри не повинні в межах цієї ділянки мати перелому.

**Доведемо цю формулу.**

Нехай вантажна епюра  $M_p$  довільна, а одиночна лінійна (оскільки одиночним навантаженням буває зосереджена сила, або пара

сил, то одинична еюра  $\bar{M}$  виявляється обмеженою прямими лініями) (Рис. 2.2).

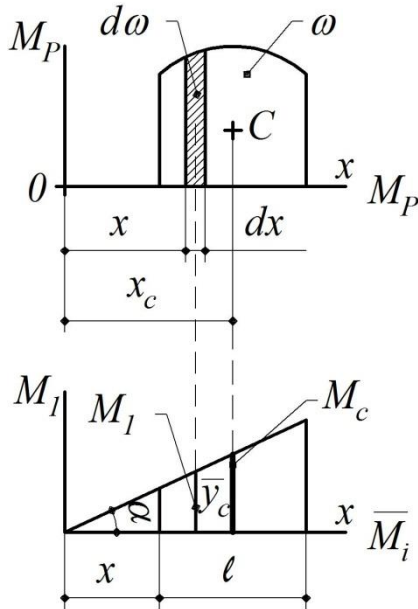


Рисунок 2.2 – Вантажна еюра та еюра від одиничного навантаження

Позначимо через  $\omega$  площу еюри  $M_p$ , а через  $\bar{y}_C$  – ординату еюри від одиничного навантаження під центром ваги  $C$  вантажної еюри.

Очевидно,  $M_p dx = d\omega$  – є диференціал площі еюри  $M_p$ .

$$\bar{M} = x \cdot tg\alpha.$$

Інтеграл Мора буде мати вигляд

$$\int_{\ell} M_p \cdot \bar{M} \cdot dx = tg\alpha \int_{\ell} x d\omega.$$

Інтеграл в правій частині є статичним моментом площі еюри  $M_p$ , відносно осі  $y$ , він дорівнює

$$\int_{\ell} x d\omega = x \cdot X_C.$$

де  $X_C$  – абсциса центра ваги епюри  $M_p$ . Оскільки

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot X_C \cdot \omega = \omega \cdot \bar{M}_C, \quad \text{інтеграл } \int_{\ell} M_p \cdot \bar{M} \cdot dx = \omega \cdot \bar{y}_C .$$

Таким чином, ми отримуємо формулу 2.13.

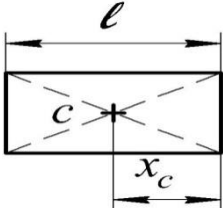
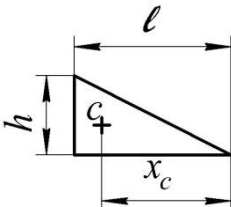
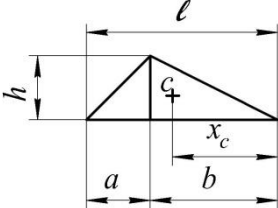
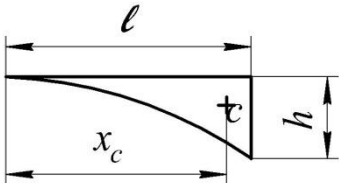
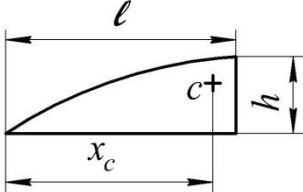
Іншими словами **переміщення дорівнює добутку площі епюри від зовнішнього навантаження на ординату прямолінійної епюри від одиничного навантаження, розташовану під центром ваги фігури епюри від заданого зовнішнього навантаження**. Обчислення за формулою (2.12) виконують по ділянках. Якщо епюра  $M_p$  складається з епюр від декількох навантажень, то її слід розбивати на прості фігури, для яких легко визначити площу і положення центра ваги. При цьому кожен з площ треба множити на ординату одиничної епюри під центром ваги відповідної площі.

Якщо епюри від заданого і одиничного навантаження протилежні за знаком, їхній добуток має знак «мінус» і це підтверджує, що переміщення відбулося в напрямі, протилежному одиничному навантаженню. Якщо задана балка навантажена декількома силами, то в цьому випадку вигідніше скористатися принципом незалежності дії сил, тобто будують епюри від кожного навантаження окремо.

Для полегшення розрахунків площ та ординат приводимо таблицю 2.2.



**Таблиця 2.2 – Значення площ та координати центрів ваги для найбільш використовуємих видів одиничних епоур**

Вигляд одиничної епоури	$\omega$	$X_c$
	$h\ell$	$\frac{\ell}{2}$
	$\frac{1}{2}h\ell$	$\frac{2}{3}\ell$
	$\frac{1}{2}h\ell$	$\frac{1}{3}(\ell + a)$
	$\frac{1}{3}h\ell$	$\frac{3}{4}\ell$
	$\frac{2}{3}h\ell$	$\frac{5}{8}\ell$

Якщо на ділянках балки всі епюри прямолінійні (відсутнє розподілене навантаження), то вигідніше використовувати **формулу М.В. Карнаухова**. Розглянемо приклад коли вантажна епюра має форму трапеції (Рис. 2.3).

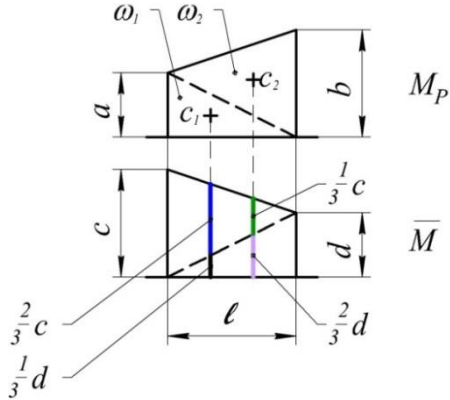


Рисунок 2.3 – Визначення переміщення за формулою Карнаухова

$$\omega_1 = \frac{1}{2} a \ell; \omega_2 = \frac{1}{2} b \ell.$$

Тоді добуток

$$\begin{aligned} \omega \bar{y}_c &= \frac{a \ell}{2} \left( \frac{2}{3} c + \frac{d}{3} \right) + \frac{b \ell}{2} \left( \frac{2}{3} d + \frac{c}{3} \right) = \frac{2 a \ell c}{6} + \frac{a \ell d}{6} + \frac{b \ell c}{6} = \\ &= \frac{\ell}{6} (2 a c + 2 b d + a d + b c). \end{aligned}$$

При наявності декількох ділянок на балці, що задовольняють зазначеним умовам, формула для визначення переміщень приймає вид:

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\ell_i}{6 E J_z} (a \cdot \bar{a} + 4 \cdot c \cdot \bar{c} + b \cdot \bar{b}). \quad (2.15)$$

Одержана залежність називається **правилом трапецій** або **формулою Симпсона-Карнаухова**.

## 2.5 Контрольні запитання

1. В яких випадках використовують теорему Кастіліано?
2. Формула переміщення за методом Мора.
3. Формула Верещагіна для визначення переміщень.
4. Дві умови використання способу Верещагіна.
5. Умови використання формули Карнахова.
6. Що таке переміщення? Види переміщень.

### 3. НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ПЛОСКИХ КРИВИХ БРУСІВ ВЕЛИКОЇ КРИВИЗНИ

У різних конструкціях часто застосовуються бруси з криволінійною віссю. До них належать гаки, кільця ланцюгів, ободи шківів та коліс, арки тощо. Осі цих брусів – плоскі криві.

Дослідження показують, що при згинанні розподіл нормальних напружень у поперечному перерізі в кривому брусі істотно відрізняються від тих, які мають місце в балці з прямою віссю. За інших однакових умов ця відмінність тим більша, чим більше відношення висоти  $h$  поперечного перерізу до радіуса  $R$  кривизни його осі (Рис. 3.1).

У зв'язку з цим розрізняють бруси різної кривизни:

якщо  $h/R < 1/5$  – це **бруси малої кривизни**;

якщо  $h/R \geq 1/5$  – це **бруси великої кривизни**.

При згинанні брусів малої кривизни нормальні напруження можна визначати за формулами виведення для балок з прямою віссю (похибка при цьому становить  $\sim 2\%$ ).

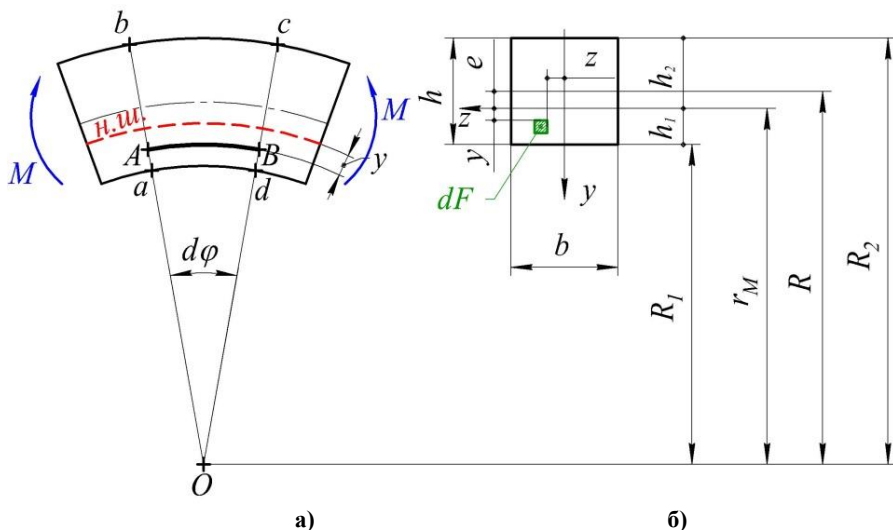


Рисунок 3.1 – Плоский брус великої кривизни

### 3.1 Епюри внутрішніх зусиль в криволінійних брусах

У поперечних перерізах плоского кривого бруса в загальному випадку є три внутрішні силові фактори –  $N$ ,  $Q$  та  $M$ . На практиці мають справу зі стержнями, вісь яких окреслена по дузі кола. У цьому разі має сенс перейти до полярної системи координат, тоді поздовжня, поперечна сила та згинальний момент будуть функціями кута  $\varphi$ :  $N(\varphi)$ ,  $Q(\varphi)$ ,  $M(\varphi)$ .

Як приклад розглянемо плоский кривий брус (Рис. 3.2, а). Запишемо вирази  $N(\varphi)$ ,  $Q(\varphi)$ ,  $M(\varphi)$  для довільного перерізу  $C$ .

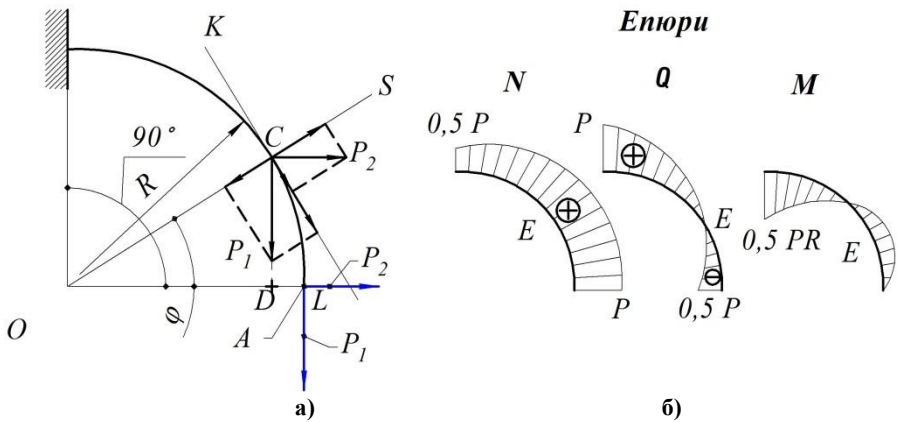


Рисунок 3.2 – Епюри внутрішніх зусиль

Щоб отримати вираз для знаходження  $N(\varphi)$  треба визначити проекції сил  $P_1$  та  $P_2$  на дотичну  $KL$ . Для зручності перенесемо проекції в точку  $C$  (Рис. 3.2, а). Тоді

$$N(\varphi) = P_1 \cos \varphi + P_2 \sin \varphi.$$

Щоб отримати вираз для знаходження  $Q(\varphi)$ , треба знайти проекції сил, прикладених на ділянці дуги  $AC$ , на площину перерізу, тобто на напрям  $SO$ .

$$Q(\varphi) = P_1 \sin \varphi - P_2 \cos \varphi.$$

При складанні виразу для згинального моменту домовимося **вважати згинальний момент додатним, коли він збільшує кривизну стержня**. Будемо мати

$$\begin{aligned} M_C(\varphi) &= P_1 \cdot AD - P_2 \cdot CD = \\ &= P_1 R(1 - \cos\varphi) - P_2 R \sin\varphi. \end{aligned}$$

Отримані формули дають змогу будувати епюри  $N, Q$  та  $M$ . Приймаємо  $P_1 = P$  та  $P_2 = 0,5P$ . Тоді:

$$\begin{aligned} N(\varphi) &= (\cos\varphi + 0,5\sin\varphi)P; \\ Q(\varphi) &= (\sin\varphi - 0,5\cos\varphi)P; \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$M_C(\varphi) = PR(1 - \cos\varphi - 0,5\sin\varphi).$$

Користуючись формулами (3.1), визначимо значення  $N, Q$  та  $M$  в перерізі стержня через  $10^\circ$  і у масштабі побудуємо епюри  $N, Q$  та  $M$  (Рис. 3.2, б).

### 3.2 Визначення напружень в плоских кривих брусах

Розглянемо випадок чистого згинання кривого бруса (Рис. 3.1). Припустимо, що нейтральний шар має поки що невідомий **радіус кривизни**  $r_n$ , взагалі інший ніж радіус  $R$  осі стержня. Виведемо формули для напружень  $\sigma$  в брусах великої кривизни.

При виведенні цих формул передбачається, що:

- 1) кривий брус є плоским (тобто вісь його є кривою, що розташована в одній площині);
- 2) брус симетричний відносно площини, в якій розташована його вісь, а зовнішні сили діють в цій площині;
- 3) поперечні перерізи бруса, плоскі до його деформації, залишаються плоскими і після деформації (гіпотеза плоских перерізів);
- 4) тиск подовжніх волокон бруса одне на одне істотно не впливає на розподіл напружень у брусі, а тому його можна не враховувати.

Для виведення рівнянь **статичного аспекту задачі** розділимо брус на дві частини будь-яким поперечним перерізом  $ab$  (Рис. 3.1, а), і

виділимо в перерізі елемент площі  $dF$  на відстані  $y$  від нейтральної лінії (Рис. 3.1, б та 3.3, а). На елемент діє зусилля  $\sigma dF$ . З умов симетрії при  $N = 0$ , та

$M_z = M$ , маємо:

$$\int_F \sigma \cdot dF = 0; \int_F \sigma \cdot y \cdot dF = M. \quad (3.2)$$

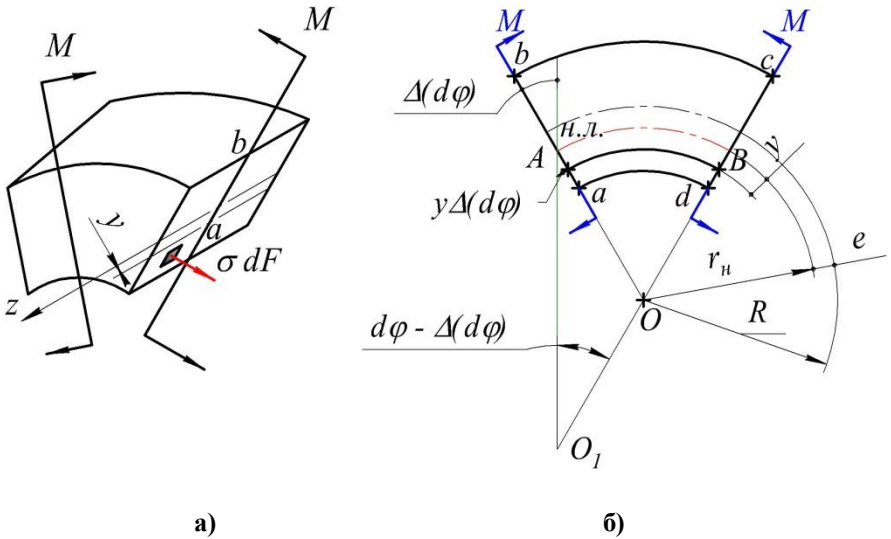


Рисунок 3.3 – Статичний та геометричний аспекти задачі

Умова рівності моменту  $M_y$  нулю

$$M_y = \int_F \sigma \cdot z \cdot dF = 0 \quad (3.3)$$

виконується автоматично внаслідок симетрії перерізу відносно осі  $y$ .

Розглянемо **геометричний аспект задачі**.

Відносно подовження вибраного довільно волокна  $AB$ , яке розташоване на відстані  $y$  від нейтрального шару, яке отримало в результаті деформації подовження  $y\Delta(d\varphi)$ , дорівнює

$$\varepsilon = \frac{y\Delta(d\varphi)}{(r_H - y)d\varphi}, \quad (3.4)$$

де  $(r_H - y)d\varphi$  – довжина елемента до деформації.

**Фізичний аспект**, як і для балки, можна виразити формулою Гука:

$$\sigma = \varepsilon E = \frac{E\Delta(d\varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{y}{r_H - y}. \quad (3.5)$$

Умову (3.3) перепишемо у вигляді

$$\int_F \sigma \cdot dF = \frac{E\Delta(d\varphi)}{d\varphi} \cdot \int_F \frac{ydF}{r_H - y} = 0.$$

Оскільки тут

$$\frac{E\Delta(d\varphi)}{d\varphi} \neq 0,$$

то

$$\int_F \frac{ydF}{r_H - y} = 0. \quad (3.6)$$

Із (3.2) знаходимо

$$\int_F \sigma \cdot y \cdot dF = \frac{E\Delta(d\varphi)}{d\varphi} \int_F \frac{y^2 dF}{r_H - y} = M. \quad (3.7)$$

Інтеграл в (3.7) можна записати так:

$$\int_F \frac{y^2 dF}{r_H - y} = \int_F \frac{y^2 + r_H y - r_H y}{r_H - y} dF =$$



$$= - \int_F \left( y - \frac{r_H y}{r_H - y} \right) dF = - \int_F y dF + r_H \int_F \frac{y}{r_H - y} dF. \quad (3.8)$$

Перший інтеграл в (3.8) є статичним моментом  $S_z$  площі поперечного перерізу відносно нейтральної осі  $z$ , а другий інтеграл, згідно з (3.6), дорівнює нулю. Тоді вираз (3.8) запишемо так:

$$\int_F \frac{y^2 dF}{r_H - y} = -S_z = -(-e)dF = e \cdot dF, \quad (3.9)$$

де  $e$  – відстань від центра ваги перерізу кривого бруса до нейтральної осі;

$F$  – площа поперечного перерізу бруса.

Підставимо (3.9) в (3.7) та отримаємо

$$\frac{E\Delta(d\varphi)}{d\varphi} \cdot eF = M,$$

звідки

$$\frac{E\Delta(d\varphi)}{d\varphi} = \frac{M}{eF}. \quad (3.10)$$

Враховуючи вираз (3.10), формулу (3.5) для визначення напружень тепер можна записати так:

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{eE(r_H - y)} \quad (3.11)$$

або

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{S_z(r_H - y)},$$

де  $M$  – згинальний момент у перерізі;

$S_z$  – статичний момент площі перерізу кривого бруса відносно нейтральної лінії.

З аналізу формули (3.11) видно, що нормальне напруження по ширині перерізу однакові (не залежать від  $z$ ) і змінюється тільки із зміною відстані точки від нейтральної лінії:

Найбільше за модулем напруження будуть у крайніх точках перерізу, розташованих біля вогнутої поверхні бруса.

**Максимальні значення напружень** будуть у крайніх точках перерізу кривого бруса та обчислюються за формулами:

$$\sigma_1 = \frac{Mh_1}{F \cdot e \cdot R_1}; \quad \sigma_2 = \frac{Mh_2}{F \cdot e \cdot R_2}, \quad (3.12)$$

де  $R_1$  та  $R_2$  – радіуси кривизни внутрішнього та зовнішнього шару волокон кривого бруса;

$h_1$  та  $h_2$  – відстані від нейтральної лінії до цих волокон (Рис. 3.1). **Знаки напружень легко визначити за напрямом згинального моменту в перерізі.**

Якщо на кривий стержень діє осьова сила  $N$ , то в стержні, крім напруження, спричиненого згинальним моментом, діятимуть нормальні напруження

$$\sigma_n = \frac{N}{F}.$$

Для визначення напружень у кривому брусі при згинанні за формулами (3.11) та (3.12) треба насамперед обчислити значення  $e$  (відстань від нейтрального шару до центра ваги) або радіус  $r_n$  – нейтрального шару, оскільки

$$e = R - r_n, \quad (3.13)$$

де  $R$  – радіус шару, який містить центри ваги перерізів кривого бруса (Рис. 3.1).

Радіус  $r_n$  будемо визначати з рівняння (3.6):

$$\int_F \frac{y \cdot dF}{r_n - y} = 0.$$

Зробимо тут таку заміну:

$$r = r_n - y, \text{ або } y = r_n - r.$$

Тоді рівняння (3.6) можна переписати так:

$$\int_F \frac{r_n - r}{r} dF = 0, \text{ або } r_n \cdot \int_F \frac{dF}{r} - F = 0,$$

звідки

$$r_n = \frac{F}{\int_F \frac{dF}{r}}. \quad (3.14)$$

Враховуючи, що  $F = b \cdot h$ ,  $dF = b \cdot dr$ ,

Будемо мати

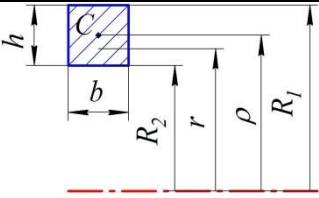
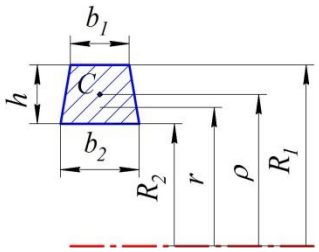
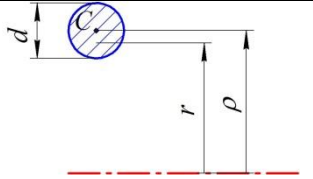
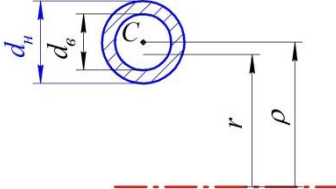
$$r_n = \frac{b \cdot h}{\int_{R_1}^{R_2} \frac{b \cdot dr}{r}} = \frac{h}{\ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{h}{2,303 \lg \frac{R_2}{R_1}}. \quad (3.15)$$

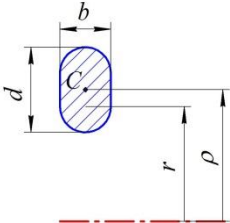
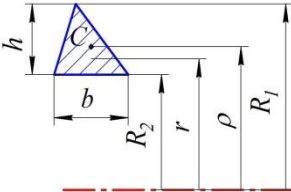
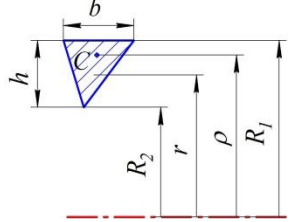
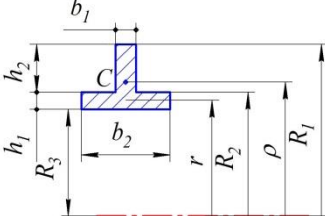
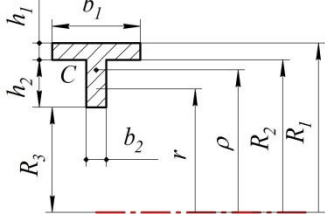
(Тут 2,303 – модуль переходу до десяткових логарифмів).

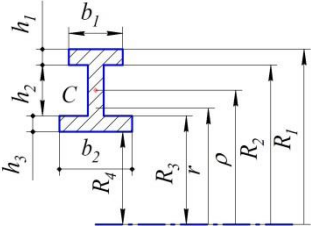
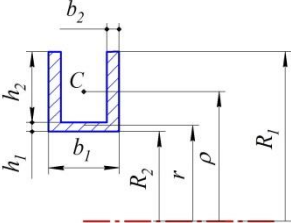
Користуючись формулою (3.14), можна знайти вираз для  $e$  для будь-яких поперечних перерізів бруса.

Значення  $r_n$  для перерізів різної форми, які часто зустрічаються, наведено у таблиці 3.1.

Таблиця 3.1 – Значення радіуса кривизни нейтрального шару

Форма перерізу	Радіус кривизни нейтрального шару
	$r_H = \frac{h}{\ln \frac{R_1}{R_2}};$ $\ln \frac{R_1}{R_2} = \frac{h}{\rho} \left[ 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{h}{2\rho} \right)^2 + \frac{1}{5} \left( \frac{h}{2\rho} \right)^4 + \dots \right]$
	$r_H = \frac{h(b_1 + b_2)}{2 \frac{b_2 R_1 - b_1 R_2}{h} \ln \frac{R_1}{R_2} - (b_2 - b_1)}$
	$r_H = \frac{d^2}{4(2\rho - \sqrt{4\rho^2 - d^2})}$
	$r_H = \frac{d_H^2 - d_e^2}{4 \left( \sqrt{4\rho^2 - d_e^2} - \sqrt{4\rho^2 - d_H^2} \right)}$

Форма перерізу	Радіус кривизни нейтрального шару
	$r_H = \frac{d^2}{4(2\rho - \sqrt{4\rho^2 - d^2})}$
	$r_H = \frac{h}{2\left(\frac{R_1}{h} \ln \frac{R_1}{R_2} - 1\right)}$
	$r_H = \frac{h}{2\left(1 - \frac{R_2}{R_1} \ln \frac{R_1}{R_2}\right)}$
	$r_H = \frac{b_1 h_1 + b_2 h_2}{b_1 \ln \frac{R_1}{R_2} + b_2 \ln \frac{R_2}{R_3}}$
	$r_H = \frac{b_1 h_1 + b_2 h_2}{b_1 \ln \frac{R_1}{R_2} + b_2 \ln \frac{R_2}{R_3}}$

Форма перерізу	Радіус кривизни нейтрального шару
	$r_H = \frac{b_1 h_1 + b_2 h_2 + b_3 h_3}{b_1 \ln \frac{R_1}{R_2} + b_2 \ln \frac{R_2}{R_3} + b_3 \ln \frac{R_3}{R_4}}$
	$r_H = \frac{b_1 h_1 + b_2 h_2}{b_1 \ln \frac{R_1 - h_2}{R_2} + 2 b_2 \ln \frac{R_1}{R_1 - h_2}}$

### 3.3 Розрахунки на міцність брусів великої кривизни

Якщо при згинанні кривого бруса крім згинального моменту в перерізі діє й поздовжня сила  $N$ , то розрахунок на міцність виконують, враховуючи обидва силові фактори. Дотичні напруження не справляють помітного впливу на міцність і їх, як правило, не визначають.

Для стержнів великої кривизни на підставі формули (3.11) умова міцності запишеться так:

$$\sigma_{max} = \frac{M \cdot y}{S_z \cdot r} + \frac{N}{F} \leq [\sigma]. \quad (3.16)$$

При цьому треба розглядати перерізи, в яких сумарні напруження – найбільші. У цих перерізах небезпечною буде одна з крайніх точок. Для цих точок у формулу (3.16) слід підставити  $y = h_1$  або  $y = h_2$  та відповідно  $r = R_1$  або  $r = R_2$ .

### 3.4 Визначення переміщень у кривих брусах

Для визначення переміщень в стержнях будь-якої кривизни зручно користуватися методом Мора. В стержнях малої кривизни можна нехтувати подовжньою деформацією і деформацією зсуву. Тоді у разі плоского вигину можна користуватися формулою Мора у вигляді (2.10).

При плоскому згинанні бруса великої кривизни деформації елемента від дії зусиль і теж складаються з подовження відрізка осі і відносного повороту перерізів, що обмежують елемент (Рис. 3.4, а, б).

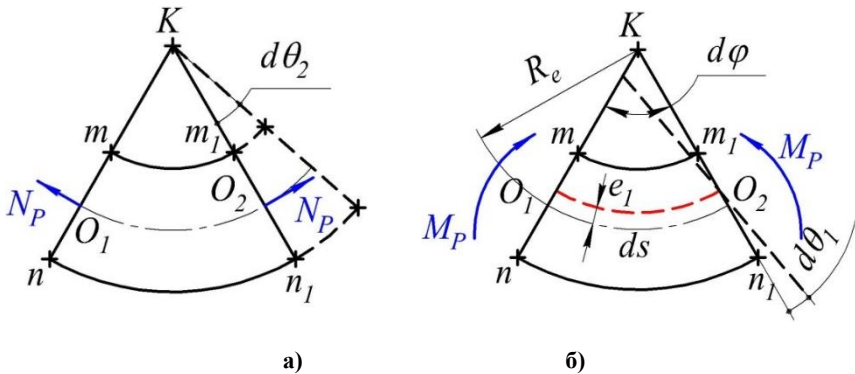


Рисунок 3.4 – Плоске згинання елемента бруса великої кривизни

Взаємний кут повороту перетинів  $\Delta d\varphi = d\theta_1$ , від згинаючого моменту можна визначити з (3.10).

$$d\theta_1 = \frac{M_p d\varphi}{ES} = \frac{M_p dz}{ESR_0},$$

де  $S = |S_y| = \ell F$ .

Кут повороту перерізів, від осьових сил внаслідок різної довжини волокон елемента (Рис.3.4, б), дорівнює

$$d\theta_2 = \frac{N_p ds}{EFR_0}.$$

Повний кут повороту:

$$d\theta = d\theta_1 + d\theta_2 = \frac{M_p dS}{EFR_0} + \frac{N_p dS}{EFR_0}. \quad (3.17)$$

Подовження елемента в результаті дії осьових сил:

$$\Delta(dS)_1 = \frac{N_p dS}{EF}.$$

Подовження елемента в результаті повороту перерізу на кут  $d\theta$ :

$$\Delta(dS)_2 = \ell d\theta_1 = \frac{M_p dS}{ESR_0} \ell = \frac{M_p dS}{EFR_0}. \quad (3.18)$$

Повне подовження осьового волокна:

$$\Delta(dS) = \Delta(dS)_1 + \Delta(dS)_2 = \frac{N_p dS}{EF} + \frac{M_p dS}{EFR_0}. \quad (3.19)$$

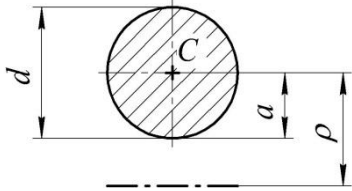
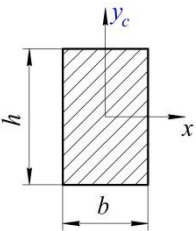
Підставивши (3.18) та (3.19) в формулу можливих переміщень, знайдемо загальну формулу для визначення переміщень бруса великої кривизни:

$$\Delta_{ip} = \int_S \left[ \frac{\bar{M}_i M_p}{ESR_0} + \frac{\bar{N}_i M_p + \bar{M}_i N_p}{EFR_0} + \frac{\bar{N}_i N_p}{EF} + k \frac{\bar{Q}_i Q_p}{GF} \right] dS, \quad (3.20)$$

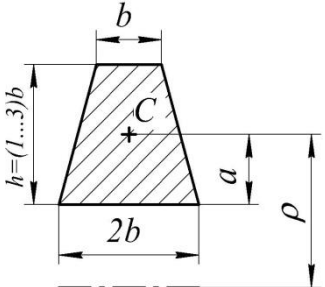
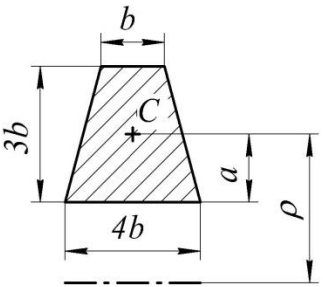
де  $k$  – коефіцієнт, який обирають за таблицею 3.2, в залежності від відношення  $\rho/a$ ,  $a$  – відстань від центра ваги перерізу до внутрішніх волокон.



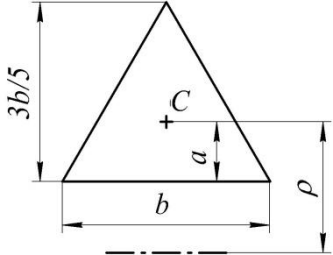
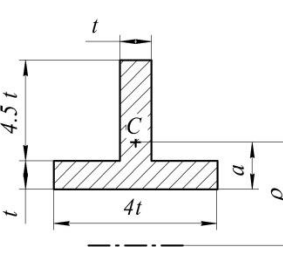
Таблиця 3.2 – Значення коефіцієнта  $k$ 

$\frac{\rho}{a}$		
1,2	0,224	0,305
1,4	0,151	0,204
1,6	0,108	0,149
1,8	0,084	0,112
2,0	0,069	0,090
2,2	0,058	0,077
2,4	0,049	0,065
2,6	0,042	0,055
2,8	0,036	0,047
3,0	0,030	0,041
3,5	0,022	0,028
4,0	0,016	0,021
6,0	0,0070	0,0093
8,0	0,0039	0,0052
10,0	0,025	0,0033

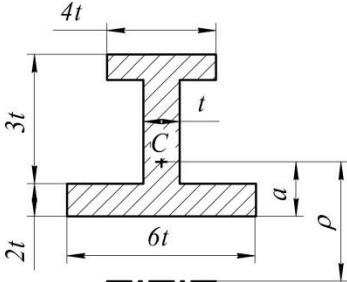
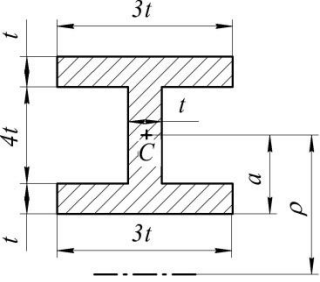
## Продовження табл.3.2

$\frac{\rho}{a}$		
1,2	0,336	0,352
1,4	0,229	0,243
1,6	0,168	0,179
1,8	0,128	0,138
2,0	0,102	0,110
2,2	0,084	0,092
2,4	0,071	0,078
2,6	0,061	0,067
2,8	0,063	0,058
3,0	0,046	0,050
4,0	0,024	0,028
6,0	0,011	0,012
8,0	0,0060	0,0060
10,0	0,0039	0,0039

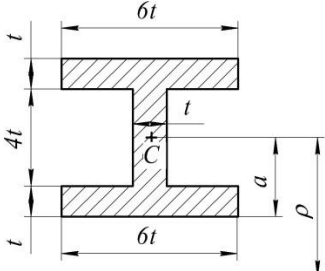
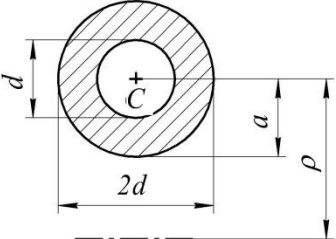
## Продовження табл.3.2

$\frac{\rho}{a}$		
1,2	0,361	0,418
1,4	0,251	0,299
1,6	0,186	0,229
1,8	0,144	0,183
2,0	0,116	0,149
2,2	0,096	0,125
2,4	0,082	0,106
2,6	0,070	0,091
2,8	0,060	0,089
3,0	0,052	0,079
3,5	0,038	0,052
4,0	0,029	0,040
6,0	0,013	0,018
8,0	0,0060	0,010
10,0	0,0039	0,0065

Продовження табл. 3.2

$\frac{\rho}{a}$		
1,2	0,409	0,408
1,4	0,292	0,285
1,6	0,224	0,208
1,8	0,178	0,160
2,0	0,144	0,127
2,2	0,120	0,104
2,4	0,103	0,088
2,6	0,089	0,077
2,8	0,077	0,067
3,0	0,067	0,058
3,5	0,049	0,041
4,0	0,038	0,030
6,0	0,018	0,018
8,0	0,010	0,0076
10,0	0,0065	0,0048

Продовження табл.3.2

$\frac{\rho}{a}$		
1,2	0,453	0,269
1,4	0,319	0,182
1,6	0,236	0,134
1,8	0,183	0,104
2,0	0,147	0,083
2,2	0,122	0,068
2,4	0,104	0,057
2,6	0,090	0,049
2,8	0,078	0,043
3,0	0,067	0,038
3,5	0,048	0,028
4,0	0,036	0,020
6,0	0,016	0,0087
8,0	0,0089	0,0049
10,0	0,0057	0,0031

### 3.5 Контрольні запитання

1. Як розрізняють бруси малої та великої кривизни?
2. Яким методом користуються для визначення переміщень в кривих стержнях?
3. Умова міцності для стержнів великої кривизни.

## 4 СТІЙКІСТЬ СТИСНУТИХ СТЕРЖНІВ

### 4.1 Диференційне рівняння пружної лінії деформованого стержня

Бруси, які застосовуються в інженерних спорудах, повинні мати не тільки достатню міцність, але й достатню жорсткість. Допустимі прогини встановлюються нормами. **Форму зігнутої осі бруса можна визначити за допомогою виразу для кривизни** (див. курс математики):

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}.$$

Підставляючи сюди значення  $1/\rho$ , яке дорівнює

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EJ_z},$$

отримуємо

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}} = \pm \frac{M_z}{EJ_z}. \quad (4.1)$$

Оскільки для бруса постійного перерізу  $J_z = const$ , то права частина рівняння (4.1) залежить тільки від  $M_z$ . Якщо функція  $M_z$  відома, то диференційне рівняння (4.1) можна використати для визначення пружної лінії бруса. Рівняння це нелінійне і неоднорідне другого порядку. Інтегрування його пов'язане з великими труднощами. Але це рівняння можна спростити, якщо врахувати, що для більшості конструкцій максимальний прогин, звичайно складає

дуже малу частину прольоту  $\ell$ :  $y_{max} < (0,003 \dots 0,002)\ell$ .

Отже кут повороту перерізу  $\varphi(x)$  буде малий у порівнянні з одиницею  $\left[\varphi(x) = \frac{dy}{dx} \leq 1\right]$  і ще менша буде величина  $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ . Тоді можна записати  $\frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2y}{dx^2}$ . Задача пошуку рівняння пружної лінії зведеться до пошуку функції  $y(x)$  із диференційного рівняння  $\frac{d^2y}{dx^2} = \pm \frac{M_z}{EJ_z}$ . Якщо  $M_z > 0$  кривизни  $\frac{1}{\rho} > 0$ ; якщо  $M_z = 0$  кривизна  $\frac{1}{\rho} = 0$ . Отже, для прийнятої системи координат у правій частині диференційного рівняння необхідно поставити знак плюс:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M_z}{EJ_z} \quad (4.2)$$

де  $EJ_z$  – жорсткість бруса при згині;  $J_z = \int_F y^2 dF$  – момент інерції всього перерізу відносно нейтральної осі  $z$ .

## 4.2 Задача Ейлера для центрально-стиснутого стержня

Задача втрати стійкості стиснутого стержня була вперше розв’язана в 1744 р. великим математиком і механіком, членом Російської Академії Наук Леонардом **Ейлером**. Саме тому, коли говорять про стійкість стиснутого стержня, вживають вираз “задача Ейлера”, а знайдену за розв’язком такої задачі критичну силу інколи називають “**ейлеровою силою**”. Сам Ейлер її називав “сила колони”, так як в той час найбільш поширеними стиснутими елементами технічних споруд були колони.

**4.2.1 Критична сила.** Розглянемо стержень з площею поперечного перерізу  $F$  (Рис. 4.1) який стискається подовжною силою  $F$ , лінія дії якої співпадає з геометричною віссю стержня. Якщо сила  $P$  невелика, то стержень буде зазнавати рівномірний тиск з напруженням

$$\sigma = \frac{P}{F}$$

Прикладаючи, крім того, невелику поперечну силу, можемо



провокувати згин стержня, і він буде знаходитись у рівновазі, залишаючись зігнутим. Після зняття поперечної сили стержень стане знову прямолінійним. Стан, у якому знаходиться стержень під дією невеликої сили  $P$ , є **стійка рівновага**.

Якщо збільшити силу  $P$ , то після досягнення нею деякого значення рівновага стержня стає байдужою. **Найменше значення осьової стискаючої сили, при якій стає рівноможливим дві форми рівноваги стержня** (прямолінійна і криволінійна, безкінечно близькі одне до другої), **називається критичною силою**. У цьому випадку, коли величина сили досягла значення критичної, стержень знаходиться у стані нестійкої рівноваги. При цьому дія малої поперечної сили виведе стержень із рівноваги, виникає раптовий поперечний вигин його і руйнування.

### Шарнірно закріплений стержень.

Нехай шарнірно закріплений стержень знаходиться у рівновазі, зберігаючи вигнуту форму під дією на нього критичної сили  $\bar{P}_{кр}$  (Рис. 4.1, б).

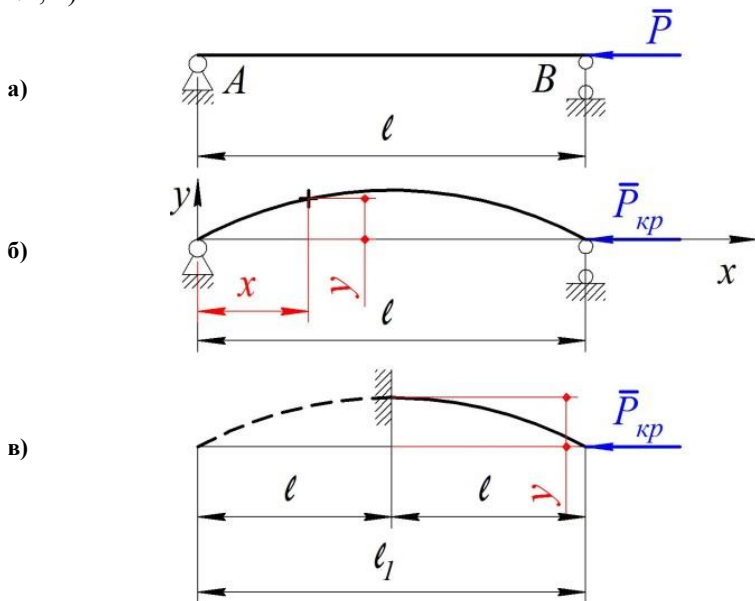


Рисунок 4.1 – Стійкість стиснутих стержнів

У перерізі, що знаходиться на відстані  $x$  від початку координат, діє згинаючий момент:

$$M_z = -P_{\text{кр}} \cdot y. \quad (4.3)$$

Диференційне рівняння пружної лінії на основі виразу (4.2):

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{P_{\text{кр}} \cdot y}{EJ_z}, \quad (4.4)$$

звідки

$$\frac{d^2 y}{dx^2} \pm k^2 y = 0, \quad (4.5)$$

де

$$k^2 = \frac{P_{\text{кр}}}{EJ_z}.$$

Диференційне рівняння (4.5) є лінійним однорідним другого порядку з постійними коефіцієнтами.

Розв'язок рівняння (4.5) отримаємо у вигляді:

$$y = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx. \quad (4.6)$$

Довільні постійні  $C_1$  і  $C_2$  знаходимо із умови закріплення кінців стержня:

при  $x = 0$ ,  $y = 0$  і, відповідно,  $C_1 = 0$

при  $x = \ell$ ,  $y = 0$ ,  $C_2 \sin k\ell = 0$ .

Якщо  $C_2 = 0$ , то для рівняння (4.6) отримаємо тривіальний розв'язок:  $y = 0$ . Цей розв'язок відповідає рівновазі не викривленого стержня. Якщо  $C_2 \neq 0$ , то повинно бути  $\sin k\ell = 0$ . Але ця умова можлива тоді, коли  $k\ell = 0; \pi, 2\pi, 3\pi \dots$

Отже рівновага має місце коли  $\ell \sqrt{\frac{P_{\text{кр}}}{EJ_z}} = 0; \pi; 2\pi; 3\pi; \dots$

Перша умова  $\left( \ell \cdot \sqrt{\frac{P_{\text{кр}}}{EJ_z}} = 0 \right)$  дає тривіальне рішення:

$F_{\text{кр}} = 0$ . Друга умова  $\left( \ell \cdot \sqrt{\frac{P_{\text{кр}}}{EJ_z}} = \pi \right)$  призводить до **формули**

**Ейлера для визначення критичної сили:**

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E J_z}{\ell^2}. \quad (4.7)$$

#### 4.2.2 Вплив умов закріплення.

При зміні умов закріплення величина критичної сили змінюється. Із схеми (Рис. 4.2, б), на якій зображено стержень довжиною  $\ell$ , закріплений одним кінцем, і його дзеркальне відображення, видно, що критичну силу для даного випадку можна визначити за формулою (16.7), якщо замість  $\ell$  в неї підставити  $\ell_1 = 2\ell$ .

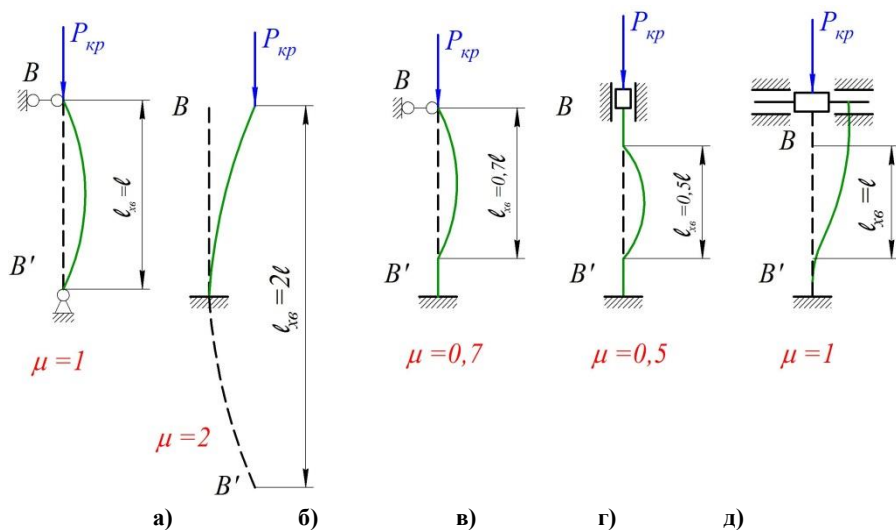
$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E J_z}{4\ell^2} = \frac{\pi^2 E J_z}{(2\ell)^2}. \quad (4.8)$$

Як бачимо, при зміні умов закріплення змінюється числовий множник біля  $\ell^2$  у знаменнику правої частини (4.7).

Оскільки при втраті стійкості прямолінійної форми рівноваги згин завжди має місце у площині найменшої жорсткості  $EJ_{\min}$ , то нейтральною лінією служить та із головних центральних осей інерції, для яких момент інерції поперечного перерізу мінімальний ( $J_{\min}$ ). Тоді **формула Ейлера в загальному вигляді:**

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{(\mu\ell)^2}, \quad (4.9)$$

де  $\mu$  – характеризує умову закріплення кінців стержня (Рис.4.2).

Рисунок 4.2 – Залежність  $\mu$  від умов закріплення

Добуток  $\mu l$  називається **зведеною довжиною стержня**. **Критичне напруження** знайдемо, поділивши критичну силу на площу поперечного перерізу  $F$ :

називається **зведеною довжиною стержня**. Критичну напругу знайдемо, поділивши критичну силу на площу поперечного перерізу  $A$ :

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{F} = \frac{\pi^2 E J_z}{(\mu l)^2 F} = \frac{\pi^2 E i_{min}}{(\mu l)^2}, \quad (4.10)$$

де

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{F}}$$

– мінімальний радіус інерції.

### 4.3 Умови застосування формули Ейлера

При виведенні формули Ейлера було використано диференціальне рівняння зігнутої осі стержня, справедливе тільки в межах дії закону

Гука.

Звідси виходить, що формула Ейлера також справедлива тільки у тому випадку, якщо втрата стійкості відбувається при напруженні  $\sigma_{кр}$ , яке менше границі пропорційності  $\sigma_{пц}$ . Умову справедливості формули Ейлера можна представити у вигляді  $\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц}$ . Підставляючи у цю нерівність значення  $\sigma_{кр}$  із (4.10), отримаємо:

$$\left(\frac{i_{min}}{\mu\ell}\right)^2 \leq \frac{\sigma_{пц}}{\pi^2 E}.$$

Відношення  $\mu\ell/i_{min} = \lambda$  називається **гнучкістю стержня**.

Отже, **граничне значення гнучкості:**

$$\lambda_{гр} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{пц}}}. \quad (4.11)$$

Умова (4.11) визначає границі застосування формули Ейлера. При гнучкості стержня, менше граничного значення  $\lambda_{гр}$ , формулою Ейлера користуватися неможна.

Формулою (4.10) можна користуватися при умові, що гнучкість стержня, яка визначена за виразом:

$$\lambda = \mu\ell \sqrt{\frac{F}{J_{min}}} \quad (4.12)$$

задовольняє

нерівність

$$\lambda_{кр} \leq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пц}}},$$

тобто при  $\lambda > \lambda_{кр}$  втрата стійкості проходить у границях пропорційності матеріалу.

#### 4.4 Розрахунки на стійкість за допомогою коефіцієнтів зменшення основного допустимого напруження

Наведені вище співвідношення відносяться до випадку втрати стійкості у пружній області, тобто справедливі за **умови**, що аж до досягнення критичного стану максимальне напруження не перевищує границі пропорційності ( $\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц}$ ).

Якщо  $\sigma_{кр} > \sigma_{пц}$ , то втрата стійкості проходить за границями пропорційності.

##### Послідовність розрахунків не стійкість:

1. Визначаємо гнучкість за формулою (4.12) і граничну критичну гнучкість, за формулою (4.11).

2. Якщо  $\lambda > \lambda_{кр}$ , то розрахунок виконується за формулами (4.9) і (4.10).

3. При гнучкості, яка задовольняє умову  $\lambda > \lambda_{кр}$ , критичне напруження наближено може бути знайдене за формулою:

$$\sigma_y = \varphi[\sigma], \quad (4.13)$$

де  $\varphi$  – коефіцієнт зниження допустимого напруження  $[\sigma]$ , залежить від матеріалу стержня і гнучкості  $\lambda$  (табл. 4.1).

4. Перевіряємо умову стійкості стиснутого стержня за формулою:

$$\sigma_y = \frac{P}{F} \leq \varphi \cdot [\sigma]. \quad (4.14)$$

За заданим коефіцієнтом запасу стійкості  $n_{ст}$  визначаємо величину **допустимого зовнішнього навантаження**:

$$P \leq [P] = \frac{P_{кр}}{n_{ст}} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\mu\ell)^2 n_{ст}}. \quad (4.15)$$

Звідки визначається найменший осьовий момент інерції

$$J_{min} = \frac{P \cdot n_{ст}(\mu\ell)^2}{\pi^2 E} . \quad (4.16)$$

Таблиця 4.1 – Значення коефіцієнтів  $\phi$  для деяких матеріалів

Гнучкість	Сталь			Чавун	
	Ст. 0	Ст. 5	15ХСНД	C4 15-32	C4 24-44
	Ст. 2			C4 12-28	
	Ст. 3			C4 18-36	
	Ст. 4			C4 21-40	
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,98	0,97	0,95
20	0,97	0,95	0,95	0,91	0,87
30	0,95	0,93	0,93	0,81	0,75
40	0,92	0,90	0,90	0,69	0,60
50	0,89	0,84	0,83	0,57	0,43
60	0,86	0,80	0,78	0,44	0,32
70	0,81	0,74	0,71	0,34	0,23
80	0,75	0,66	0,63	0,26	0,18
90	0,69	0,59	0,54	0,20	0,14
100	0,60	0,50	0,45	0,16	0,12
110	0,52	0,43	0,39		
120	0,45	0,38	0,33		
130	0,40	0,32	0,29		
140	0,36	0,28	0,25		
150	0,32	0,27	0,23		
160	0,29	0,24	0,21		
170	0,26	0,21	0,19		
180	0,23	0,19	0,17		
190	0,21	0,17	0,15		
200	0,19	0,15	0,13		

Для того, щоб із (4.14) знайти площу поперечного перерізу  $F$ , необхідно знати величину коефіцієнта  $\phi$  в залежності від гнучкості  $\lambda$ . Але для визначення гнучкості потрібно знати розміри перерізу. У зв'язку з цим задачу розв'язуємо методом послідовного наближення. Спочатку за наближеними значеннями коефіцієнта зменшення напружень  $\phi_1$  визначаємо площу перерізу. Приймаючи форму

перерізу, отримаємо величину  $i_{min}$ . Знайденими значеннями  $i_{min}$  і  $\lambda$  визначимо  $\varphi_1^*$ . Якщо  $\varphi_1^*$ , виявляється близьким до значення  $\varphi_1$ , то розрахунок на цьому закінчується. У протилежному випадку розрахунок повторюємо, доки вхідні і отримані значення коефіцієнта  $\varphi$  не виявляться досить близькими (метод послідовних наближень).

#### 4.5 Розрахунки на стійкість за межею гнучкості матеріалів

У випадку неможливості застосування формули Ейлера ( $\lambda < \lambda_{кр}$ ) критичне напруження визначається за емпіричними формулами, складеними **Ф.С. Ясинським** на базі досліджень:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda. \quad (4.17)$$

У цій формулі залежність критичного напруження від гнучкості лінійна;  $a$  і  $b$  – коефіцієнти, які визначаються дослідним шляхом, постійні для даного матеріалу (див. табл. 4.2).

При деякому значенні гнучкості  $\sigma_{кр}$ , за формулою (4.17) стає рівним границі текучості  $\sigma_T$  (для пластичного матеріалу), або границі міцності  $\sigma_B$  (для крихких матеріалів).

Тоді гнучкість обчислюємо за формулою:

$$\lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_T}} \text{ або } \lambda = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_B}}.$$

Отже в залежності від гнучкості стиснуті стержні умовно поділяють на три категорії (див. рис. 4.4):

**I. Стержні великої гнучкості** ( $\lambda \geq \lambda_{кр}$ ), для яких розрахунок на стійкість ведеться за **формулою Ейлера** і залежність  $\sigma_{кр}$  від  $\lambda$  – гіперболічна (АВ):

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} - \text{(гіпербола Ейлера)}.$$



**II. Стержні середньої гнучкості** ( $\lambda_0 \leq \lambda < \lambda_{кр}$ ), які розраховуються за формулою Ясинського (4.17). Для них залежність  $\sigma_{кр}$  від гнучкості  $\lambda$  лінійна (BC):

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda.$$

**III. Стержні малої гнучкості** ( $\lambda < \lambda_0$ ), які розраховуються не на стійкість, а на міцність. Для них критичне напруження вважається постійним (CD)  $\sigma_{кр} = \sigma_T$  або  $\sigma_{кр} = \sigma_B$ .

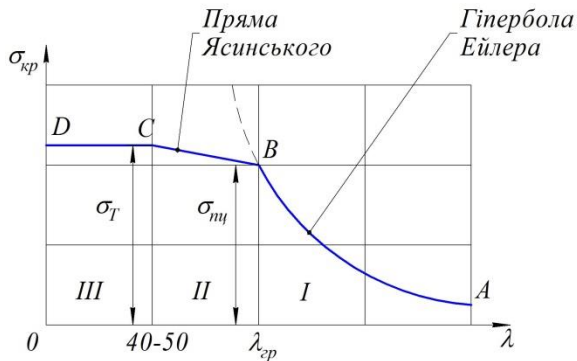


Рисунок 4.3 – Використання методів розрахунку стійкості

Таблиця 4.2 – Значення коефіцієнтів  $a$ ,  $b$  для деяких матеріалів

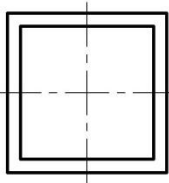
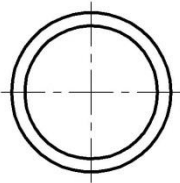
Матеріал	$a$ , МПа	$b$ , Мпа	$\lambda_0$	$\lambda_{кр}$
Сталь:				
Ст2	264	0,7	60	105
Ст3	310	1,14	60	100
20, Ст4	328	1,15	40	96
45	449	1,67	52	85
Дюралюміній Д16 Т	406	1,83	30	83
Сосна, ялина	29,3	0,194		70

#### 4.6 Добір матеріалу та раціональної форми перерізів для стиснутих стержнів

При розрахунку на стійкість модуль пружності  $E$  – єдина механічна характеристика матеріалів, що визначає опір матеріалу втраті стійкості. Оскільки  $E$  мало залежить від міцності, тому для стержнів, несуча здатність яких визначається втратою стійкості ( $\lambda \geq \lambda_{\text{гр}}$  – висока гнучкість), недоцільно використовувати високоміцні матеріали.

Для стержнів малої гнучкості ( $\lambda \leq \lambda_0$ ), граничний стан яких визначається міцністю, а не стійкістю, доцільно використовувати міцні сталі для підвищення  $\sigma_T$ .

Профіль поперечного перерізу тим кращий, чим більший момент інерції  $J$  при одній і тій же площі. Бажано, щоб гнучкість стержня в його головних площинах була однаковою. Цим вимогам найкраще відповідають порожнисті стержні круглого і квадратного перерізу з тонкою стіною. Слід зауважити, що нижня межа товщини стінки



визначається небезпекою місцевої втрати стійкості (випинання, викривлення). Щоб цього не відбувалось, ставлять діафрагми.

Для оцінки оптимальності перерізу використовують параметр

$$\xi = \frac{i_{\min}}{\sqrt{F}} - \text{питомий радіус інерції (див. табл. 4.3).}$$

**Таблиця 4.3 – Значення питомого радіуса інерції для різних форм перерізів**

Переріз	$\xi$
Трубчастий	$(\alpha = d_2/d_3 = 0,95 - 0,8), 2,25-1,64$ $(\alpha = 0,7 - 0,8), 1,2-1,0$
Кутник	0,5 – 0,3
Двотавр	0,41 – 0,27
Швелер	0,41 – 0,29
Квадрат	0,289
Круг	0,283

Явище втрати стійкості елементів конструкції дуже небезпечне. Часто причиною руйнування конструкцій та споруд є не порушення міцності, а втрата стійкості рівноваги.

В історії техніки відомо багато випадків великих аварій і катастроф, коли причиною руйнування мостів, будівель, судів та інших споруд виступало явище втрати стійкості. Можна, наприклад, назвати руйнування великого газгольдера в Гамбурзі, який під час пробного заповнення 7 грудня 1909 р. впав внаслідок втрати стійкості в одному з елементів опорного пристрою.

#### 4.7 Контрольні запитання

1. Поняття Ейлерової сили.
2. Формула Ейлера для визначення критичної сили.
3. Який коефіцієнт характеризує умови закріплення кінців стержня?
4. Що називається зведеною довжиною стержня?
5. Що характеризує гнучкість стержня?
6. Як використовують коефіцієнт зниження допустимого напруження?
7. У якому випадку користуються формулою Ясинського?
8. На які три категорії поділяють стержні в залежності від гнучкості?
9. Як оцінюється раціональний добір матеріалу та форми перерізу для стиснутих стержнів?

## 5. РОЗРАХУНКИ СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ

### 5.1 Основні поняття та визначення. Етапи розрахунку статично невизначуваних систем

Статично невизначуваними називають системи, в яких внутрішні зусилля неможливо визначити тільки за допомогою рівнянь статички. У таких системах зв'язків більше, ніж необхідно для рівноваги. Отже, деякі в'язі виявляються в цьому розумінні зайвими, а зусилля в них – зайвими невідомими. За числом зайвих зв'язків або зайвих невідомих зусиль встановлюють ступінь статичної невизначуваності системи як різницю між кількістю зайвих зв'язків та кількістю рівнянь.

Для розрахунку таких балок крім рівнянь статички необхідно скласти додаткові рівняння, яке називають рівнянням переміщень (або рівнянням деформації).

В розділі 6 були розглянуті найпростіші приклади статично невизначуваних систем, елементи яких зазнавали лише осьового розтягання або стискання. У цій главі розглянемо більш загальні випадки, а основну увагу приділимо статично невизначуваним балкам та рамам.

При розв'язуванні цих систем слід додержуватися наступній послідовності.

**Етап 1.** Визначається число «зайвих» невідомих зв'язків. Під терміном «зайвих невідомих» розуміють зв'язки, без яких система залишається «геометрично» незмінною, тобто в рівновазі.

**Етап 2.** Усуваючи «зайві зв'язки» замінюємо вихідну систему статично визначуваною, яка називається **основною системою**.

Для однієї статично невизначуваної вихідної системи можливі різні варіанти основних систем. Основним є те, що кожна з них була геометрично незмінною.

Отже, **основною системою називається статично визначуваний варіант розглядуваної системи, здобутий звільненням від «зайвих зв'язків».**

**Етап 3.** Завантажуємо основну систему заданим навантаженням і зайвими невідомими зусиллями, що замінюють дію усунених зв'язків. Така система зветься **еквівалентною системою**.

**Етап 4.** Для того, щоб основна система була еквівалентною вихідній системі, невідомі зусилля треба добирати таким чином, щоб деформація основної системи не відрізнялася від деформації вихідної статично невизначуваної системи. Тобто робота еквівалентної системи повинна бути ідентичною роботі заданої. Для цього складається рівняння сумісності деформацій точок прикладення зайвих зв'язків (тобто прирівнюється до нуля деформація точок прикладення зайвих зв'язків у напрямі їх дії) і із рішення цих рівнянь визначають величину і напрям реакцій зв'язків, тобто невідомі навантаження. Переміщення відповідних точок системи можна визначити будь-яким способом, але найкраще методом Мора або способом Верещагіна. Знайшовши зайві невідомі зусилля, визначають реакції опор, будують епюри внутрішніх зусиль, а також добирають розміри і форму перерізу та перевіряють елемент на міцність вже відомими способами.

Наведена система розрахунку статично невизначуваних систем має назву **метода сил**, оскільки як основні невідомі тут вибираються зусилля зайвих зв'язків.

**Приклади визначення «зайвих зв'язків».** На (рис. 5.1, а) показано балку, покладену на шарнірні опори, статично визначувану і геометрично незмінювану. Всі реакції ( $R_A, H_A, R_B$ ) визначаються із умов рівноваги плоскої системи сил, а далі легко знайти силові фактори  $Q$  і  $M$  у будь-яких перерізах балки.

Додамо ще один зв'язок – шарнірно-рухомому опору в перерізі  $C$  (Рис. 5.1, б). З погляду геометричної незмінюваності цей зв'язок зайвий. З трьох рівнянь рівноваги визначити чотири реакції ( $R_A, H_A, R_B, R_C$ ) неможливо. Отже, зображена на рис. 5.1, балка **один раз статично невизначувана**.

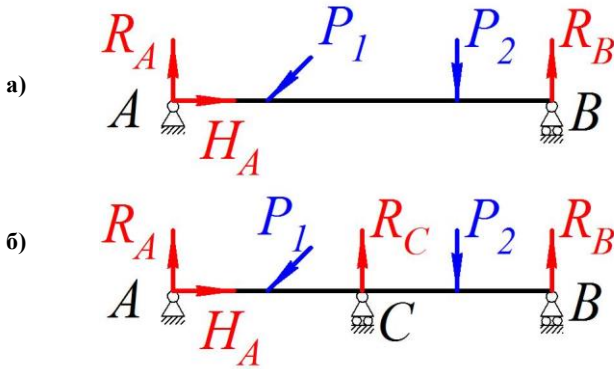


Рисунок 5.1 – Шарнирно-оберта балка

На рис. 5.2, а показано двічі статично невизначувана балка. Для визначення п'яти реакцій ( $R_A, H_A, M_A, R_B, R_C$ ) є лише три рівняння рівноваги. Система має два «зайвих зв'язки».

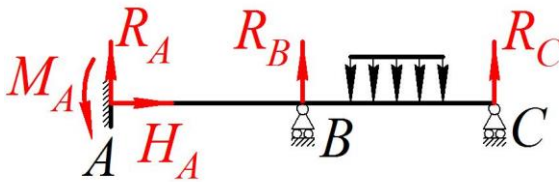


Рисунок 5.2 – Двічі статично невизначувана балка

У конструкціях часто застосовують **рами**, в яких на відміну від ферм, де стержні з'єднані шарнірами і навантажені силами, **стержні з'єднуються жорстко, не мають відносних переміщень та поворотів.**

На рис. 5.3, а) показано двічі статично невизначувану плоску ферму. Тут для визначення п'яти реакцій зовнішніх зв'язків маємо тільки три рівняння рівноваги.

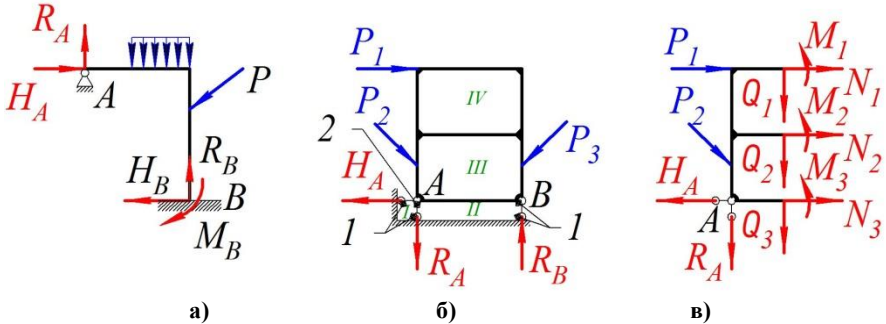


Рисунок 5.3 – Статично невизначувані рами

Статична невизначуваність може бути не тільки від зайвих зв'язків, а й від умов утворення системи. Для рами (Рис. 5.3, б) реакції  $R_A, H_A, R_B$  зовнішніх зв'язків легко визначити з рівнянь рівноваги. Але рівняння рівноваги не дають змоги визначити всі силові фактори в елементах рами.

Розріжемо раму на дві частини й розглянемо рівновагу однієї з частин (Рис. 5.3, в). Дію відкинутої частини в кожному перерізі замінимо трьома силовими факторами: осьюою силою  $N$ , поперечною силою  $Q$  та згинальним моментом  $P$ . Отже, з трьох рівнянь рівноваги треба визначити дев'ять невідомих зусиль. Система шість раз статично невизначувана. Вона складається з двох замкнених безшарнірних контурів, кожен з яких тричі статично невизначуваний. Встановлення шарніра на осі стержня, перетворює на нуль згинальний момент й знижує ступінь статичної невизначуваності на одиницю. Такий шарнір називають **одиначним**.

Шарнір, розміщений у вузлі, де збігаються  $n$  стержнів, знижує ступінь статичної невизначуваності на  $n - 1$ . Такий шарнір зветься **загальним**.

**Ступінь статичної невизначуваності  $S$  плоских систем можна визначати за формулою**

$$S = 3k - u, \quad (5.1),$$

де  $k$  – кількість замкнених контурів (повна відсутність шарнірів);  
 $u$  – кількість шарнірів у перерахунку на одиничні.

Основа (земля) розглядається як стержень. Рама (Рис. 5.3, б) має чотири замкнені контури; біля кожної опори рами вказано відповідні реакції одиночних шарнірів з відповідними індексами. При цьому стержні, жорстко зв'язані між собою, вважаються одним стержнем.

## 5.2 Розрахунок простої статично невизначуваної балки

Наведемо розрахунок балки, до якої прикладені навантаження. Один кінець балки закріплений, а інший опирається на шарнірно-рухому опору (Рис. 5.4, а). Затиснута опора  $A$  та шарнірно-рухома опора  $B$  дають чотири реакції ( $R_A, H_A, M_A, R_B$ ). Отже балка один раз статично невизначувана. Для побудови основної системи слід усунути один зв'язок – шарнірно-рухому опору. Основна система становить консоль (Рис. 5.4, б).

До основної системи прикладемо задане розподілене навантаження  $q$ , а замість відкинutoї опори прикладемо невідому реакцію  $R_B = X_1$  (Рис. 5.4, б). Надалі зайві зв'язки будемо позначати літерою  $X$  незалежно від того, сила це чи момент.

Повне переміщення точки  $B$  основної системи (від заданого  $q$  й зайвого зусилля) у напрямі  $X_1$  повинно дорівнювати нулю (точка  $B$  нерухома). Додаткова рівняння переміщень запишеться так:

$$\Delta_1 = 0. \quad (5.2)$$

Повний прогин  $\Delta_1$  можна визначити як суму прогинів від зовнішнього навантаження

$$\Delta_{1p} = -\frac{q\ell^4}{8EJ}$$

(Рис. 5.4, в), та невідомої реакції (Рис. 5.4, г).



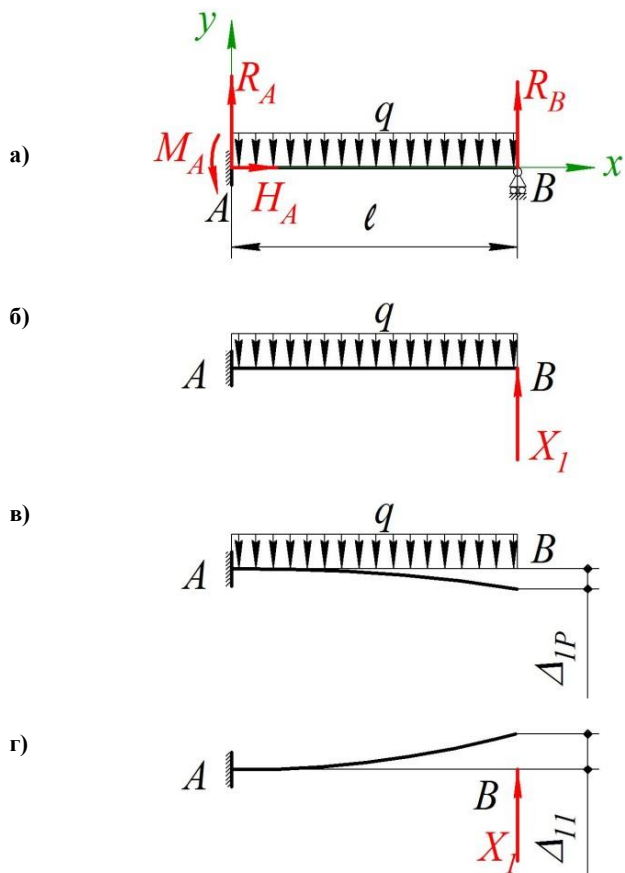


Рисунок 5.4 – Статично невизначувана балка

Тоді рівняння (5.2) запишеться у вигляді

$$\Delta_1 = \Delta_{1p} + \Delta_{11} = 0$$

або

$$-\frac{q\ell^4}{8EJ} + \frac{X_1\ell^3}{3EJ} = 0.$$

Звідси шукана реакція

$$X_1 = \frac{3}{8}q\ell, \quad (X_1 = R_B).$$

З рівнянь статки визначаємо останні реакції опор:

$$\begin{aligned} \sum P_{kx} &= 0; \quad H_A = 0; \\ \sum P_{ky} &= 0; \quad R_A - q\ell + R_B = 0; \\ \sum M_{kA} &= 0; \quad M_A - \frac{q\ell^2}{2} + R_B\ell = 0; \\ H_A &= 0; \quad M_A = \frac{q\ell^2}{8}; \quad R_A = \frac{5}{8}q\ell; \quad R_B = \frac{3}{8}q\ell. \end{aligned}$$

На рис. 5.5 наведено епюри  $Q$  та  $M$ , а також значення реакцій опор.

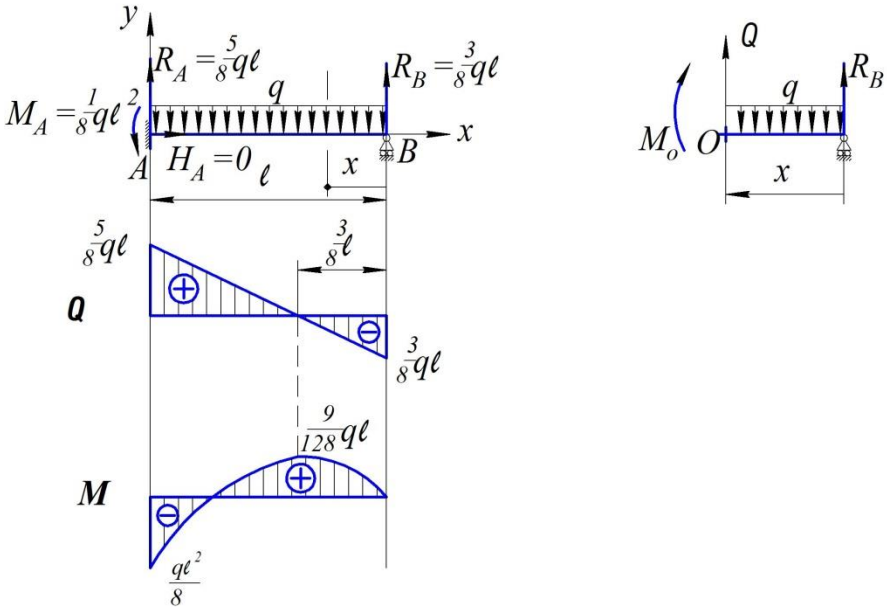


Рисунок 5.5 – Епюри  $Q$  та  $M$

Визначимо внутрішні зусилля  $Q$  і  $M$  (Рис. 5.5, б).

$$\sum Y_k = Q + R_B - qx = 0 \quad Q = -R_B + qx.$$

При  $x = 0$

$$Q = -R_B = -\frac{3}{8}q\ell;$$

при  $x = \ell$

$$Q = -R_B + q\ell = -\frac{3}{8}q\ell + q\ell = \frac{5}{8}q\ell.$$

$$\sum M_{Ok} = R_B x - q \frac{x^2}{2} - M_O = 0 \quad M_O = R_B x - q \frac{x^2}{2};$$

при  $x = 0$

$$M_O = 0 ;$$

при  $x = \ell$

$$M_O = \frac{3}{8}q\ell^2 - \frac{1}{2}q\ell^2 = -\frac{q\ell^2}{8}.$$

Визначаємо екстремум.

$$x_0 = \frac{R_B}{q}; \quad x_0 = \frac{\frac{3}{8}q\ell}{q} = \frac{3}{8}\ell.$$

При  $x = x_0$

$$M_O = \frac{9q\ell^2}{128}.$$

### 5.3 Канонічні рівняння методу сил

Зовнішні навантаження, що зустрічаються в задачах опору матеріалів, є групою постійних сил. Роботу групи постійних сил можна подати у вигляді добутку двох величин  $A = P \cdot \Delta_p$ , у якому множник  $P$  залежить тільки від сил групи і називається **узагальненою силою**, а  $\Delta_p$  залежить від переміщень і називається **узагальненим переміщенням**.

Таким чином, під **узагальненою силою** розуміємо будь-яке навантаження (зосереджені сили, зосереджені моменти, розподілені навантаження і т.д.), яке здатне здійснювати роботу на відповідному узагальненому переміщенні.

Прийнято позначати узагальнені переміщення (як лінійні, так і кутові) буквами  $\Delta_{ik}$  або  $\delta_{ik}$  з відповідними подвійними індексами. Перший індекс указує точку і напрям переміщення, другий – силовий чинник, що викликав це переміщення. Наприклад,  $\Delta_{pp}$

означає переміщення точки прикладання сили  $P$  за напрямком її дії, викликане цією ж силою  $P$  (Рис.5.6, а).

Для позначення повного переміщення, викликаного декількома силовими чинниками, наприклад силою  $P$ , моментом  $M$  і “зайвою” невідомою силою  $X_1$  (див. рис. 5.6, б), при  $\Delta$  зберігають тільки перший індекс:

$$\Delta_P = \Delta_{PP} + \Delta_{PM} + \Delta_{PX_1}, \quad (5.3)$$

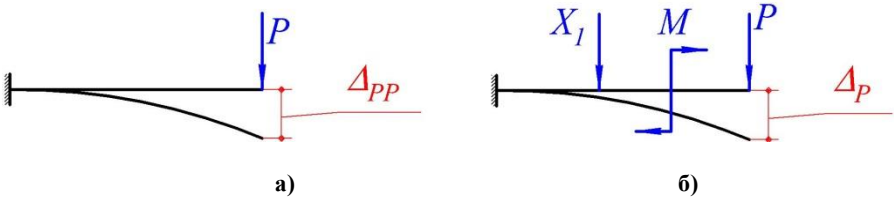


Рисунок 5.6 – Переміщення точки прикладання сили  $P$

Переміщення, викликані **одичною силою** ( $\bar{X}_1 = 1$ ), прийнято позначати буквою  $\delta$  і називати **питомим переміщенням**. Якщо одична сила  $\bar{X}_1 = 1$  викликала переміщення  $\delta_{11}$ , то повне переміщення  $\Delta_{11}$  може бути подане у вигляді:

$$\Delta_{11} = \bar{X}_1 \cdot \delta_{11}. \quad (5.4)$$

Додаткові рівняння переміщень, що виражають рівність нулю переміщень по напрямках “зайвих” невідомих, зручно складати в так званій **канонічній формі**, тобто по певній закономірності.

Покажемо це на **прикладі** рішення простої статично невизначуваної системи (Рис.5.7, а).

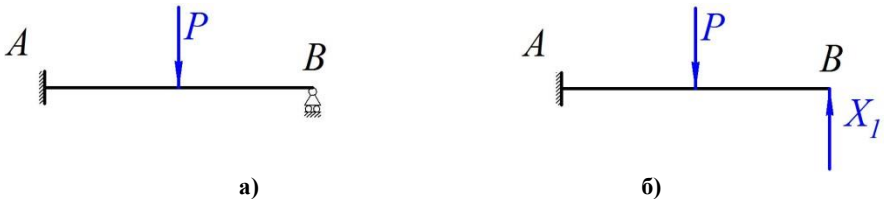


Рисунок 5.7 – Приклад простої статично невизначуваної системи



де  $\delta_{ik}$  – одиничні коефіцієнти канонічних рівнянь;

$\Delta_{iP}$  – вантажні коефіцієнти канонічних рівнянь.

**Одиничні коефіцієнти з однаковими індексами називають головними, а з різними – побічними.**

Кількість рівнянь системи (5.8) дорівнює ступеню статичної невизначуваності стержневої системи.

**Фізичний зміст канонічних рівнянь (5.8) – переміщення за напрямком відкинутих зв'язків дорівнюють нулю.**

Для визначення коефіцієнтів канонічних рівнянь необхідно виконати наступні дії:

1. До основної системи (ОС) по черзі прикласти сили  $\bar{X}_1 = 1$  і побудувати одиничні епюри.

2. “Перемноженням” відповідних одиничних епюр знайти одиничні коефіцієнти  $\delta_{ik}$ .

3. До основної системи прикласти зовнішнє навантаження і побудувати вантажну епюру.

4. По черзі “перемножуючи” вантажну епюру з кожною одиничною, одержати вантажні коефіцієнти  $\Delta_{iP}$ .

5. Визначивши коефіцієнти канонічних рівнянь і вирішивши систему (5.8), знайти невідомі зусилля  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

Можна показати, що визначення одиничних переміщень можна спростити, якщо встановити між переміщеннями  $\delta_{ik}$  і  $\delta_{ki}$  взаємозв'язок.

## 5.4 Теорема про взаємність робіт і переміщень

Теорема про взаємність робіт належить до загальних теорем опору матеріалів. Вона витікає з принципу незалежності дії сил і застосовна для всіх систем.

Розглянемо балку, до якої прикладені сили  $P_1$  і  $P_2$  (Рис. 5.9).

Виконаємо пряме навантаження, тобто навантажимо балку в точці А силою  $P_1$  (див. рис.5.9, а). Вона виконає роботу (**формула Клапейрона**)

$$A = \frac{1}{2} P_1 \cdot \Delta_{11},$$

де  $\Delta_{11}$  – переміщення т.  $A$  у напрямі сили  $P_1$ , викликане силою  $P_1$ .

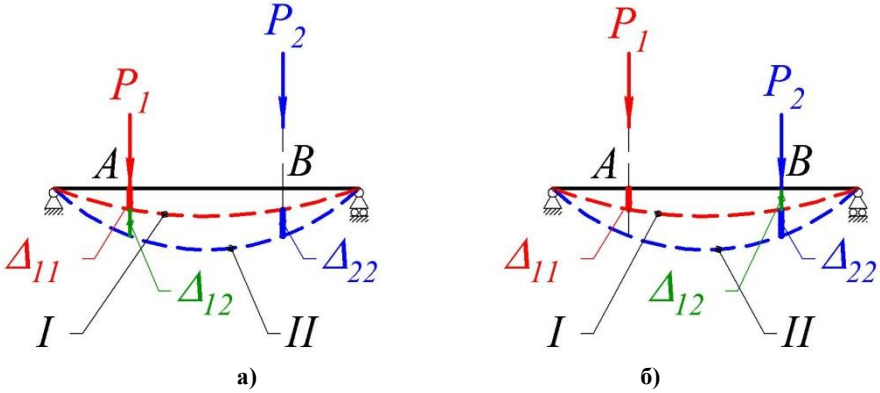


Рисунок 5.9 – До теореми про взаємність робіт

Далі в точці  $B$  прикладаємо силу  $P_2$ . Вона виконає роботу, яка матиме аналогічний вираз:  $\frac{1}{2}P_2 \cdot \Delta_{22}$ .

Одночасно виконає роботу і сила  $P_1$ , оскільки при прикладанні сили  $P_2$  точка  $A$  теж переміститься. Сила  $P_1$  на цьому переміщенні залишається постійною, і її робота буде дорівнювати  $P_1\Delta_{12}$ .

Отже, сумарна робота при прямому навантаженні балки (див. рис.5.9, а) буде дорівнювати

$$A_1 = \frac{1}{2}P_1 \cdot \Delta_{11} + \frac{1}{2}P_2 \cdot \Delta_{22} + P_2 \cdot \Delta_{21}. \quad (5.9)$$

Виконаємо зворотнє навантаження (див. рис.5.9, б), тобто спочатку прикладемо силу  $P_2$  в точці  $B$ , а потім силу  $P_1$  в точці  $A$ . Тоді, відповідно, сумарна робота набуде вигляду

$$A_2 = \frac{1}{2}P_2 \cdot \Delta_{22} + \frac{1}{2}P_1 \cdot \Delta_{11} + P_2 \cdot \Delta_{21}. \quad (5.10)$$

Загальні (сумарні) роботи в обох випадках будуть однакові, тому прирівнявши роботи  $A_1 = A_2$ , знаходимо

$$P_1 \cdot \Delta_{12} = P_2 \cdot \Delta_{21}. \quad (5.11)$$

Це і є теорема про взаємність робіт: робота першої сили на переміщенні точки її прикладання під дією другої сили дорівнює роботі другої сили на переміщенні точки її прикладання під дією першої сили.

Якщо  $P_1 = P_2 = P$ , то

$$\Delta_{12} = \Delta_{21}. \quad (5.12)$$

Теорема про взаємність переміщень: переміщення першої одиничної сили в її напрямку під дією другої одиничної сили дорівнює переміщенню другої одиничної сили в її напрямку під дією першої одиничної сили.

Цю теорему можна проілюструвати (Рис. 5.10).

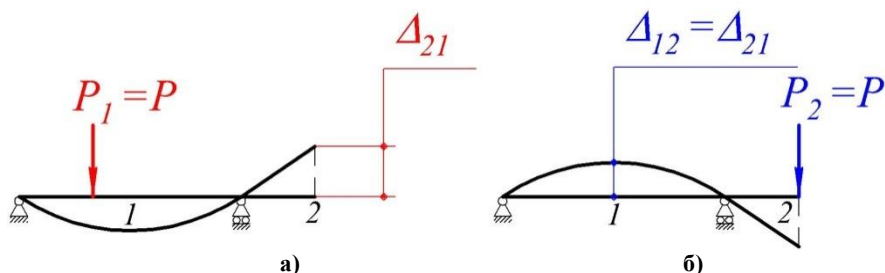


Рисунок 5.10 – До теореми про взаємність переміщень

## 5.5 Контрольні запитання

1. Які системи називають статично невизначуваними?
2. Що розуміють під терміном «зайві невідомі»?
3. Послідовність розв'язання статично невизначуваних задач.
4. Наведіть приклад один раз статично невизначуваної балки.
5. Чим відрізняється рама від ферми?
6. Наведіть приклад статично невизначуваної рами.
7. Формула визначення ступенів статичної невизначуваності  $S$  плоских систем.
8. Що називається узагальненою силою?
9. Теорема про взаємність робіт і переміщень.
10. Наведіть приклади конструкцій на пружній основі.
11. Диференційні рівняння зогнутої осі балки на пружній основі.



## 6. БАГАТОПРОЛЬОТНІ НЕРОЗРІЗНІ БАЛКИ

### 6.1 Розрахунок нерозрізних балок. Основні поняття

Нерозрізною називається статично невизначувана балка, що перекриває декілька прольотів (не менше 2) і проходить над усіма проміжними опорами, з якими вона сполучена шарнірно. Крайні опори можуть бути або шарнірними, або жорстко закріпленими (Рис. 6.1). У першому випадку (Рис. 6.1, а) при дії вертикального навантаження горизонтальна реакція в нерухомій опорі дорівнює нулю, і тому число зайвих вертикальних реакцій (і ступінь статичної невизначуваності) дорівнюватиме числу проміжних опор. У другому випадку (Рис. 6.1, б) ступінь статичної невизначуваності дорівнює числу проміжних шарнірних опор.

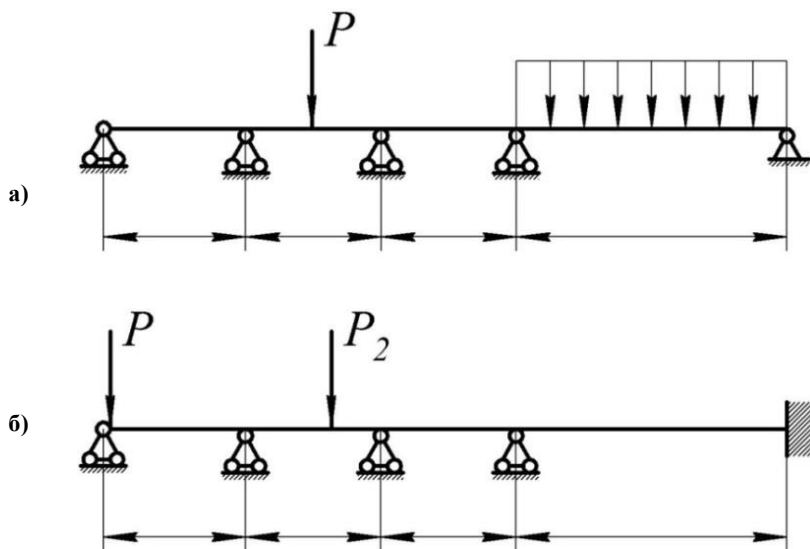


Рисунок 6.1 – Типи нерозрізних балок з крайніми шарнірними опорами (а) і жорстким затисканням (б)

Нерозрізні балки конструюють так, щоб була виключена вірогідність відриву балки від опор.

Спочатку ми розберемо **випадок шарнірних опор**. Одна з опор нерозрізної балки робиться зазвичай шарнірно-нерухомою, інші – шарнірно-рухомими. Нумерацію опор і прольотів вестимемо з ліва направо, позначаючи крайню ліву опору номером 0 і крайній лівий прольот номером 1. Довжини прольотів позначатимемо буквою  $l$  з номером, що відповідає номеру прольоту. Перерізи балки в усіх прольотах вважатимемо однаковими і, отже, жорсткість балки  $EJ$  – постійною. На рис. 6.2 зображена нерозрізна балка, вказані прийняті позначення і зображені можливі реакції опор. Як легко бачити, число зайвих опорних реакцій дорівнює числу проміжних опор.

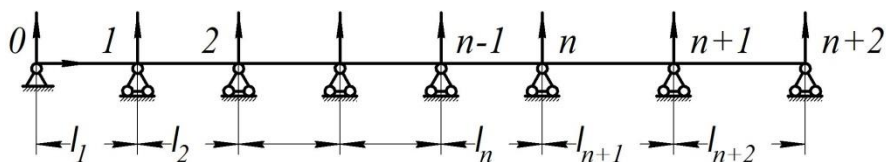


Рисунок 6.2 – Статично невизначувана нерозрізна балка на шарнірних опорах

Застосовуючи описаний вище прийом рішення задачі, слід було б взяти за додаткові невідомі реакції проміжних опор, а за основну систему – балку на шарнірних опорах в точках 0 і  $n + 2$ . Додатковими рівняннями служили б умови рівності нулю прогинів в точках основної системи, що відповідають проміжним опорам; в цьому випадку всі невідомі входили б в усі рівняння. Проте простішим і поширенішим є інший спосіб, пов'язаний з іншим видом основної системи і додаткових невідомих; при цьому способі в кожне з рівнянь входить не більше трьох невідомих.

Операції вибору зайвої невідомої і основної системи нерозривно пов'язані один з одним; основна статично визначувана система виходить із статично невизначуваної шляхом відкидання опорних закріплень, що викликають опорні реакції, прийняті за «зайві». Можна поступити інакше: перетворити яким-небудь чином невизначувану конструкцію на статично визначувану, а потім подивитися, які зусилля або реакції довелося б при цьому відкинути. Ці величини і будуть «зайвими» невідомими в нашій статично невизначуваній системі.

Так, в нерозрізній балці (Рис. 6.3, а) можна прийняти за зайву невідому реакцію середньої опори В; тоді основною системою буде балка на двох опорах А і С; але можна перетворити дану балку на статично визначувану шляхом додання додаткового шарніра в точці D (Рис. 6.3, б). Тоді вийде основна система, що складається з консольної балки CBD і підвісний AD. Постановка шарніра в перерізі D вимагає, щоб згинальний момент  $M_D$ , тобто і нормальне напруження, яке викликається ним, в цьому перерізі дорівнювали нулю.

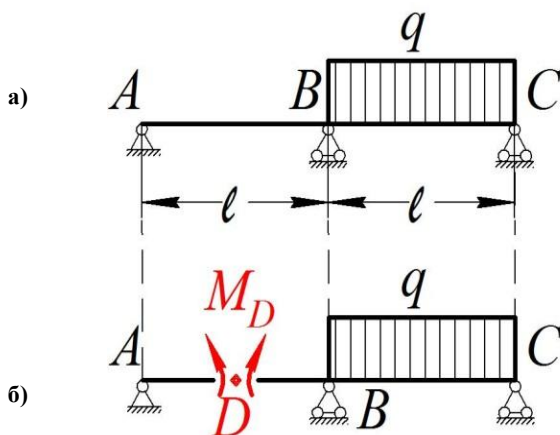


Рисунок 6.3 – Двухпрольотна нерозрізна балка

Таким чином, при переході до основної системи ми відкинули нормальне напруження в перерізі D, що передається від лівої частини на праву, і навпаки; підсумували в пари сил, рівні згинальному моменту в перерізі D; ці пари, знову прикладені до основної системи, показані на рис. 6.3. Перетворюючи нашу балку на статично визначувану шляхом введення шарніра D, ми за «зайву» невідому обираємо не зовнішню силу – одну з опорних реакцій, а величину згинального моменту в цьому перерізі.

Положення перерізу D може бути взяте довільно; обчислення виходять найбільш простими, якщо поєднати точку D з опорним перерізом над проміжною опорою – точкою B, взяти за «зайву» невідому **опорний момент** в перерізі B. Тоді основна система буде двома простими балками, на шарнірних опорах в точках A, B і C, які

мають загальну опору в точці  $B$ . Саме так і вибирають основну систему при розрахунку нерозрізних балок. За «зайві» невідомі вибирають величини згинальних опорних моментів  $M_1, M_3, \dots, M_{n-1}, M_n, M_{n+1}$  над усіма проміжними опорами. При такому виборі «зайвих» невідомих рівняння для їх визначення спрощуються і можуть бути складені в загальному вигляді за допомогою теореми про три моменти.

## 6.2. Рівняння трьох моментів

Для виводу **теореми о трьох моментах** розглянемо нерозрізну балку  $s$  рядом прольотів різної довжини  $\ell_1, \ell_2$  і т.д. з різноманітними навантаженнями (Рис. 6.4, а). **Опи нумеруються зліва направо, позначаючи крайню ліву номером 0, номер прольоту визначають за номером правої опори.** Спочатку покажемо всі реакції, які виникають в даному випадку; із умов статички горизонтальна реакція  $H = 0$ .

Для того, щоб отримати основну систему (Рис. 6.4, б) додамо в опорних перерізах шарніри. Додатковими невідомими будуть опорні моменти на проміжних опорах  $M_{n-1}, M_n, M_{n+1}$ . **Моменти на крайніх опорах дорівнюють нулю.**

Навантажимо основну систему зовнішніми навантаженнями та опорними моментами (еквівалентна система) (див. рис. 6.4, в).

Вставлені шарніри в основній системі дозволяють балці деформуватися від зовнішнього навантаження в межах одного прольоту. Для того, щоб основна система працювала як задана, в еквівалентній системі **в точках введення шарніру прикладаємо фіктивні згинальні моменти і добираємо їх значення і напрямлення таким чином, щоб розрізана балка працювала як ціла. Момент має назву таку ж як і опора, біля котрої він прикладений.**

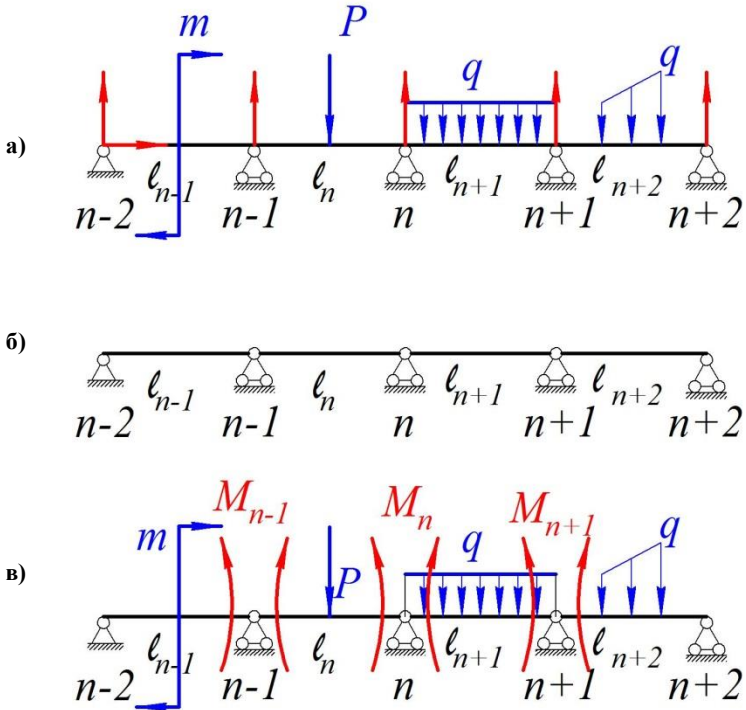


Рисунок 6.4 – Багатопрольотна балка

В основній системі обидві сторони  $n$ -го опорного перерізу можуть повертатися під навантаженням незалежно одна від іншої (Рис. 6.5).

Кут повороту перерізу на опорі  $n$  лівого прольоту від опори перерізу позначимо  $\varphi_{n \text{ лів}}$ , а кут повороту для правого прольоту позначимо  $\varphi_{n \text{ прав}}$ .

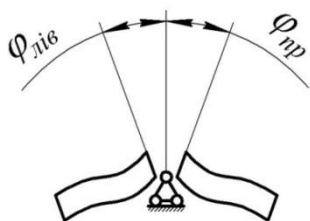


Рисунок 6.5 – Кути повороту перерізів балки на опорі

В нерозрізній балці обидва прольотні перерізи співпадають, це лише різні сторони одного і того ж опорного перерізу, тому умовою сумісності деформацій буде

$$\varphi_{\text{лів}} + \varphi_{\text{прав}} = 0. \quad (6.1)$$

Таку умову ми можемо скласти для кожної з проміжних опор, і написати стільки додаткових рівнянь, скільки ми маємо невідомих моментів.

Пояснимо як складаються умови (6.1) на прикладі (Рис. 6.6). Виділимо з балки, (рис 6.4, в) два суміжних прольота і запишемо умову (18.1):

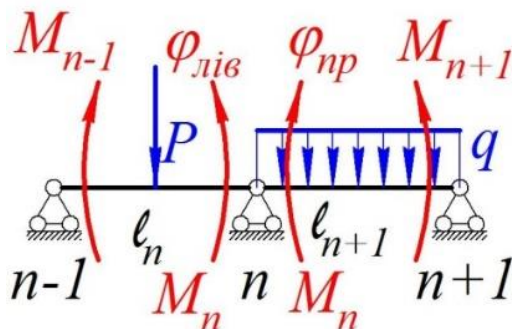


Рисунок 6.6 – Два суміжних прольоти

$$\varphi_{\text{лів}} = \varphi_{M_{n-1}} + \varphi_{M_n} + \varphi_P^{\text{л\ddot{u}в}}; \quad (6.2)$$

$$\varphi_{\text{прав}} = \varphi_{M_{n+1}} + \varphi_{M_n} + \varphi_q^{\text{п\ddot{р}ав}}, \quad (6.3)$$

де  $\varphi_{M_{n-1}}$  – кут повороту перерізу  $n$  від згинального моменту  $M_{n-1}$  на прольоті  $\ell_n$ .

$\varphi_{M_n}$  – кут повороту перерізу  $n$  від згинального моменту  $M_n$  на прольоті  $\ell_n$ .

$\varphi_P^{лів}$  – кут повороту перерізу  $n$  від сили  $P$  на прольоті  $\ell_{n+1}$ .

Використовуючи умову 6.1 запишемо:

$$\varphi_{M_{n-1}} + 2\varphi_{M_n} + \varphi_{M_{n+1}} = -(\varphi_P^{лів} + \varphi_q^{прав}). \quad (6.4)$$

Для визначення кутів повороту, які входять в рівняння 6.4 розглянемо дві самостійні балки на прольотах  $\ell_n$  і  $\ell_{n+1}$ .

Кути повороту перерізів в основній системі на опорі  $n$  залежать від деформацій тільки двох суміжних прольотів  $\ell_n$  і  $\ell_{n+1}$ . Розглянемо ці два прольоти. На прольот  $\ell_n$  діють зовнішня сила  $P$  та опорні моменти  $M_n$  та  $M_{n-1}$ ; на прольот  $\ell_{n+1}$  діє зовнішнє розподілене навантаження інтенсивністю  $q$  та опорні моменти  $M_n$  та  $M_{n+1}$ .

Для наочності схеми обидва суміжних прольоти показано окремо.

Щоб обчислити кути повороту скористаємося **графо-аналітичним методом**. Фіктивні балки представляють собою теж шарнірно-оперті балки (Рис. 6.7, а, та Рис.6.8,а).

**Вантажна епюра** – це епюра моментів від загального навантаження.

Фіктивні навантаження лівого прольоту  $\ell_n$ :

а) вантажна епюра згинального моменту від зовнішнього навантаження  $P$  з площею  $\omega_n$  та відстанню від центру ваги цієї площі до лівої опори  $a_n$ ;

б) трикутна епюра згинального моменту від додаткового опорного моменту  $\bar{M}_{n-1} = 1$ ;

в) трикутна епюра згинального моменту від додатного опорного моменту  $\bar{M}_n = 1$ .

На праву фіктивну балку прольоту  $\ell_{n+1}$  діє розподілене навантаження. Будуємо епюри (Рис. 6.8, б):

а) епюра згинального моменту від зовнішніх сил ( $q$ ) з вантажною площею  $\omega_{n+1}$  та відстанню від центру ваги цієї площі до правої опори  $b_{n+1}$ .

б) трикутна епюра згинального моменту від додатного опорного моменту  $\bar{M}_{n+1} = 1$ ;

в) трикутна епюра згинального моменту від додатного опорного моменту  $\bar{M}_n = 1$ .

**Розглянемо лівий прольот довжиною  $\ell_n$ .**

Використовуючи спосіб Верещагіна знаходимо кути повороту перерізу  $n$  від згинальних моментів  $\bar{M}_{n-1}$ ,  $\bar{M}_n$  і навантаження  $P$ .

$$\varphi_{M_{n-1}} = \frac{\omega_1 \cdot \bar{Y}_1}{EJ_x} = \frac{1}{EJ_x} \frac{P\ell_n^2}{4} \frac{\bar{M}_{n-1}}{2} = \frac{P\ell_n^2 \bar{M}_{n-1}}{8EJ_x}, \quad (6.5)$$

де  $\omega_1$  – площа вантажної епюри моментів від сили  $P$ :

$$\omega_1 = h_1 \ell_n = \frac{P\ell_n}{4} \ell_n = \frac{P\ell_n^2}{4};$$

$$h_1 = \frac{P}{2} \cdot \frac{\ell_n}{2} = \frac{P\ell_n}{4}.$$

$\bar{Y}_1$  – ордината під центром ваги вантажної епюри на епюрі одиничного моменту  $\bar{M}_{n-1}$

$$\bar{Y}_1 = \frac{\bar{M}_{n-1}}{2},$$

$$\varphi_{M_n} = \frac{\omega_1 \cdot \bar{Y}_2}{EJ_x} = \frac{1}{EJ_x} \frac{P\ell_n^2}{4} \frac{\bar{M}_n}{2} = \frac{P\ell_n^2 \bar{M}_n}{8EJ_x}, \quad (6.6)$$

де  $\omega_1$  – площа вантажної епюри моментів від сили  $P$ :

$$\omega_1 = h_1 \ell_n = \frac{P\ell_n}{4} \ell_n = \frac{P\ell_n^2}{4};$$

$$h_1 = \frac{P}{2} \cdot \frac{\ell_n}{2} = \frac{P\ell_n}{4}.$$

$\bar{Y}_2$  – ордината під центром ваги вантажної епюри на епюрі одиничного моменту  $\bar{M}_n$

$$\bar{Y}_2 = \frac{\bar{M}_n}{2}.$$



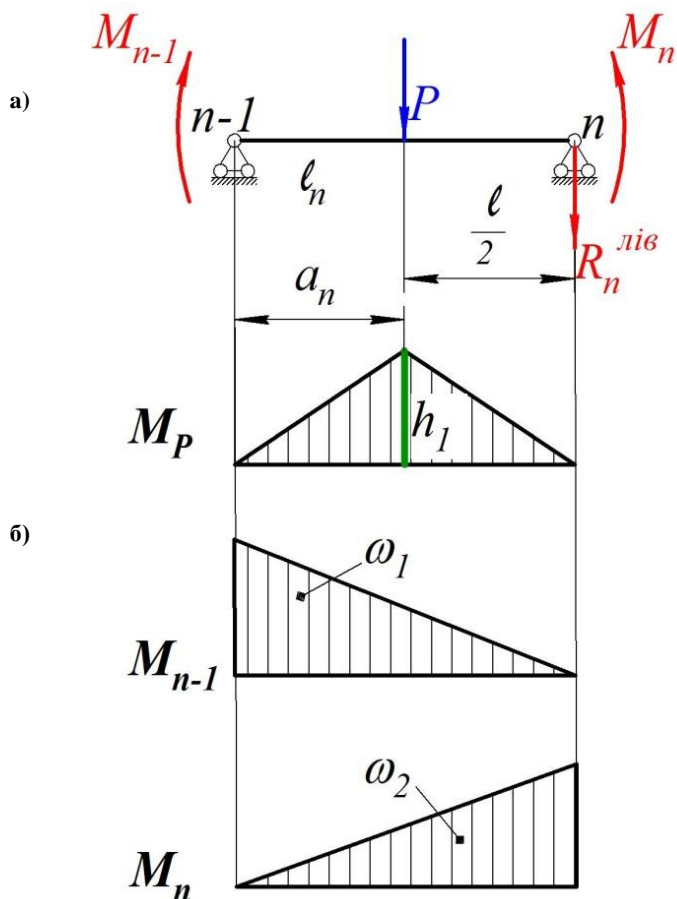


Рисунок 6.7 – Лівий прольот балки з епюрами

Розглянемо правий прольот довжиною  $\ell_{n+1}$ .

Використовуючи спосіб Верещагіна знаходимо кути повороту перерізу  $n$  від згинальних моментів  $\bar{M}_{n+1}$ ,  $\bar{M}_n$  і розподіленого навантаження  $q$ .

$$\varphi_{Mn+1} = \frac{\omega_2 \cdot \bar{y}_1}{EJ_x} = \frac{1}{EJ_x} \frac{q\ell_{n+1}^3}{6} \frac{\bar{M}_{n+1}}{2} = \frac{q\ell_{n+1}^3 \bar{M}_{n+1}}{12EJ_x}, \quad (6.7)$$

де  $\omega_2$  – площа вантажної епюри моментів від розподіленого навантаження  $q$ ;

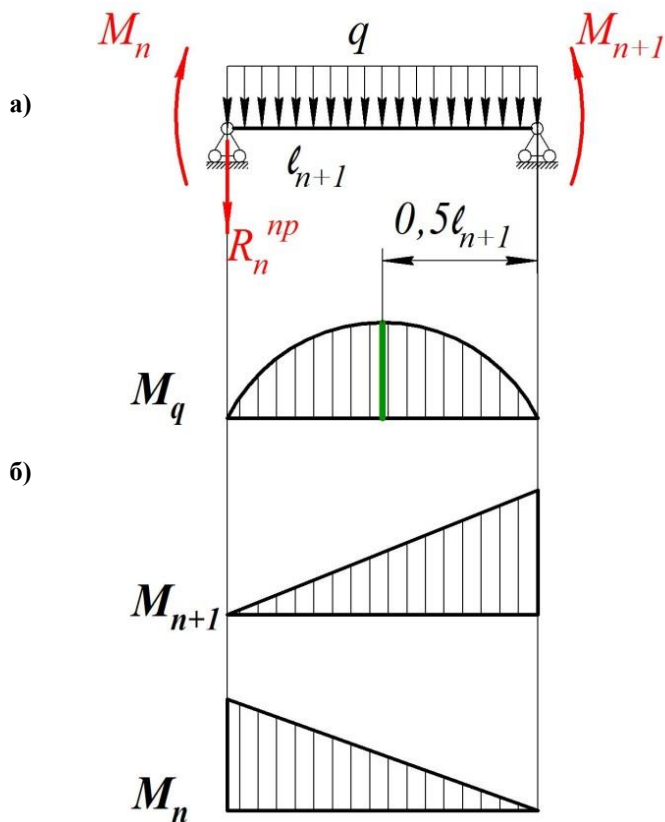


Рисунок 6.8 – Правий прольот балки з епюрами

$$\omega_2 = \frac{2}{3} h_2 \ell_{n+1} = \frac{2}{3} \frac{q \ell_{n+1}^2 (\ell_{n+1})}{4} = \frac{P \ell_{n+1}^3}{6};$$

$$h_2 = \frac{q\ell_{n+1}}{2} \cdot \frac{\ell_{n+1}}{2} = \frac{q\ell_{n+1}^2}{4}.$$

$\bar{Y}_1$  – ордината під центром ваги вантажної епюри на епюрі одиничного моменту  $\bar{M}_{n+1}$

$$\bar{Y}_1 = \frac{\bar{M}_{n+1}}{2}.$$

$$\varphi_{Mn} = \frac{\omega_2 \cdot \bar{Y}_2}{EJ_x} = \frac{1}{EJ_x} \frac{q\ell_{n+1}^3}{6} \frac{\bar{M}_n}{2} = \frac{q\ell_{n+1}^3 \bar{M}_n}{12EJ_x}, \quad (6.8)$$

$\omega_2$  – площа вантажної епюри моментів від розподіленого навантаження  $q$ :

$$\omega_2 = \frac{2}{3} h_2 \ell_{n+1} = \frac{2}{3} \frac{q\ell_{n+1}^2 (\ell_{n+1})}{4} = \frac{q\ell_{n+1}^3}{6};$$

$$h_2 = \frac{q\ell_{n+1}}{2} \cdot \frac{\ell_{n+1}}{2} = \frac{q\ell_{n+1}^2}{4}.$$

$\bar{Y}_2$  – ордината під центром ваги вантажної епюри на епюрі одиничного моменту  $\bar{M}_n$

$$\bar{Y}_2 = \frac{\bar{M}_n}{2}.$$

Підставляючи значення кутів повороту перерізів (6.5-6.8) в рівняння (18.4), маємо

$$\frac{P\ell_n^2 \bar{M}_{n-1}}{8EJ_x} + \frac{P\ell_n^2 \bar{M}_n}{8EJ_x} + \frac{q\ell_{n+1}^3 \bar{M}_{n+1}}{12EJ_x} + \frac{q\ell_{n+1}^3 \bar{M}_n}{12EJ_x} = -(\varphi_P^{\text{лів}} + \varphi_q^{\text{прав}}).$$

$$\frac{P\ell_n^2 \bar{M}_{n-1}}{8EJ_x} + \frac{q\ell_{n+1}^3 \bar{M}_{n+1}}{12EJ_x} + \frac{\bar{M}_n(3P\ell_n^2 + 2q\ell_{n+1}^3)}{24EJ_x} = -(\varphi_P^{\text{лів}} + \varphi_q^{\text{прав}})$$

$$\begin{aligned} 3\bar{M}_{n-1}P\ell_n^2 + 2\bar{M}_{n+1}q\ell_{n+1}^3 + \bar{M}_n(3P\ell_n^2 + 2q\ell_{n+1}^3) = \\ = -24EJ_x(\varphi_P^{\text{лів}} + \varphi_q^{\text{прав}}). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Таким чином ми отримали **рівняння трьох моментів**.

Для вирішення задачі з використанням трьох моментів потрібно скласти стільки рівнянь, скільки маємо проміжних опор заданої балки. При цьому один і той же прольот повинен ввійти в рівняння два рази. Розв'язують систему рівнянь методом послідовного виключення невідомих.

Кут повороту опорного перерізу  $n$  лівого прольоту дорівнює поперечній силі, поділеній на жорсткість, для відповідної фіктивної балці:

$$\varphi_n^{\text{лів}} = \frac{Q_n^{\text{лів}}}{EJ_x} = \frac{R_n^{\text{лів}}}{EJ_x}, \quad (6.10)$$

так як поперечна сила  $Q_n^{\text{лів}}$  в опорному перерізі дорівнює опорній реакції фіктивної балки  $R_n^{\text{лів}}$ .

Для правого прольоту кут повороту:

$$\varphi_n^{\text{прав}} = \frac{Q_n^{\text{прав}}}{EJ_x} = \frac{R_n^{\text{прав}}}{EJ_x}. \quad (6.11)$$

Підставимо в рівняння (6.1) замість кутів  $\varphi$  їх вирази з (6.10) і (6.11) та отримаємо

$$\varphi_n^{\text{лів}} + \varphi_n^{\text{прав}} = \frac{Q_n^{\text{лів}}}{EJ_x} + \frac{Q_n^{\text{прав}}}{EJ_x} = \frac{R_n^{\text{лів}}}{EJ_x} + \frac{R_n^{\text{прав}}}{EJ_x} = 0, \quad (6.12)$$

або

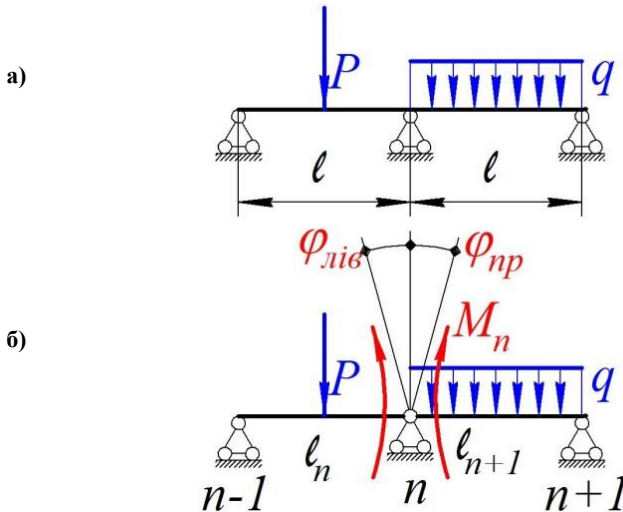
$$R_n^{\text{лів}} + R_n^{\text{прав}} = 0. \quad (6.12')$$

Величини  $R_n^{\text{лів}}$  та  $R_n^{\text{прав}}$  представляють собою реакції на опорі  $n$  лівого і правого прольотів фіктивної балки (Рис. 6.7 і 6.8). таким чином теорема о трьох моментах може бути сформульована так:

**Теорема о фіктивних реакціях:** сума фіктивних реакцій на кожній проміжній опорі повинна дорівнювати нулю.

### 6.3 Окремі випадки застосування рівняння трьох моментів

1. Якщо на крайніх опорах балки відсутні зосереджені моменти, то в рівнянні трьох моментів, моменти на цих опорах будуть нульовими.



а) задана система;

б) еквівалентна система

Рисунок 6.9 – На крайніх опорах балки відсутні зосереджені моменти

Для такої системи рівняння трьох моментів має вигляд:

$$\bar{0}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + 0l_{n+1} = -6EJ_x(\varphi_{лів} + \varphi_{прав}), \quad (6.13)$$

де  $\varphi_{лів}$  – кут нахилу правого торця балки на прольоті  $l_n$  від дії сили  $P$ ;

$\varphi_{прав}$  – кут нахилу лівого торця балки на прольоті  $l_{n+1}$  від дії розподіленого навантаження.

Кут нахилу на прольоті визначають будь-яким відомим методом (Мора або Верещагіна).

2. Якщо балка має консоль з навантаженням, то в еквівалентній системі згинальний момент на цій опорі дорівнює моменту від

навантаження, прикладеного на консолі відносно цієї опори.

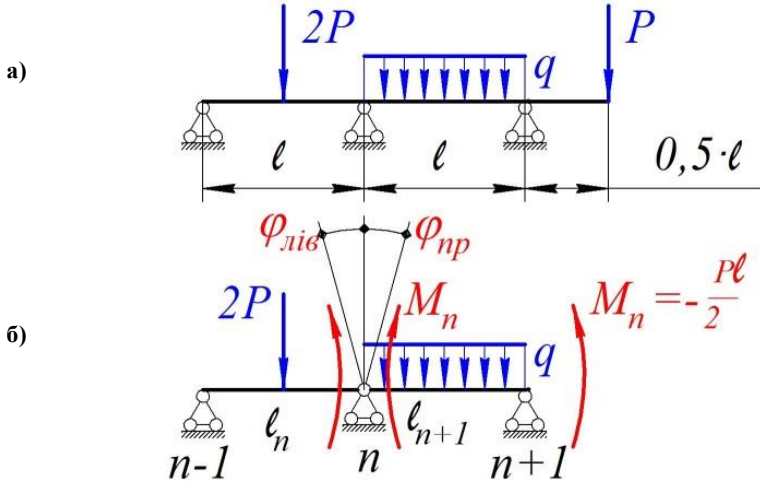


Рисунок 6.10 – Балка має консоль з навантаженням

Рівняння трьох моментів для такої системи має вигляд

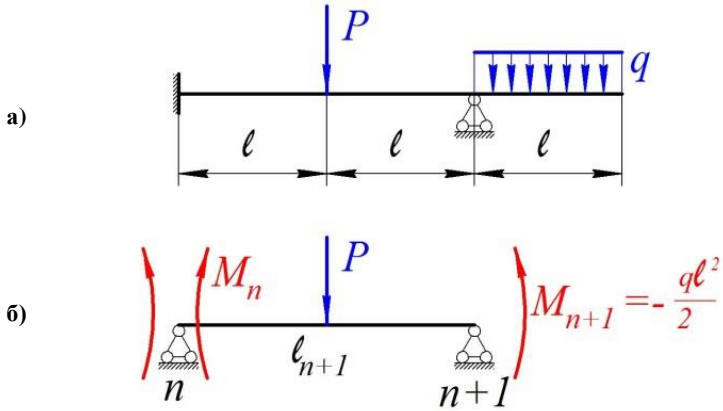
$$\bar{0}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) - \frac{Pl}{2}l_{n+1} = -6EJ_x(\varphi_{\text{лів}} + \varphi_{\text{прав}}). \quad (18.14)$$

3. Якщо кінець балки затиснутий, то затиснення потрібно змінити додатковим прольотом нескінченно малої довжини, або нескінченно великої жорсткості (Рис. 6.11).

Рівняння трьох моментів для таких балок має вигляд

$$\bar{0}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) - \frac{Pl}{2}l_{n+1} = -6EJ_x(\varphi_{\text{лів}} + \varphi_{\text{прав}}), \quad (6.15)$$

де  $l_n$  – фіктивний прольот, на якому  $M_{n-1} = 0$ ,  $M_n = 0$ .



а) задана система;

б) еквівалентна система

Рисунок 6.11 – Балка с затисненим кінцем

**Правило знаків в рівнянні трьох моментів для кута нахилу**  
(Рис. 6.12).

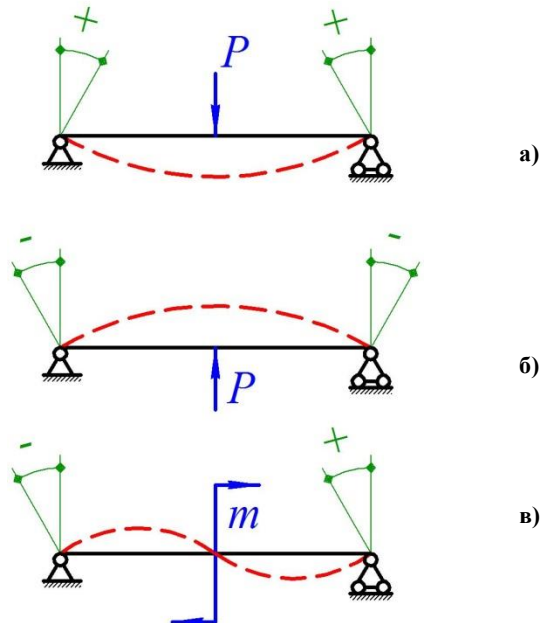


Рисунок 6.12 – Правило знаків для кута нахилу

Якщо кут нахилу іде в середину прольоту, то в рівнянні трьох моментів він додатний (Рис. 6.12, а). Якщо кут нахилу іде за прольот – в рівнянні трьох моментів він від’ємний (Рис. 6.12, б).

Якщо обчислений згинальний момент стискає верхні волокна балок прольоту, то він додатний. Якщо обчислений момент від’ємний, то його потрібно направити так, щоб він стискав нижні волокна балки на прольоті.

Таким чином можна рекомендувати такий **порядок розрахунку нерозрізної балки**:

1. Пронумерувавши опори і прольоти, під заданою балкою зображають еквівалентну систему з урахуванням зауважень в окремих випадках.

2. Складають рівняння трьох моментів для кожних двох суміжних прольотів.

3. Визначають кути нахилу перерізів від зовнішнього навантаження в кожному прольоті і підставляють їх в рівняння трьох моментів.

4. Розв’язуючи рівняння визначають невідомі згинальні моменти на проміжних опорах, де встановлені шарніри, і їх направлення.

5. З урахуванням обчислених згинальних моментів визначають реакції опор і будують епюри  $Q_y$  і  $M_x$  на прольоті, а потім для всієї балки, як суму епюр на прольотах.

## 6.4 Контрольні запитання

1. Що називається нерозрізною багатопрольотною балкою?
2. Чому дорівнює статична невизначуваність нерозрізної балки:
  - а) коли крайня опора – нерухомий шарнір;
  - б) коли крайня опора – жорстке закріплення?
3. Нумерація опор та прольотів в нерозрізній балці.
4. Теорема о фіктивних реакціях.
5. Запишіть рівняння трьох моментів в загальному вигляді.
6. Правило знаків в рівнянні трьох моментів для кута повороту  $\varphi$ .
7. Послідовність розрахунку нерозрізної балки.
8. Формула для визначення статичної невизначуваності балки.



## 7. РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ПРИ ДИНАМІЧНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

Розрахунок на міцність з урахуванням сил інерції доводиться виконувати тоді, коли елементи конструкцій в процесі експлуатації набувають великих прискорень, які спричиняють значні інерційні зусилля.

Загальний метод розрахунку при динамічних навантаженнях базується на **принципі Д'Аламбера**. Згідно цього принципу любе рухоме тіло може бути розглянуто в умові миттєвої рівноваги. Для цього потрібно до діючого зовнішнього навантаження прикласти сили інерції, які рівні добутку маси тіла на його прискорення і направлені в сторону протилежну цього прискорення.

Якщо ж сили інерції невідомі і їх визначення утруднені, то задачі динаміки в цьому випадку вирішуються на основі закону збереження енергії.

### 7.1 Розрахунок на міцність з урахуваннями сил інерції

Нехай будь яке тіло вагою  $Q$  піднімається з прискоренням  $\bar{a}$ , (Рис.7.1 а). Визначити динамічні напруження  $\sigma_{\text{дин}}$  в канаті без урахування вантажу самого каната. На тіло, крім сили ваги  $Q$  діє ще сила інерції  $P_{\text{ін}}$ , яка дорівнює добутку маси тіла на прискорення, тобто  $P_{\text{ін}} = ma = \frac{Q}{g}a$  і направлена в сторону протилежну прискоренню  $\bar{a}$ .

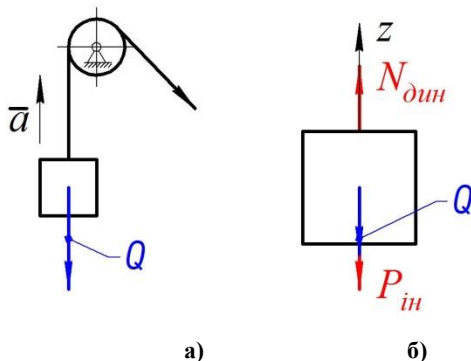


Рисунок 7.1 – Розрахункова схема динамічного навантаження

Зафіксуємо в якусь мить тіло і складемо умову рівноваги (Рис.7.1, б):

$$\sum P_{iz} = 0, \quad N_{\text{дин}} - Q - \frac{Q}{g}a = 0, \quad (7.1)$$

де  $g$  – прискорення вільного падіння;  $g=9,81$  м/с<sup>2</sup>;  $N_{\text{дин}}$  – динамічна реакція в канаті

$$N_{\text{дин}} = Q \left( 1 + \frac{a}{g} \right). \quad (7.2)$$

Але при розтяганні:

$$\sigma_{\text{дин}} = \frac{N_{\text{дин}}}{F}, \quad N_{\text{дин}} = \sigma_{\text{дин}}F. \quad (7.3)$$

Прирівняємо праві частини 7.2 і 7.3, одержимо

$$\sigma_{\text{дин}}F = Q \left( 1 + \frac{a}{g} \right); \quad (7.4)$$

$$\sigma_{\text{дин}} = \frac{Q \left( 1 + \frac{a}{g} \right)}{F} = \frac{Q}{F} \left( 1 + \frac{a}{g} \right). \quad (7.5)$$

При розтяганні

$$\frac{Q}{F} = \sigma_{\text{статичне}} = \sigma_{\text{ст.}}$$

Приймаємо

$$1 + \frac{a}{g} = K_{\text{д.}}$$

**оефіцієнт динамічності.**

Тоді 7.5 переписеться:

$$\sigma_{\text{дин}} = \sigma_{\text{ст}} \cdot K_{\text{д}}. \quad (7.6)$$

Аналогічно можна записати, що

$$\Delta \ell_{\text{дин}} = \Delta \ell_{\text{ст}} \cdot K_{\text{д}}. \quad (7.7)$$

Із формул 7.6, 7.7 можна сказати, що будь-яка шукана **динамічна величина рівна статичній величині помноженій на коефіцієнт динамічності**.

**Під статичною розуміють величину, яку одержують шляхом статичного прикладання навантаження.**

Із формули (7.6) можна записати **умову міцності**,

$$\sigma_{\text{дин}} = \sigma_{\text{ст}} \cdot K_{\text{д}} \leq [\sigma], \quad (7.8)$$

а із формули (7.7) умову **жорсткості відповідно**:

$$\Delta \ell_{\text{дин}} = \Delta \ell_{\text{ст}} \cdot K_{\text{д}} \leq [\Delta \ell]. \quad (7.9)$$

## 7.2 Визначення напружень в кільцях, що обертаються

Розглянемо обчислення напружень в кільці постійного перерізу, що швидко обертається (Рис. 7.2,а). В подібних умовах знаходиться колесо велосипеда або обід маховика, якщо нехтувати впливом спиць.

Кільце вважатимемо тонким, якщо товщина його невелика в порівнянні з радіусом  $r$ . У цьому випадку можна вважати, що всі точки кільця знаходяться на однаковій відстані від осі обертання, яка дорівнює  $D/2$ .

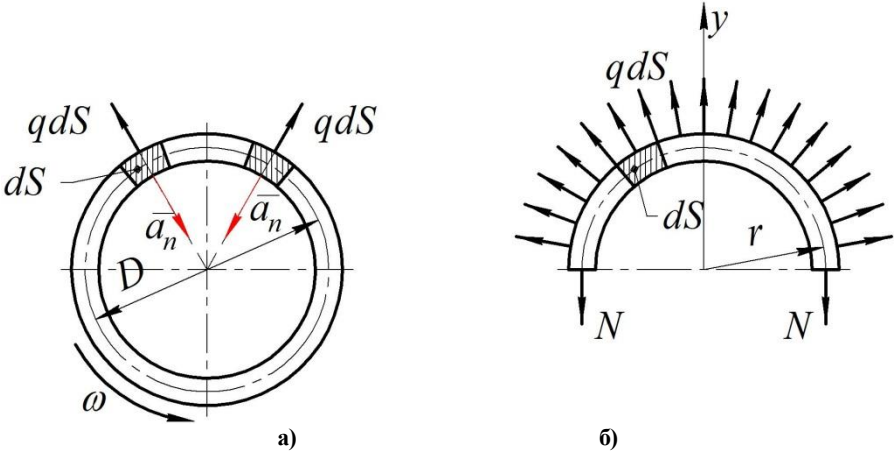


Рисунок 7.2 – Розрахунок кільця при рівномірному обертанні

Позначимо через  $F$  площу поперечного перерізу кільця,  
 $\gamma$  – об'ємна вага матеріалу,  $n$  – кількість обертів за одиницю  
 часу

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}, \left( \frac{1}{\text{сек}} \right) - \text{кутова швидкість обертання.}$$

Виділимо елемент кільця довжиною  $ds$ . При обертанні цей елемент рухається по колу з постійною кутовою швидкістю  $\omega$ . Кутове прискорення  $\varepsilon$  дорівнює нулю. Тому тангенціальне прискорення елемента дорівнює нулю:

$$a_\tau = \varepsilon \cdot \frac{D}{2} = 0,$$

нормальне (доцентрове) прискорення елемента

$$a_n = \frac{\omega^2 \cdot D}{2} = \omega^2 r$$

і напрямлено до центра кільця (Рис. 7.2, а).

На кожний елемент кільця одиничної довжини, діє сила інерції у вигляді відцентрової сили, величина якої (інтенсивність) дорівнює

$$q = \frac{\gamma \cdot F}{g} \cdot \omega^2 \cdot r = ma_n. \quad (7.10)$$

Відцентрові сили направлені вздовж радіуса. Їх дія на кільце аналогічна дії рівномірного внутрішнього тиску інтенсивністю  $q$ . Внаслідок осьової симетрії системи і навантаження в поперечних перерізах згинальні моменти і поперечні сили дорівнюють нулю. Для визначення нормальних зусиль, що діють в поперечних (радіальних) перерізах кільця, розглянемо рівновагу його половини (див. рис. 7.2, б).

**Рівнодіюча розподіленого навантаження** інтенсивністю  $q$  рівна добутку  $q$  на діаметр, перпендикулярна до діаметра і діє за віссю, що проходить через його середину, тобто вздовж  $y$ . Умова рівноваги півкільця набуде вигляду:

$$\sum P_{iy} = 0, \quad 2N - g2r = 0.$$

Звідки

$$N = g \cdot r. \quad (7.11)$$

Нормальні напруження в поперечному перерізі кільця

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{g \cdot r}{F}. \quad (7.12)$$

Підставляючи значення  $q$  з формули (7.10), одержимо:

$$\sigma = \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2, \quad (7.13)$$

або

$$\sigma = \frac{\gamma}{g} \left( \frac{\pi \cdot n}{30} \right)^2 r^2. \quad (7.14)$$

Напруження можна виразити через його лінійну швидкість  $v$ . Враховуючи рівняння (7.13), матимемо  $v = \omega \cdot r$ :

$$\sigma = \frac{\gamma}{g} v^2. \quad (7.15)$$

Як видно з формули (7.15), напруження не залежить від площі поперечного перерізу кільця.

Умова міцності кільця, що обертається

$$\sigma = \frac{\gamma}{g} v^2 \leq [\sigma]. \quad (7.16)$$

Визначаємо величину допустимої лінійної швидкості (критичної)

$$v_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{[\sigma]g}{\gamma}}. \quad (7.17)$$

Як видно з формули (7.17), критична швидкість, при якій кільце може руйнуватися, залежить тільки від матеріалу, і не залежить від розмірів кільця.

**Відносне подовження кільця в коловому напрямку рівне**

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma}{E} = \frac{\gamma}{g \cdot E} \omega^2 r^2$$

або

$$\varepsilon_0 = \frac{2\pi r_1 - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{r_1 - r}{r} = \frac{\Delta_r}{r}, \quad (7.18)$$

де  $\Delta_r = r_1 - r$  – зміна розміру кільця в радіальному напрямку.

Таким же є відносне подовження кільця в радіальному напрямку:

$$\varepsilon_r = \frac{r_1 - r}{r} = \frac{\Delta_r}{r}. \quad (7.19)$$

Отже  $\varepsilon_\theta = \varepsilon_r$ .

### 7.3 Розрахунки на міцність прямого обертового стержня

Прямий стержень прямокутного перерізу обертається навколо осі перпендикулярної до осі стержня з постійною кутовою швидкістю  $\omega$ . Потрібно побудувати епюру повздовжніх сил від дії сил інерції.

Сили інерції при обертанні стержня визивають деформацію розтягання. Розглянемо рівновагу елемента  $dz$ , який знаходиться на відстані  $z$  від осі обертання.

$$dN_z = q_{in} dz \quad (7.20)$$

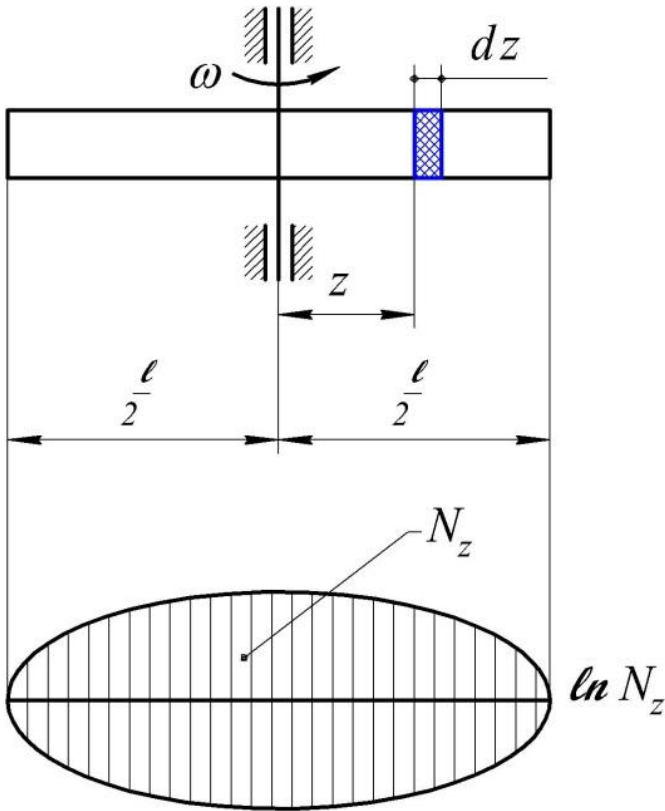


Рисунок 7.3 – Розрахунок на міцність прямого обертового стержня

З урахуванням (7.10 і 7.11), замінивши  $R$  на  $z$  маємо:

$$N_z = \int_z^{\ell/2} \frac{\gamma F \omega^2}{g} z dz = \frac{\gamma F \omega^2 z^2}{2g} \Big|_z^{\ell/2} = \frac{\gamma F \omega^2}{2g} \left[ \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 - z^2 \right].$$

При  $z = 0$

$$N_z = \frac{\gamma F \omega^2 \ell^2}{8g}$$

(на осі обертання).

При  $z = \ell/2$   $N_z = 0$  (на кінці стержня).

Як видно із епюри  $N_z$  подовжні сили розподіляються по закону параболи ( $z^2$ ). Найбільші напруження будуть на осі обертання і дорівнюють:

$$\sigma_{max} = \frac{N_{zmax}}{F} = \frac{\gamma \omega^2 \ell^2}{8g} \leq [\sigma]. \quad (7.21)$$

## 7.4 Контрольні запитання

1. На якому принципі базується метод розрахунку при динамічних навантаженнях?
2. Чому дорівнює коефіцієнт динамічності?
3. Як розраховуються динамічні напруження?
4. Як розраховуються динамічні деформації?
5. Умова міцності при динамічному навантаженні?
6. Умова жорсткості при динамічному навантаженні?
7. Умова міцності кільця, що обертається.
8. Відносне подовження кільця в коловому та радіальному напрямках.
9. Зміна розмірів кільця в радіальному напрямі.



## 8. ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕННЯ І РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ПРИ УДАРНИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

### 8.1 Допущення при ударі

Явище удару має місце тоді, коли швидкість розглядуваного елемента конструкції або стичних з ним частин протягом дуже малого проміжку часу змінюється на скінчену величину. Великі прискорення, які виникають при цьому, призводять до появи значних сил інерції, які діють у напрямі, протилежному напрямку прискорень, тобто у напрямі руху тіла.

На рисунках (Рис. 8.1) наведені різні види ударного навантаження з точки зору деформації: а) – вертикальний або горизонтальний (осьовий), ударне навантаження спричинює деформацію стискання; б) – деформація розтягання від удару; в) – згинальний удар; г) – крутильний удар для ділянки стержня з круговим перерізом і згинальний для стержня з квадратним перерізом.

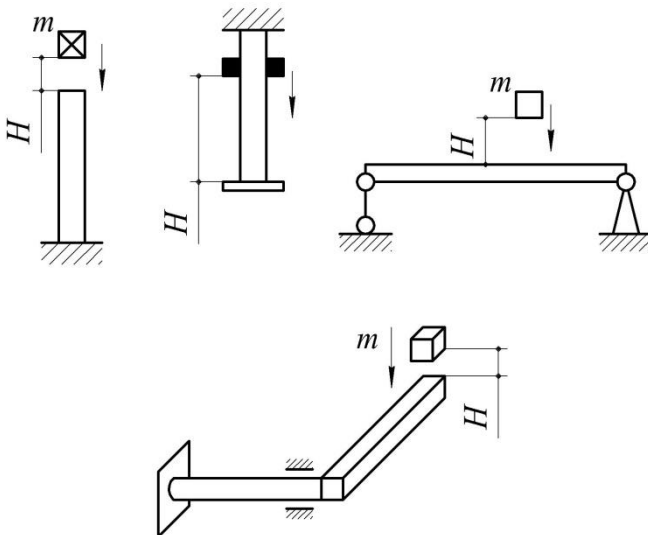


Рисунок 8.1 – Види ударного навантаження

Теорія удару дуже складна, оскільки швидкість елементів конструкцій у продовж малого проміжку часу змінюється від максимальної до нульової. При цьому виникають значні сили інерції, спричинені великими прискореннями (сповільненнями). Час удару невідомий, крім того, виникають пластичні деформації в точці удару, місцеве збільшення температури та інші фактори, врахування яких ускладнює розрахунок.

Таким чином, у зв'язку зі складністю процесів, які відбуваються при ударі, для розрахунку конструкцій користуються так званою **технічною** або **інженерною теорією удару** (запропонованою Т. Юнгом), яка ґрунтується на таких **припущеннях**.

1. При ударі тіла **не відокремлюються одне від іншого**, до розвитку найбільших деформацій. При цьому немає пружних хвиль і пов'язаних з ними відскоків тіла, що ударяє. **Удар вважається непружним**.

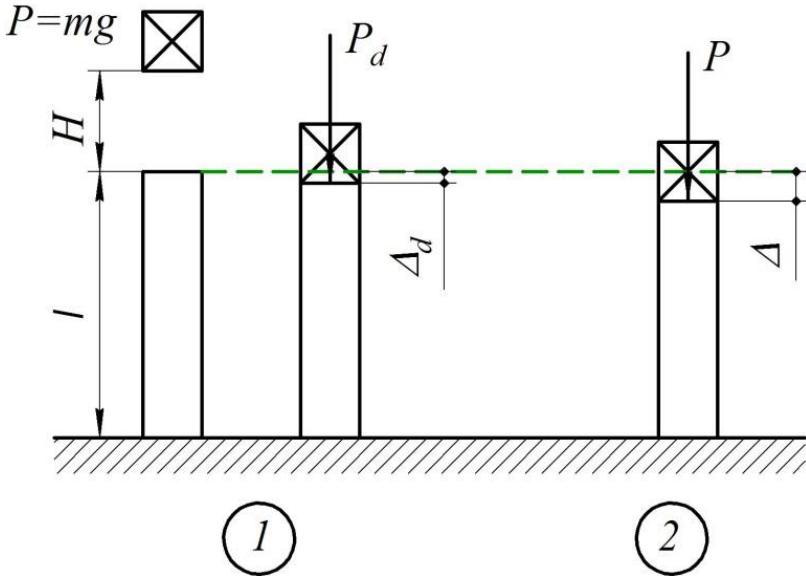
2. За проміжок часу взаємного удару деформації поширюються по всьому об'єму тіла, що зазнає удару, а **залежність між силами та деформаціями, що виникають відповідає закону Гука**.

3. При взаємному ударі рухомих тіл **зменшення кінетичної енергії системи дорівнює збільшенню потенціальної енергії деформації тіл**. При цьому нехтують втратами теплової енергії та енергії на місцеві пластичні деформації, а також інерцією маси тіла, що зазнає удару.

4. Вважається, що система тіл при ударі має один ступінь вільності, тобто **положення системи визначається одною координатою**.

## 8.2 Напруження при ударі. Умова міцності

Формули для визначення динамічних напружень та деформацій при осьовому ударі будемо виводити на прикладі системи (Рис. 8.2), що складається з вертикально розміщеного пружного призматичного стержня з жорсткістю при розтяганні (стисканні)  $c = EF/\ell$ , на торець якого з висоти  $H$  вільно падає вантаж  $P$ .



1 – вантаж масою  $m$  падає на конструкцію з висоти  $H$ :

$P$  – вага вантажу;  $P_d$  – динамічна сила;  $\Delta_d$  – динамічне переміщення.

2 – статичне навантаження силою  $P$ :

$P$  – вага вантажу;  $\Delta$  – статичне переміщення.

Рисунок 8.2– Динамічне і статичне навантаження вертикально розташованого стержня

В момент взаємного удару (вірніше, за дуже короткий час) сила  $P_d$ , яка викликана падінням вантажу  $P = mg$  з висоти  $H$ , викликає динамічне скорочення стержня на величину  $\Delta_d$ .

Переміщення при поздовжньому динамічному навантаженні визначається за формулою:

$$\Delta_d = \frac{P_d \ell}{EF} = \frac{P_d}{c}, \quad (8.1)$$

де  $\frac{EF}{\ell}$  – жорсткість стержня при розтяганні-стисканні;

$\ell$  – початкова довжина стержня;

$E$  – модуль Юнга;  $F$  – площа поперечного перерізу.

Якщо вантаж просто покласти на конструкцію, тобто при статичному навантаженні, то переміщення визначається так:

$$\Delta = \frac{P\ell}{E} = \frac{P}{c}, \quad (8.2)$$

Отже,  $P = \Delta \cdot c$ ,  $P_d = \Delta_d \cdot c$ .

Відношення

$$\frac{\Delta_d}{\Delta} = \frac{P_d}{P} = K_d$$

називається **коефіцієнтом динамічності**.

Звідси переміщення при ударі визначається по формулі

$$\Delta_d = \Delta \cdot K_d. \quad (8.3)$$

**Коефіцієнт динамічності** показує, в скільки разів максимальне напруження і деформації при ударі більше відповідного напруження і деформації при статичному навантаженні.

Оскільки в межах закону Гука напруження прямо пропорційно силі, то

$$\frac{\Delta_d}{\Delta} = K_d \rightarrow \sigma_d = K_d \cdot \sigma. \quad (8.4)$$

**Потенціальна енергія деформації при ударі** дорівнює роботі динамічної сили  $P_d$  на динамічному переміщенні  $\Delta_d$  (за формулою Клапейрона):

$$U = \frac{1}{2} P_d \cdot \Delta_d = \frac{1}{2} c \Delta_d^2. \quad (8.5)$$

**Втрачена кінетична енергія падаючого вантажу і деформування стержня** дорівнює:

$$T = mg(H + \Delta_d) = P(H + \Delta_d). \quad (8.6)$$

**Запишемо закон збереження енергії**  $U = T$ , прирівнюючи (8.5) і (8.6)

$$\frac{1}{2} P_d \Delta_d = P(H + \Delta_d),$$

$$\frac{1}{2} C \Delta_d \Delta_d - C \Delta H - C \Delta \Delta_d = 0,$$

$$\Delta_d^2 - 2\Delta \Delta_d - 2\Delta H = 0.$$

Одержали квадратне рівняння відносно  $\Delta_d$ , розв'язок якого:

$$\Delta_d = \Delta \pm \sqrt{\Delta^2 + 2\Delta H} \quad \text{або} \quad \Delta_d = \Delta \left( 1 \pm \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta}} \right).$$

Оскільки з (8.3)  $\Delta_d = \Delta \cdot K_d$ , то

$$K_d = 1 \pm \sqrt{1 + \frac{2H}{\Delta}}. \quad (8.7)$$

**Умова міцності при ударі має вигляд:**

$$\sigma_{dmax} = \sigma_{ст} \cdot K_d \leq [\sigma_d] = \frac{\sigma_T}{n_T}. \quad (8.8)$$

**Коефіцієнт запасу міцності**  $n_T$  можна вибрати таким, як і при статичному навантаженні (1,4...1,6), оскільки динамічність вже відображена у розрахунковій формулі коефіцієнта  $K_d$ . Однак, враховуючи наближеність розглянутого методу розрахунку, цей коефіцієнт приймають дещо більшим  $n_T = 2$ .

### 8.3 Механічні властивості матеріалу при ударі

Для перевірки здатності матеріалу чинити опір ударним навантаженням застосовують особливий вид випробувань ударним згинанням – визначення ударної в'язкості надрізаних зразків. Це випробування здійснюють на маятникових копрах (Рис. 8.3) на зразках матеріалу стандартної форми з надрізом з одного боку.

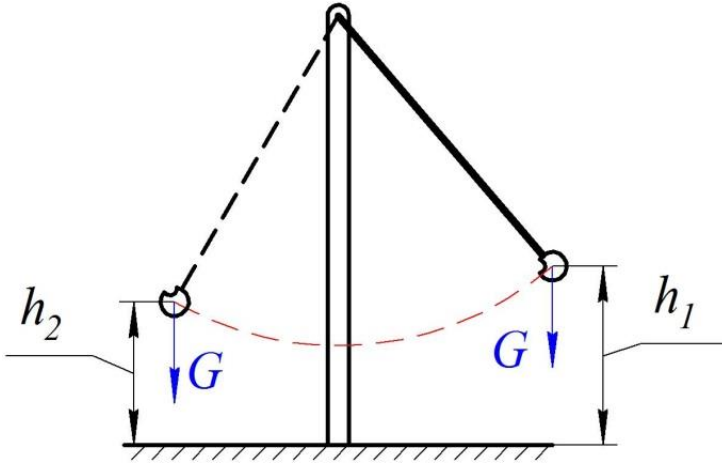


Рисунок 8.3 – Схема копра

Таким чином ударною в'язкістю матеріалу  $KC$  називають роботу, затрачену на руйнування зразку, віднесену до площі його поперечного перерізу в місці надрізу.

$$KC = \frac{A}{F} = \frac{G(h_1 - h_2)}{F}, \quad \text{Дж} \cdot \text{м}^2.$$

Низька ударна в'язкість є підставою для бракування матеріалу, або не застосування його в особливо важливих елементах і спорудах. Ударна в'язкість однієї і тієї сталі залежить від її структури, причому цю залежність при статичних випробуваннях виявити не можливо. При низьких температурах більшість чорних металів стають крихкими, їхня ударна в'язкість також знижується. Для таких металів встановлюють, так звану **критичну температуру, при якій раптово зменшується ударна в'язкість**.

На відміну від інших видів випробування механічних властивостей матеріалу, при випробуванні ударної в'язкості закони подібності не виконуються. Тому випробування повинно проводитися тільки на стандартних зразках, (Рис. 8.4).

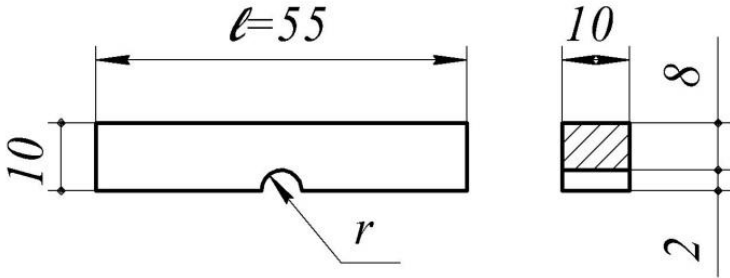


Рисунок 8.4 – Стандартний зразок для випробувань на удар із U-концентратором

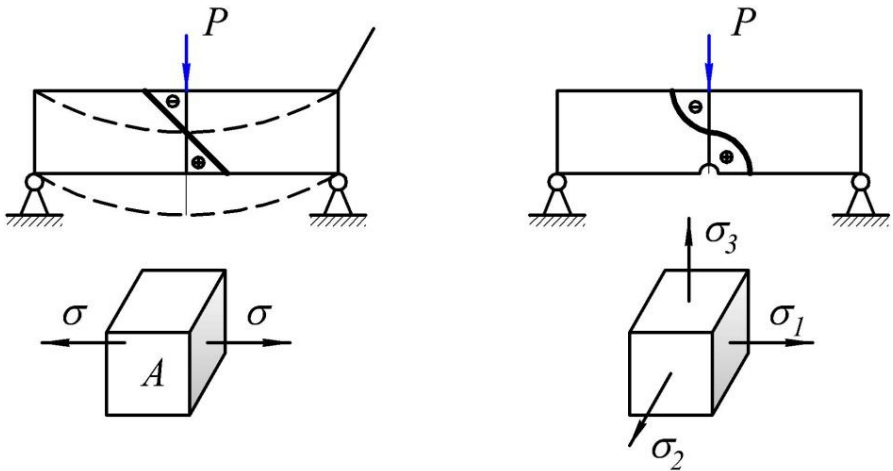
В залежності від виду надрізу розрізняють ударну в'язкість матеріалу:

КСU – з U-образним надрізом радіусом 1 мм;

КСV – з V-образним надрізом;

КСТ – з розвинутою тріщиною.

Надрізи роблять для того, щоб на початку розвитку тріщини в матеріалі був об'ємний напружений стан.



Лінійний напружений стан

Об'ємний напружений стан

Рисунок 8.5 – Лінійний і об'ємний напружені стани

### 8.4 Контрольні запитання

1. У чому полягає явище удару?
2. Види ударного навантаження
3. Які припущення враховуються при розрахунку конструкцій при ударі?
4. Поняття коефіцієнту динамічності?
5. Яким чином обирають коефіцієнт запасу міцності при ударі?
6. Які відрізняють види ударної в'язкості в залежності від виду надрізу?
7. Що називається ударною в'язкістю матеріала?
8. Для яких металів при ударних випробовуваннях визначається критична температура крихкості?



## 9. ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ І РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ПРИ КОЛИВАННЯХ

### 9.1 Коливання: основні поняття

Теорія коливань є обширним розділом сучасної механіки, який охоплює вельми широкий діапазон питань з механіки, електростатики, радіотехніки, оптики та ін. Особливе значення має теорія коливань для прикладних завдань, що зустрічаються в інженерній практиці, зокрема, в питаннях міцності машин і споруд. Відомі випадки, коли будівельна споруда, розрахована з великим запасом міцності на статичне навантаження, руйнувалася під дією порівняно невеликих періодично діючих сил, тоді як така ж легша і на перший погляд менш міцна конструкція сприймає ці зусилля абсолютно спокійно. Тому питання коливань і, взагалі, поведінки пружних систем під дією змінних навантажень вимагають від конструктора особливої уваги.

При вивченні коливань пружні системи заведено розрізняти, перш за все, за **числом ступенів вільності**.

**Під числом ступенів вільності розуміється число незалежних координат, що визначають положення системи.**

Розглянемо декілька систем (Рис. 9.1), які можуть здійснювати коливальні рухи.

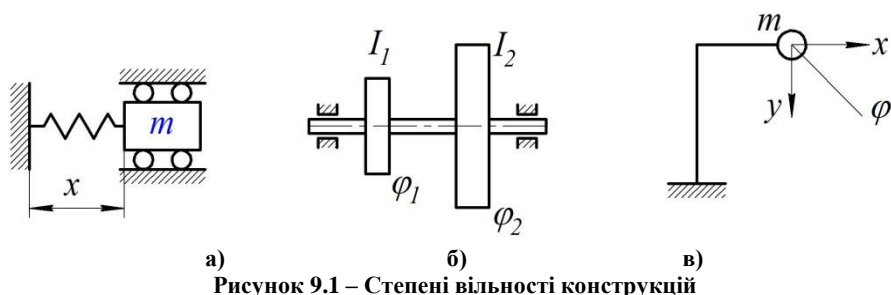


Рисунок 9.1 – Степені вільності конструкцій

Ці системи мають одну, дві (див. рис. 9.1, б) або три степені вільності. Переміщення вантажу  $m$  (див. рис.9.1, а) може бути описане однією координатою  $x$ , отже, система має одну степінь вільності – горизонтальне переміщення.

Обертання вала (див. рис. 9.1, б) і поворот одного шківця щодо іншого можуть бути описані двома координатами – кутами  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$ , тобто система має два степеня вільності.

Положення вантажу  $m$  (див. рис. 9.1, в), що коливається, задається трьома координатами: переміщеннями центра маси  $x$  і  $y$  і кутом повороту  $\varphi$  маси щодо її центра ваги. У разі малого моменту інерції масу  $m$  можна розглядати як точкову, тоді система має всього два степеня вільності.

**Число степенів вільності** визначається вибором розрахункової схеми, тобто залежить від міри наближення, з яким ми вважаємо необхідними досліджувати реальний об'єкт.

При дослідженні пружних **коливальних систем** розрізняють **власні та вимушені коливання, параметричні та автоколивання.**

**Власними (вільними) називаються коливання, що виникають в ізольованій системі унаслідок зовнішнього збудження («поштовху»), що викликає в точок системи початкові відхилення від положення рівноваги або початкові швидкості, і що продовжуються потім завдяки наявності внутрішніх пружних сил.**

**Під вимушеними коливаннями розуміється рух пружної системи, що відбувається під впливом змінних в часі зовнішніх сил.**

Прикладом вимушених коливань є рух, який здійснює пружна система, якщо на ній встановлений не повністю збалансований двигун.

Сила, що діє на пружну систему з боку двигуна, є **збуджуючою силою**. При цьому **частота вимушених коливань** визначається за формулою:

$$\Omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{2\pi n}{60} \left( \frac{\text{рад}}{\text{с}} \text{ або } \text{с}^{-1} \right),$$

де  $n$  – кількість обертів двигуна.

**Проміжок часу між двома подальшими максимальними відхиленнями пружної системи від положення рівноваги, називають періодом (власних або вимушених) коливань (Рис.9.2). Період коливань позначається через  $T$  (с).**

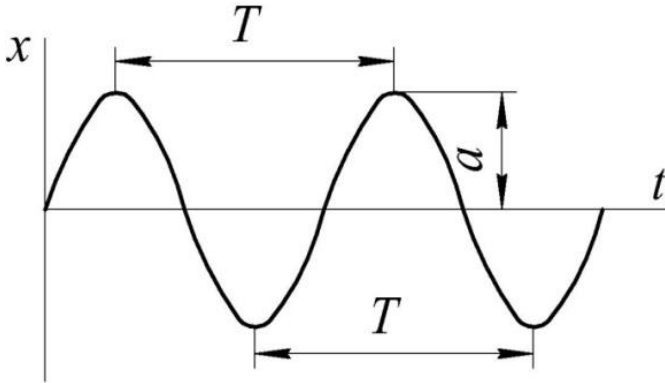


Рисунок 9.2 – Параметри коливань

**Величина, зворотна періоду, називається частотою коливань і дорівнює кількості коливань за одиницю часу:**

$$\nu = \frac{1}{T}, \quad \left(\frac{1}{c}\right).$$

У техніці замість частоти  $\nu$  використовується в більшості випадків **кругова частота  $\omega$** , що є числом коливань за  $2\pi$  секунди:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}, \quad \left(\frac{\text{рад}}{c}\right).$$

**Найбільше відхилення системи від положення рівноваги називається амплітудою  $a$**  (див. рис. 9.2).

На відміну від власних коливань вимушені коливання не затухають, а за умови збігу їх частот амплітуда коливань може значно збільшитися і призвести до руйнування конструкції. Це явище носить назву **резонансу**.

Відомо, що військовим підрозділам під час проходження мостів приписується "збивати ногу" і йти не стройовим, а вільним кроком. Так, 12 квітня 1831 року зруйнувався Бротонський підвісний міст через ріку Ірвелл в Англії, коли по ньому йшов військовий загін. Частота кроків воїнів, що крокували в ногу, збіглася з частотою власних коливань

мосту, через що їх амплітуда стрімко зросла, ланцюги обірвалися, і міст завалився в ріку. Саме цей випадок, у результаті якого два десятки людей було травмовано, сприяв прийняттю в британській армії правила "іти не в ногу" під час проходження військами мостів. З тієї ж причини в 1850 році неподалік від французького міста Анже було зруйновано підвісний ланцюговий міст над рікою Мін довжиною понад сто метрів, що призвело до численних жертв.

Причиною руйнування мостів через резонанс можуть стати не лише пішоходи, але й залізничні потяги. Для виключення резонансу мосту потяг має рухатися або повільно, або на максимальній швидкості (згадайте, як сповільнюють хід потяги метрополітену під час їх руху через міст Метро в Києві). Це зазвичай робиться для виключення збігу частоти ударів коліс по стиках рейок із власною частотою коливань мосту (з цієї ж причини ділянку рейок на мосту часто виконують суцільною, тобто без стиків).

Катастрофічні наслідки для мостів можуть настати також і від впливом вітру. Так, 7 листопада 1940 року через ігнорування дії вітрового навантаження на міст під час його проектування і внаслідок виникнення резонансу зруйнувався Такомський підвісний міст загальною довжиною 1800 м і довжиною центрального прольоту 850 м (США).

З резонансом можна стикнутися не тільки на суші, але й на морі та в повітрі. Так, за деяких частот обертання гребного вала в резонанс входили навіть кораблі. А на зорі розвитку авіації деякі авіаційні двигуни спричинювали настільки сильні резонансні коливання елементів літака, що він повністю руйнувався в повітрі.

Причиною резонансу елементів літальних апаратів та їх руйнування може стати й флатер – поєднання самозбудних незгасаючих згинальних і крутильних автоколивань елементів конструкції (головним чином крила літака або несучого гвинта вертольота). Одним зі шляхів боротьби з цим явищем є використання так званих протифлатерних вантажів.

Цікаво, що кріплення двигунів на пілонах крил літаків – це не примха конструкторів і дизайнерів, а нагальна потреба, оскільки двигуни демпфують коливання крила в польоті повітряного судна, будучи при цьому своєрідним протифлатерним вантажем.

**Параметричними** називають коливання пружної системи, в процесі яких періодично міняються її фізичні параметри (маса, жорсткість, довжина і т.д.).

За виглядом пружних коливань розрізняють **подовжні, поперечні та крутильні** коливання систем, а також їх поєднання.

## 9.2 Вільні (гармонійні) коливання пружної системи з одним ступенем вільності

Розглянемо вільні коливання пружної системи, що складається з маси і пружини (Рис. 9.3). Користуючись принципом Д'Аламбера, привіримо нулю суму проєкцій усіх сил, що діють на вантаж (Рис.9.3, б):

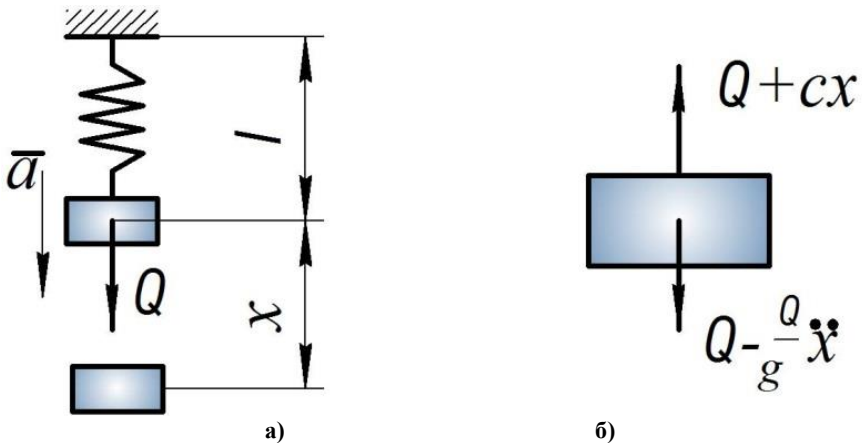


Рисунок 9.3 – Навантаження при вільних коливаннях

$$\sum P_{kx} = 0, \text{ або } Q + cx - \left(Q - \frac{Q}{g}\ddot{x}\right) = 0,$$

звідки

$$\frac{Q}{g}\ddot{x} + cx = 0 \text{ або } m\ddot{x} + cx = 0, \quad (9.1)$$

де

$$\frac{Q}{g} \ddot{x} = m \frac{d^2x}{dt^2} - \text{сила інерції};$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = a - \text{прискорення вантажу};$$

$$m = \frac{Q}{g} - \text{маса вантажу};$$

$cx$  – відновлююча сила;

$c$  – жорсткість пружини (чисельно дорівнює силі, яка спричиняє розтягання пружини на одиницю довжини);

$$c = \frac{EF}{\ell};$$

$t$  – час.

Остаточне диференціальне рівняння вільних коливань вантажу вагою  $Q$  буде мати вигляд:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (9.2)$$

де

$$\omega^2 = \frac{c}{m} = \frac{cg}{Q}, \text{ або}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{EF}{\ell m}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{\text{ст}}}}, \quad (9.4)$$

$\Delta_{\text{ст}} = \frac{Q}{c}$  – статична деформація пружини.

Диференціальне рівняння вільних коливань (9.4) має такий загальний розв'язок, який визначає залежність між вертикальними переміщеннями  $x$  вантажу  $Q$  та часом  $t$ :

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad (9.5)$$

а проекція швидкості вантажу

$$v_x = \dot{x} = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t, \quad (9.5')$$

де  $\omega$  – кругова частота власних коливань;

$A$  та  $B$  – сталі інтегрування, що залежать від початкових умов.

Якщо задані початкова координата вантажу  $x_0$  та початкова швидкість  $v_0 = \dot{x}$  при  $t = 0$ , то з рівнянь (9.5) і (9.5') визначаються сталі інтегрування:

$$A = x_0; \quad B = \frac{v_0}{\omega}.$$

Поклавши

$$x_0 = a \sin \alpha; \quad \text{та} \quad \frac{v_0}{\omega} = a \cos \alpha,$$

рівняння (9.5) можна переписати також у вигляді

$$x = a \sin(\omega t + \alpha),$$

де

$$a = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} - \text{амплітуда коливань};$$

$$\omega t + \alpha - \text{фаза коливань}; \quad \alpha - \text{зсув фази} \left( \operatorname{tg} \alpha = \frac{x_0 \omega}{v_0} \right).$$

Знаючи кругову частоту коливань, можна знайти період коливань  $T$  (час одного повного коливання)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta \ell_{\text{ст}}}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}}. \quad (9.6)$$

### 9.3 Вимушені коливання систем з одним ступенем вільності

**Вимушеними називають коливання пружної системи, які відбуваються при дії на систему (упродовж усього періоду коливань) заданих зовнішніх збуджувальних сил.**

Рівняння цих коливань дістанемо з формули (9.1), додавши до його правої частини збуджувальну силу  $P(t)$ :

$$\frac{Q}{g} \ddot{x} + cx = P(t). \quad (9.7)$$

Поділивши всі члени (21.7) на  $\frac{Q}{g}$ , знаходимо

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{P(t)}{Q}. \quad (9.8)$$

Розглянемо окремий випадок, коли  $P(t) = P_1 \cos pt$ , тобто коли період сили  $T_1 = \frac{2\pi}{p}$ , частота вимушених коливань

$$v_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{p}{2\pi}.$$

Позначивши

$$\frac{P(t)g}{Q} = \frac{g}{Q} P_1 \cos pt = g \cos pt,$$

перепишемо рівняння (21.8) у вигляді

$$\ddot{x} + \omega^2 x = g \cos pt. \quad (9.9)$$

При повільній зміні зовнішньої сили  $P(t)$ , тобто при  $p$  малому порівняно з  $\omega$ , можна знехтувати інерційним членом  $\ddot{x}$  і на підставі (21.9) знайти **статичну деформацію**

$$x_c = \frac{g \cos pt}{\omega^2} \quad (9.10)$$

з амплітудою  $\frac{g}{\omega^2}$ .

Для визначення динамічної деформації треба розв'язати диференціальне рівняння (9.9). Цей розв'язок складається з розв'язку однорідного рівняння (9.1) і розв'язку рівняння (9.9) в формі правої частини:

$$x = x_{\text{од}} + x_{\text{част}} = A \cos \omega t + B \sin \omega t + C \cos pt.$$

Підставляючи частинний розв'язок в (9.1), знайдемо

$$-p^2 C \cos pt + \omega^2 C \cos pt = g \cos pt.$$

Звідси **амплітуда вимушених коливань**



$$C = \frac{g}{\omega^2 - p^2}. \quad (9.11)$$

Тоді загальний розв'язок **рівняння вимушених коливань** (9.9) прийме вигляд

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{g}{\omega^2 - p^2} \cos p t. \quad (9.12)$$

Перші два доданки в (9.12) характеризують власні коливання, які звичайно швидко затухають, останній доданок характеризують вимушені коливання системи, які відбуваються з частотою збуджувальної сили  $P(t)$ .

Амплітуда  $C$  вимушених коливань залежить **від частоти** цих коливань  $p$ . Відношення амплітуди  $C$  до амплітуди статичної деформації (9.10) визначає **коефіцієнт збільшення коливань  $\beta$** :

$$\beta = \frac{C}{g/\omega^2} = \frac{g}{\omega^2 - p^2} : \frac{g}{\omega^2} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - p^2} = \frac{1}{1 - \frac{p^2}{\omega^2}} \quad (9.13)$$

або

$$\beta = \frac{1}{1 - T_1^2/T^2}, \quad (9.14)$$

де

$$T_1 = \frac{2\pi}{p}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

З формули (21.13) випливає, що при малому відношенні  $\frac{p}{\omega}$  коефіцієнт  $\beta$  близький до одиниці й амплітуди вимушених та статичної деформації відрізняються небагато. Якщо ж частота  $p$  вимушених коливань наближається до частоти  $\omega$  власних коливань системи, амплітуда  $C$  прямує до нескінченності, тобто при  $p/\omega \rightarrow 1$  амплітуда  $C \rightarrow \infty$ . При  $C = \infty$  має місце **стан резонансу**. Відповідна частота збуджувальної сили називається **критичною**.

## 9.4 Явище резонансу і заходи по його запобіганню

**Явище підвищення амплітуди при збігу частот власних коливань і збуджуючої сили носить назву резонансу, а сам збіг частот називається умовою резонансу.**

У практиці інженерних розрахунків на динамічну міцність питання резонансу за своєю значимістю займають одно з перших місць. Річ у тому, що у більшості випадків закони зміни збуджуючих сил носять періодичний характер. Так, наприклад, незбалансовані рухливі частини працюючого двигуна створюють сили, що періодично змінюються. Потяг, що йде шляхом з постійною швидкістю, отримує періодичні поштовхи на стиках рейок. Деталі приладів, встановлених на віброуючій основі (на літаку, автомашині), отримують в процесі роботи поштовхи з частотою основи, яка коливається. У усіх цих випадках виникає питання про те, наскільки небезпечні збудження сили для роботи пружної системи і чи не приведуть вони до її надмірного розгойдування і передчасного руйнування.

Таке завдання вирішується, передусім, шляхом зіставлення частот власних коливань і збуджуючої сили. У разі, якщо ці частоти сильно відрізняються один від одного, можна бути упевненим в тому, що явище резонансу не виникає і умови роботи для пружних елементів є сприятливими. При цьому надається можливим визначити амплітуду вимушених коливань і максимальне значення діючого напруження циклу.

Явище резонансу пов'язане з необмеженим зростанням деформації, котра може призвести до руйнування системи.

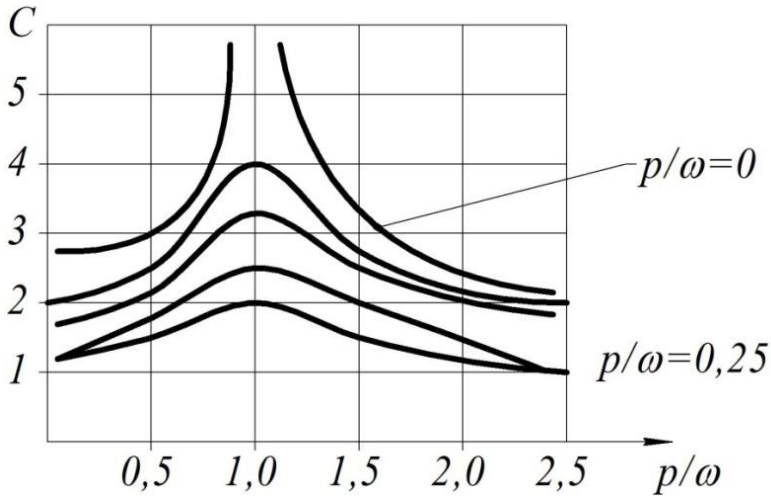


Рисунок 9.4 – Умови резонансу

Із рисунка 9.4 видно, що резонанс настає тоді, коли співпадає частота збуджуючої сили  $p$  і власних коливань  $\omega$  і. при цьому система чинить малий опір коливанням.

Якщо конструкція за розрахунками працює в навіколорезонансній зоні і маємо наступні відношення

$$\frac{p}{\omega} \leq 0,7 \text{ або } \frac{p}{\omega} \geq 1,3,$$

то від резонансу йдуть шляхом зміни жорсткості конструкції. Так, наприклад, жорсткість вала можна змінити шляхом збільшення його діаметра або постановки проміжних опор.

## 9.5 Визначення напружень і розрахунки на міцність при коливаннях

Розрахунки на міцність при коливаннях проводять в наступній послідовності:

а) перевіряється відсутність можливого резонансу при роботі конструкції;

б) перевіряється міцність в небезпечних перетинах:

в) в разі, якщо динамічні напруження порівняні зі статичними, система перевіряється на опір втоми.

Якщо коефіцієнт  $\beta$  знайдений, легко визначити напруження в пружних елементах коливальної системи:

$$\sigma_d = \sigma_{ст} \cdot \beta, \quad (9.15)$$

де  $\sigma_{ст}$  – напруження, які виникали б в системі при статичному прикладанні максимального значення збуджуючої сили  $P_{max}$ .

Позначимо  $1 + \frac{P_{max}\beta}{Q} = K_d$  – **коефіцієнт динамічності**, тоді динамічна деформація

$$\delta_d = \delta_{ст} \cdot K_d, \quad (9.16)$$

де  $\delta_{ст}$  – деформація системи при статичному прикладанні сили  $P_{max}$ .

По аналогії (умова міцності при коливаннях):

$$\sigma_{dmax} = \sigma_{ст} \cdot K_d \leq [\sigma]. \quad (9.17)$$

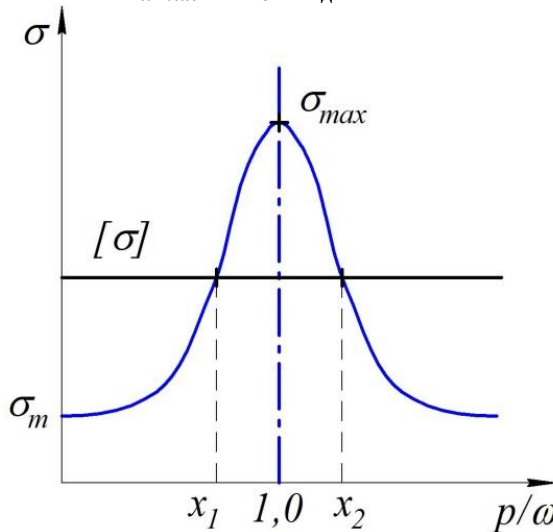


Рисунок 9.5 – Умова міцності при коливаннях

## 9.6 Контрольні запитання

1. Що називається числом ступенів вільності системи?
2. Що називається власними (вільними) коливаннями системи?
3. Що називається вимушеними коливаннями системи?
4. Як визначається частота вимушених коливань?
5. Що називається періодом власних та вимушених коливань?
6. Що називається частотою коливань і чому вона дорівнює?
7. Чому дорівнює кругова частота коливань?
8. Що називається амплітудою коливань?
9. Явище резонансу (навести приклади)?
10. Умови резонансу.
11. Параметричні коливання.
12. Що називається жорсткістю пружини і як вона визначається?
13. Запишіть диференційні рівняння вільних та вимушених коливань.
14. Як визначається амплітуда вимушених коливань?
15. Умови міцності при коливаннях.
16. Динамічні напруження в елементах коливальної системи.

## 10. ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНЬ І РОЗРАХУНКИ НА МІЦНІСТЬ ПРИ ПОВІЛЬНО-ЗМІННИХ НАВАНТАЖЕННЯХ

### 10.1 Явище втомленості матеріалів. Означення

При змінних навантаженнях деталі руйнуються від напружень, що не перевищують границю текучості  $\sigma_T$  матеріалу, не давши, при цьому, помітних залишкових деформацій, навіть тоді, коли матеріал високопластичний. При цьому під дією змінних навантажень елементи конструкцій руйнуються при значно менших навантаженнях, ніж під дією статичних навантажень.

Практикою встановлено: якщо елемент конструкції багаторазово піддавати змінному навантаженню, то після деякої кількості змін (циклів) напружень у ньому з'явиться тріщина, яка поступово буде розвиватися до руйнування деталі.

**Руйнування матеріалу під дією повторно-змінних напружень носить назву руйнування від втомленості.**

**Взагалі ж втомленістю називають явище руйнування внаслідок поступового накопичення в них пошкоджень, що призводять до виникнення тріщини при багаторазовому повторенні навантажень.**

Здатність металів чинити опір руйнування при дії повторно-змінних напружень називається **опором втомленості матеріалу**.

Крім зазначеної гіпотези існує й дещо інший підхід до пояснення фізичної природи явища втомленості. Зокрема, виникнення тріщин від втомленості можна пояснити вичерпанням здатності кристалічних зерен чинити опір зсуву.

Інтенсивного розвитку дослідження втоми матеріалів набули у 1945–1960-х роках у зв'язку з втомними поломками авіаційних конструкцій, насамперед які мали катастрофічні наслідки (катастрофи перших реактивних цивільних літаків «Комета», 1954). Тоді ж було детально досліджено закономірності розсіяння даних експериментального визначення границі витривалості та кількості циклів до зруйнування матеріалів і створено методи їх урахування при проектуванні машин і конструкцій, сформульовано основні уявлення

про зруйнування при малоцикловому навантаженні, розвинуто нові підходи щодо оцінки довговічності матеріалів і конструкцій, коли за основу прогнозу руйнування брали не напруження, а деформацію, зокрема її пластичну складову.

Прикладами **аварій від втоми матеріалу** можуть бути Версальська аварія потягу, що повертався до Парижа в травні 1842 року (ведучий локомотив зламав вісь) та аварія напівзанурювальної бурової установки яка перекинулася під час роботи у водах Норвегії у березні 1980 р., загинуло 123 людини.

Отже, механізм утворення тріщини при дії повторно-змінних навантажень дуже складний і на даний час не може вважатись повністю вивченим.

Руйнування від втоми відбувається в залежності від особливості прикладання навантаження:

1) багаторазове прикладання навантаження одного знака, наприклад, періодично змінюваного від нуля до максимуму (Рис. 10.1, а);

2) багаторазове повторення навантаження, що змінюється не тільки за модулем, а й за знаком (знакозмінні навантаження). При цьому розрізняють зміну навантаження за симетричним циклом (Рис. 10.1, б) та за несиметричним (Рис. 10.1, в).

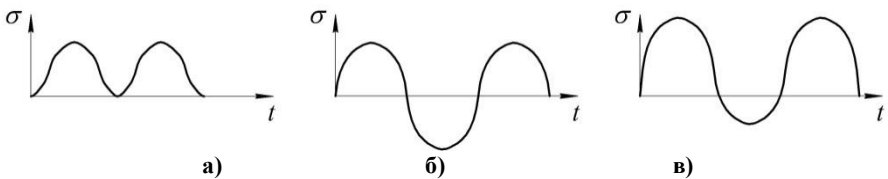


Рисунок 10.1 – Види навантаження

Для руйнування від втоми треба щоб навантаження були не тільки змінні, але й мали певні значення.

**Максимальне напруження, при якому матеріал здатний чинити опір, не руйнуючись, при будь-якій довільно великій кількості повторень змінних напружень, називається границею витривалості (границею втоми).**

Злам деталі від втомленості має характерний вигляд (Рис. 10.2). На ньому майже завжди є дві зони. Одна з них (I) гладенька, притерта, утворена внаслідок поступового розвитку тріщини;

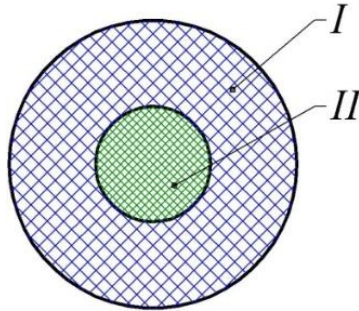


Рисунок 10.2 – Зони зламу деталі від втомленості

Друга (II) – крупнозерниста, що утворилася при остаточному зломі перерізу деталі, ослабленого під час розвивання тріщини. Зона її у крихких матеріалів має крупнокристалічну будову, а у в'язких – волокнисту.

## 10.2 Параметри циклу повторно-змінних напружень

В інженерній практиці припускаються, що напруження в матеріалі при дії повторно-змінних навантажень є періодичними функціями часу  $\sigma = f(t)$  з періодом  $T$ . В цей період напруження характеризуються наступними параметрами,

$\sigma_{max}$  – найбільші напруження циклу;

$\sigma_{min}$  – найменші напруження циклу;

$\sigma_{cp} = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$  – середнє напруження циклу;

$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}$  – амплітудне напруження циклу;

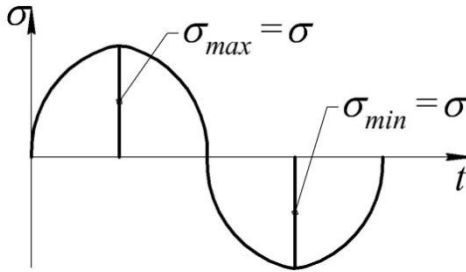
$r = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$  – коефіцієнт асиметрії циклу.

З усіх можливих випадків навантаження матеріалу, що зустрічаються в інженерній практиці розглянемо три випадки навантажень, що називаються циклом напружень.



**Симетричний цикл (найнебезпечніший цикл).**

$$\begin{aligned}\sigma_{max} &= -\sigma_{min} = \sigma_a \\ r &= -\frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = -1 = const \\ \sigma_{cp} &= 0\end{aligned}$$

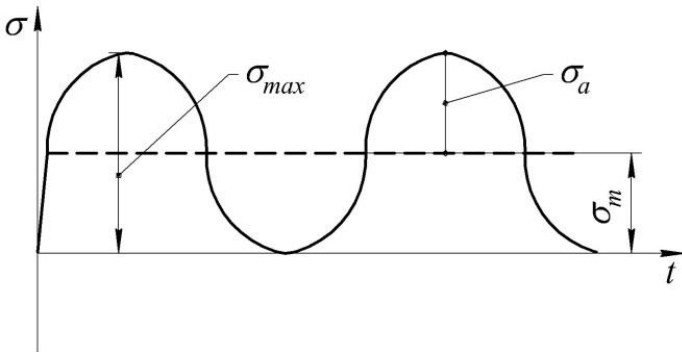


**Рисунок 10.3 – Симетричний цикл напружень**

**Асиметричний цикл.**

Якщо зміна напружень відбувається несиметрично відносно осі часу  $t$ , то такий цикл називають асиметричним.

**Пульсуючий цикл.**



**Рисунок 10.4 – Пульсуючий цикл напружень**

$$\sigma_m = \sigma_{cp} = \frac{\sigma_{max}}{2} \quad \sigma_{min} = 0 \quad r = \frac{0}{\sigma_{max}} = 0 = const.$$

Максимальне напруження, при якому матеріал здатний чинити опір, не руйнуючись, при будь-якій кількості поворотно-змінних навантажень, називають **границею витривалості (границею втомленості)**. Коефіцієнт асиметрії циклу показує при якому циклі навантажень одержали це значення.

Наприклад:

$\sigma_{-1}$  – границя витривалості за нормальними напруженнями при симетричному циклі навантаження.

$\tau_0$  – границя витривалості за дотичними напруженнями при пульсуючому циклі.

$\sigma_{0,3}$  – границя витривалості за нормальними напруженнями для даного матеріалу що одержали при асиметричному циклі з коефіцієнтом асиметрії рівним 0,3, тобто

$$\frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = 0,3 = r.$$

### 10.3 Методи визначення границі втомленості

Границю втомленості того, чи іншого матеріалу, при різних циклах навантажень визначають на випробувальній машині. Відповідно до поставлених вимог обирають потрібну випробувальну машину (Рис. 10.5).

Обробка здобутих експериментальних даних, як правило, супроводжується побудовою кривої втомленості, яку в літературі часто називають **кривою Веллера** (Рис. 10.6). Криву втомленості будують по точках у координатах кількості циклів  $N$  та напруження  $\sigma_{max}$ . На кожену точку беруть 6...12 зразків. Найчастіше це гладенькі циліндричні зразки діаметром 7...10 мм.

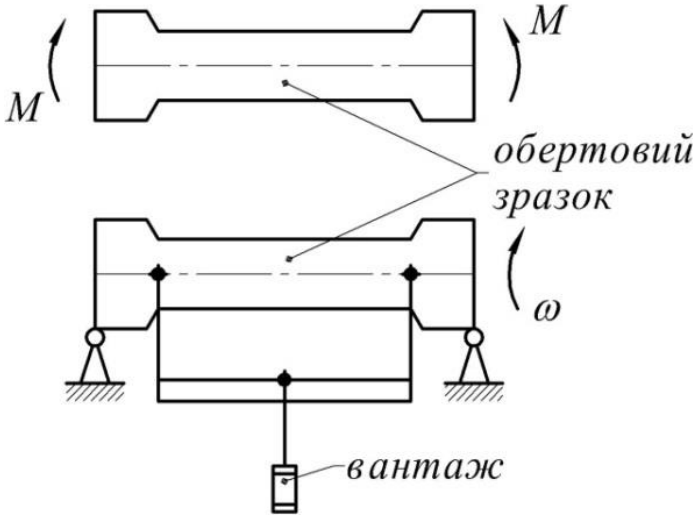


Рисунок 10.5 – Схема випробувальної машини

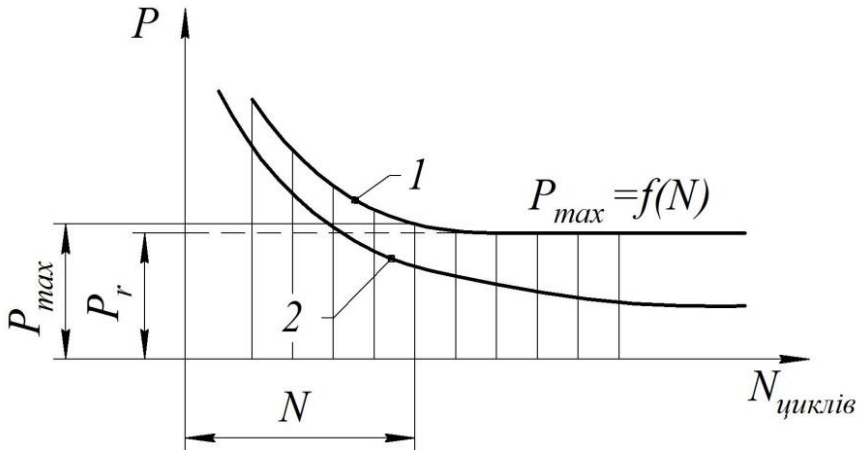


Рисунок 10.6 – Криві втомленості (криві Веллера)

Наприклад для сталі, при високому рівні напружень крива втомленості різко падає (верхня крива, рис. 10.6). Із зниженням напружень, нахил зменшується і крива асиметрично наближається до

деякої горизонтальної прямої. Ця пряма відсікає на осі ординат ( $\sigma$ ) відрізок. Цей відрізок ілюструє величину границі витривалості. Ордината точки на якій крива починає збігатися з асимптотою (границею витривалості), відповідає напруженню, при якому зразок не зруйнується. Але при цьому зразок пройде наперед задану кількість циклів, що відповідає, так званій **базі випробувань**  $N_6$ .

Напруження, при якому зразок витримає, не руйнуючись базове число циклів, називають **границею втомленості**, або **границею витривалості**, і позначається  $\sigma_{-1}$ ,  $\sigma_0$ ,  $\tau_r$ .

За базу випробувань, для чорних металів, беруть 10 млн циклів, а для кольорових (міді, алюмінію і т.п.)  $N_6 = 5 \cdot 10^8$  циклів.

Згідно з численними експериментальними даними, для деяких матеріалів можна помітити певні співвідношення між границею витривалості  $\sigma_B$  при різних видах деформації, тобто емпіричні залежності:

$$\begin{aligned} \text{для розтягання – стискання } \sigma_{-1} &= 0,28\sigma_B; \\ \text{для згинання } \sigma_{-1} &= 0,40\sigma_B; \\ \text{для кручення } \sigma_{-1} &= 0,22\sigma_B. \end{aligned} \quad (10.1)$$

Якщо матеріал працює при циклах відмінних від стандартних, то границю витривалості визначають по діаграмам граничних напружень.

Найбільш повною є **діаграма Смита-Хейя**. Однак для їх побудови потрібно багато початкових даних.

## 10.4 Вплив конструктивно-технологічних факторів

На значення границі витривалості зразків або деталей, виготовлених з того чи іншого матеріалу, крім характеристики циклу, впливає ціла низка різних факторів. До них належать форма зразка, розміри, стан поверхні, середовище в якому відбувається випробування, температура випробування, режим циклічного силового впливу (тренування, паузи, перевантаження, частота навантаження, тощо), попередня внутрішня напруженість матеріалу, тощо. Для з'ясування впливу того чи іншого фактора як еталон беруть границю витривалості  $\sigma_{-1}$ , здобуту випробуванням на повітрі при

симетричному циклі партії гладеньких полірованих зразків діаметром 7-10 мм. Тоді вплив різних факторів на опір втомленості можна оцінити відхиленням границі витривалості  $\sigma_{-1}$  еталонних зразків.

### **Вплив концентрації напружень.**

Найбільш важливим фактором, що знижує границю витривалості, є концентрація напружень, що враховується через коефіцієнт концентрації напружень. Розрізняють **теоретичний коефіцієнт концентрації напружень  $\alpha_T$**  і **ефективний, або дійсний коефіцієнт концентрації напружень**, який визначають як відношення границі витривалості гладенького зразка без концентратора  $\sigma_{-1}$  до границі витривалості зразка з концентрацією напружень.

Для нормальних напружень

$$K_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1K}}. \quad (10.2)$$

Для дотичних напружень

$$K_\sigma = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1K}}.$$

$$g_\sigma = \frac{K_\sigma - 1}{\alpha_T - 1}, \quad (10.3)$$

де  $g_\sigma$  – коефіцієнт чутливості матеріалу до концентрації напружень.

Знаючи  $g_\sigma$  можна обчислити  $K_\sigma$ .

$$K_\sigma = 1 + g_\sigma(\alpha_T - 1). \quad (10.4)$$

Значення  $g_\sigma$  є в додатковій літературі і залежить від міцності сталі  $\sigma_B$

$$g = \frac{\sigma_B - 400}{1100} (1 - \beta) + \beta, \quad (10.5)$$

де  $\beta = f(\alpha_T)$  – тобто чим вища міцність сталі, тим вище її чутливість до концентрації напружень. Тому застосування високоміцних сталей при змінних напруженнях не завжди виявляється доцільним. Чутливість методу до концентрації у крупнозернистих сталей менша, ніж у дрібнозернистих

$$g_{\text{стали}} = 0,6 \div 0,8; \quad g_{\text{чавуна}} = 0.$$

### Вплив масштабного фактора на границю витривалості

Чим більше розмір деталі (зразку), тим менше її міцність. Ця обставина роз'яснюється тим, що в більшому об'ємі накопичується більше недосконалостей (газові пари, дислокації та інше). Тому із збільшенням абсолютних розмірів зразка границя витривалості знижується. Відношення границі витривалості деталі розміром  $\frac{d}{\sigma_{-1}}$  до границі витривалості лабораторного зразка подібної конфігурації, що має малі розміри ( $d_0=7...10$  мм)  $\sigma_{-1d_0}$  називають коефіцієнтом впливу абсолютних розмірів перерізу  $\varepsilon_M$ .

$$\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{\sigma_{-1d}}{\sigma_{-1d_0}}. \quad (10.6)$$

**Таблиця 10.1 – Залежності  $\varepsilon_{\text{ср}}$  від діаметру зразку**

$d$ , мм	10	20	30	40	50	60	80	100	150	200
$\varepsilon_{\text{ср}}$	1	0,93	0,87	0,82	0,78	0,75	0,7	0,65	0,58	0,55

На опір втоми впливає також довжина зразків. Однак цей вплив другорядне у порівнянні з впливом абсолютних розмірів поперечного перерізу. Крім того, при наявності концентрації напруг відбувається локалізація місця руйнування по довжині деталі, тому вплив довжини на опір втоми в практичних розрахунках не враховують.

**Основні причини, які призводять до зниження меж витривалості зі збільшенням розмірів деталі, такі:**

1) погіршення якості металу виливки або поковки – **металургійний фактор**. Металургійний фактор пов'язаний з тим, що при збільшенні розмірів виливки або поковки зростає неоднорідність металу, зменшується ступінь уковування, утруднюється якісна термічна обробка і т.д. Це призводить до зниження характеристик механічних властивостей, таких, як  $\sigma_{-1}$ , визначених на стандартних лабораторних зразках, вирізаних з заготовок різних розмірів.

Наприклад, збільшення розмірів сталеві заготовки від 20 – 30 мм до 200 мм призводить до зниження меж міцності на 10 – 15%.

2) вплив термічної і механічної обробки при виготовленні деталей різних розмірів – **технологічний фактор**.

Вплив другого, технологічного, фактора пов'язаний з тим, що при механічній обробці в поверхневому шарі зразків утворюється наклеп, що підвищує межу витривалості. Але вплив цього фактора незначний і може бути усунутий спеціальною технологією виготовлення зразків, що складається в послідовному знятті все більш тонких шарів металу на остаточних проходах при виготовленні або проведенням відпалу в вакуумі.

3) збільшення ймовірності появи небезпечних дефектів і перенапружених зерен, що в зв'язку зі статистичною природою процесу втомного руйнування призводить до збільшення ймовірності руйнування – **статистичний фактор**. Третій, статистичний, фактор пов'язаний зі статистичною природою процесу втомного руйнування. Через різну орієнтацію і обриси зерен, наявності різних фаз, включень, дефектів і т.п. зерна металу напружені неоднаково. Зі збільшенням напруженого об'єму кількість дефектів і небезпечно напружених зерен збільшується, що призводить до збільшення ймовірності руйнування, а, отже, і до фактичного зниження міцності, що впливає з статистичної теорії втомної міцності.

## 10.5 Розрахунки на міцність при повторно-змінних навантаженнях

Розміри поперечного перерізу деталі, які визначили при статичних розрахунках:

$$d = d_0 \sqrt{\frac{|n|}{n}}, \quad (10.7)$$

де  $d_0$  – діаметр, обчислений при статичних розрахунках;

$|n|$  – нормативний запас міцності = 1,4...3,0;

$n$  – дійсний запас міцності, що одержали при статичних розрахунках;

$d$  – уточнений діаметр деталі.

**Визначення коефіцієнтів запасу міцності.**

При статичному розтяганні:

$$\sigma = \frac{N_z}{F} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_T}{n}. \quad (10.8)$$

При повторно-змінному розтяганні:

$$\sigma_a = \frac{N_z}{F} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{-1}}{n_\sigma}. \quad (10.9)$$

де  $n_\sigma$  – коефіцієнт запасу міцності по нормальним напруженням при повторно-змінному навантаженні.

Аналогічно для дотичних напружень:

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\tau_a}. \quad (10.10)$$

**При статичному складному навантаженні.**

Згідно з третьою теорією міцності:

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma], \quad \text{де } \frac{\sigma_T}{\tau_T} = 2, \quad \tau_T = 0,5\sigma_T.$$

Згідно з четвертою теорією міцності:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{екв}}^{\text{IV}} &= \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma], \quad \text{де } \frac{\sigma_T}{\tau_T} = \sqrt{3}. \\ \sigma_{\text{екв}}^{\text{III}} &= \sqrt{\sigma^2 + \left(\frac{\sigma_T}{\tau_T}\right)^2} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_T}{\tau_T}. \end{aligned} \quad (10.11)$$

**При повторно-змінному складному навантаженні:**

$$\sigma = \sqrt{\sigma_a^2 + \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right)^2 \cdot \tau_a^2} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_{-1}}{n}. \quad (10.12)$$



Візьмемо в квадрат праву і ліву частину рівняння (10.12)

$$\sigma_a^2 + \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right)^2 \cdot \tau_a^2 = \frac{\sigma_{-1}^2}{n^2}.$$

Поділимо на  $\sigma_{-1}^2$

$$\frac{\sigma_a^2}{\sigma_{-1}^2} + \frac{\tau_a^2}{\tau_{-1}^2} = \frac{1}{n^2}. \quad (10.13)$$

З урахуванням (10.9) і (10.10), (10.13) перепишеться

$$\frac{1}{n_\sigma^2} + \frac{1}{n_\tau^2} = \frac{1}{n^2}. \quad (10.14)$$

Тоді

$$n = \frac{n_\sigma \cdot n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}}, \quad (10.15)$$

де  $n$  – загальний коефіцієнт запасу міцності, який залежить від матеріалу;

$n = 1,3-1,4$  – для високооднорідних матеріалів;

$n = 1,4-1,7$  – для середньооднорідних матеріалів;

$n = 1,7-3,0$  – якщо низька однорідність матеріалу.

Коефіцієнтом  $n$  в формулі (10.15) можна користуватись, якщо нормальні і дотичні напруження в деталі з'являються одночасно (синхронно). Якщо ж при складному навантаженні нормальні і дотичні напруження з'являються не одночасно, то коефіцієнт запасу міцності визначають окремо по нормальним напруженням, (з урахуванням основних факторів, що впливають на границю витривалості):

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{\sigma_a K_\sigma}{\varepsilon_{II} \varepsilon_\mu} + \sigma_m \psi_\sigma}, \quad (10.16)$$

по дотичним напруженням

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\frac{\tau_a K_\tau}{\varepsilon_{II} \varepsilon_\mu} + \tau_m \psi_\sigma}. \quad (10.17)$$

В формулах 10.16 і 10.17 не враховується вплив температури, агресивності середовища, радіоактивного випромінювання, фактор часу дії напруження та інше.

### **Заходи по підвищенню границі витривалості матеріалу**

Деталі, що працюють при повторно-змінних навантаженнях повинні бути виготовлені з високоякісної дрібнозеренної сталі.

Конструктивно деталь не повинна мати концентраторів напружень.

Для підвищення границі витривалості можна використовувати різні методи механічного та термохімічного зміцнення поверхні деталі. Це – азотування або борування поверхні. Це і обкатка роликками і дробеструймова обробка поверхні.

Деталі, що працюють при повторно-змінних навантаженнях повинні мати чистову обробку поверхні аж до електрополірування. Такими заходами можна підвищити границю витривалості матеріалу і конструкції.

## **10.6 Контрольні запитання**

1. Що називається втомленістю матеріалів?
2. Що називається опором втомленості матеріалів?
3. Що називається границею витривалості (границею втомленості)?
4. Методі підвищення границі втомленості матеріалів.

## 11. КОНТАКТНІ НАПРУЖЕННЯ

### 11.1 Основні поняття

Деформації і напруження, що виникають при взаємному натисканні двох стичних тіл, обмежених криволінійними поверхнями, називають контактними. Внаслідок деформацій у місцях зіткнення елементів конструкцій передача тиску відбувається по дуже малим площадкам. Матеріал поблизу такої площадки, не маючи змоги вільно деформуватися, зазнає об'ємного напруженого стану (Рис. 11.1).

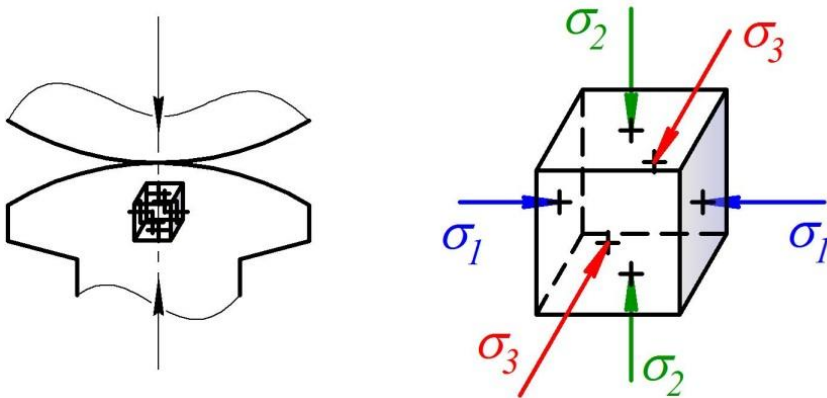


Рисунок 11.1 – Об'ємний напружений стан в зоні контактного навантаження

Досліджувати контактні напруження і деформації потрібно для вирішення питань міцності багатьох важливих деталей. До таких деталей належать, наприклад, шарикові й роликові підшипники, зубчасті колеса, елементи кулачкових механізмів, колеса рухомого складу, рейки, кульові й циліндричні катки тощо.

При стисканні двох тіл, що мають гладку криволінійну поверхню, в зоні контакту відбувається з'єднання точок поверхонь цих тел. В результаті утворюється поверхня, що називається поверхнею тиску (прямою контакту), а її контур – контуром тиску. По поверхні тиску діє стискаюче напруження. Розрахунок загальної міцності тіл в перерізах,

віддалених від місця контакту, ведеться відповідно до принципу Сен-Венана без урахування особливостей розподілу напружень в зоні контакту. Для визначення ж місцевої міцності тіла поблизу від точки зіткнення первинну роль грають закон розподілу напружень в зоні контакту і значення максимального контактного напруження. Матеріал, розташований безпосередньо під зоною контакту, знаходиться в об'ємному напруженому стані, оскільки стискання відбувається у напрямі нормальному до площадки.

Вперше правильний розв'язок основних випадків стискання пружних тіл дано методами теорії пружності в працях німецького фізика Г. Герца.

Нижче наведено деякі результати, здобуті методами теорії пружності при таких припущеннях:

- навантаження спричинюють в зоні контакту тільки пружні деформації, що відповідають закону Гука;
- площадки контакту малі порівняно з поверхнями стичних тіл;
- сили тиску, розподілені по поверхнях контакту, нормальні до цих поверхонь.

## 11.2 Формули для визначення контактних напружень

**Стискання куль.** При взаємному стисканні двох куль, радіуси яких  $R_1$  і  $R_2$  (Рис. 11.2) силами  $P$ , утворюється кругла площадка контакту, радіус якої визначається за формулою

$$a = 0,88 \sqrt[3]{P \frac{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}}, \quad (11.1)$$

де  $E_1$ , і  $E_2$  – модулі пружності матеріалів куль.

Нормальні (стискаючі) напруження на площадці контакту розподілені по півсфері. Найбільше напруження діє в центрі площадки контакту:

$$\begin{aligned}\sigma_3 &= -|\sigma_{max}| = -1,5 \frac{P}{\pi a^2} = \\ &= -0,388 \sqrt[3]{4P \frac{E_1^2 E_2^2}{(E_1 + E_2)^2} \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_1^2 R_2^2}}; \quad (11.2)\end{aligned}$$

два інших головних напруження в центрі площадки

$$\sigma_1 = \sigma_2 \approx -0,8 |\sigma_{max}|.$$

Отже, в найбільш напруженій точці площадки контакту матеріал зазнає напруженого стану, близького до рівномірного стискання. Завдяки цьому в зоні контакту матеріал може витримати без появи залишкових деформацій вельми великий тиск.

Обчислимо, наприклад, напруження в центрі площадки контакту, при якому вперше виникають залишкові деформації. Скористаємося для цього IV теорією міцності:

$$\sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sigma_\tau.$$

Підставивши значення головних напружень, знайдемо

$$0,2\sigma_{max} = \sigma_\tau \text{ або } \sigma_{max} = 5 \sigma_\tau.$$

Для загартованої хромистої сталі, з якої виготовляють шарики підшипники, замість границі текучості візьмемо границю пропорційності  $\sigma_{пц} = 1000$  МПа. Отже,  $\sigma_{max} = 5000$  МПа.

Найбільш небезпечна точка лежить на осі  $z$  на глибині, що приблизно дорівнює половині радіуса площадки контакту. Головні напруження в цій точці

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -0,18\sigma_{max}; \quad \sigma_3 = -0,8\sigma_{max}, \quad (11.3)$$

де  $\sigma_{max}$ - найбільше напруження в центрі площадки контакту, що визначається за формулою (11.2).

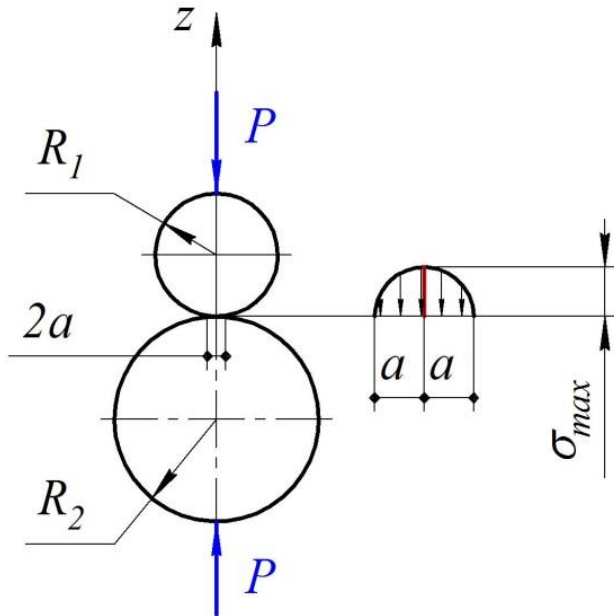


Рисунок 11.2 – Стискання куль

Найбільше дотичне напруження в небезпечній точці

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 0,31\sigma_{max}. \quad (11.4)$$

Змінивши у формулі (11.2) знак при  $R_2$  на протилежний, дістанемо значення  $\sigma_{max}$  у випадку тиску кулі на вогнуту сферичну поверхню (Рис. 11.4):

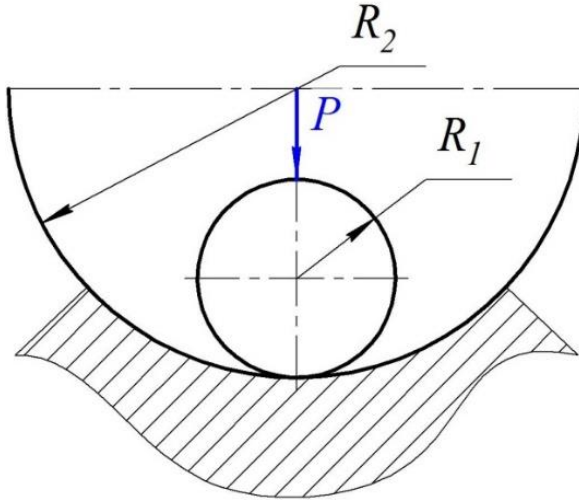


Рисунок 11.3 – Тиск кулі на вогнуту сферичну поверхню

$$\sigma_{max} = 0,388 \sqrt[3]{4P \frac{E_1^2 E_2^2}{(E_1 + E_2)^2} \frac{(R_1 - R_2)^2}{R_1^2 R_2^2}}. \quad (11.5)$$

При взаємному натисканні кулі й площини (Рис.11.4), взявши  $R_2 = \infty$ , знаходимо

$$\sigma_{max} = 0,388 \sqrt[3]{4P \frac{E_1^2 E_2^2}{(E_1 + E_2)^2} \frac{1}{R^2}}. \quad (11.6)$$

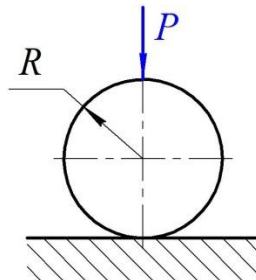


Рисунок 11.4 – Випадок взаємного стиснення кулі і площини

**Стискання циліндрів.** При взаємному натисканні двох циліндрів з паралельними твірними рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивністю  $q$ , Н/м (Рис. 11.5), площадка контакту має вигляд вузького прямокутника, ширина якого визначається за формулою:

$$b = 2,15 \sqrt{q \frac{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}}. \quad (11.7)$$

Найбільше напруження стискання, що діє в точках осі площадки контакту,

$$\sigma_{max} = 1,27 \frac{q}{b} = 0,418 \sqrt{2q \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}}. \quad (11.8)$$

Аналіз напруженого стану свідчить, що небезпечна точка лежить на осі  $z$  на глибині, що дорівнює 0,4 ширини площадки контакту. Головні напруження в цій точці мають такі значення:

$$\sigma_1 = -0,18\sigma_{max}; \quad \sigma_2 = -0,288\sigma_{max}; \quad \sigma_3 = -0,78\sigma_{max}. \quad (11.9)$$



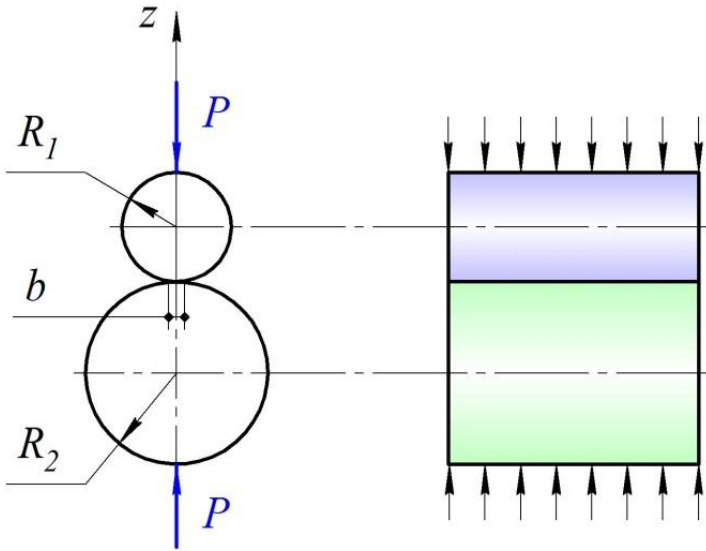


Рисунок 11.5 – Взаємне натискання двох циліндрів з паралельними твірними рівномірно розподіленим навантаженням

Найбільше дотичне напруження в небезпечній точці

$$\tau_{max} = 0,3\sigma_{max}. \quad (11.10)$$

Змінюючи у формулі (11.8) знак при  $R_2$  на протилежний, знайдемо напруження у випадку тиску циліндра на деталь з вогнутою циліндричною поверхнею. Такі напруження діють у місцях контакту циліндричного шарніра та балансирів (Рис. 11.6).

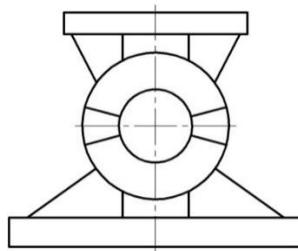


Рисунок 11.6 – Місцях контакту циліндричного шарніра та балансирів

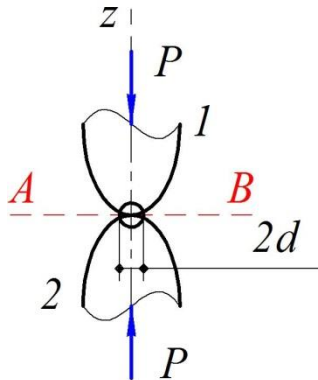
При взаємному тиску циліндра і площини, взявши у формулі  $R_2 = \infty$ , знаходимо

$$\sigma_{max} = 0,418 \sqrt{\frac{2q}{R} \cdot \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}}. \quad (11.11)$$

Наведені вище формули здобуті при  $\mu = 0,3$ . Однак для практичних розрахунків ними можна користуватись і при інших значеннях коефіцієнта Пуассона.

**Загальний випадок контакту двох тіл.** Наведемо формули для загального випадку контакту двох тіл з однакового матеріалу.

Припускається, що обидва тіла в точці дотику мають загальну дотичну площину  $AB$  і загальну нормаль  $z$ , уздовж якої напрямлено силу  $P$  (Рис. 11.7). Нагадаємо, що головними кривинами називають найбільшу і найменшу кривини, розміщені в двох взаємно перпендикулярних площинах, що проходять через центр кривини. Радіуси кривини вважають додатними, якщо центри кривини розміщені усередині тіла. Позначимо через  $\varphi$  кут між головними площинами кривини тіл, в яких лежать менші радіуси.



**Рисунок 11.7 – Випадок контакту двох тіл з однакового матеріалу**

У загальному випадку площадка контакту становить еліпс з півосями:

$$a = \alpha \cdot \sqrt[3]{\frac{3P(1 - \mu^2)}{E \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_1'} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_2'} \right)}}; \quad (11.12)$$

$$b = \beta \cdot \sqrt[3]{\frac{3P(1 - \mu^2)}{E \left( \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_1'} + \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_2'} \right)}}; \quad (11.13)$$

де  $\mu$  – коефіцієнт Пуассона.

Значення коефіцієнтів  $\alpha$  і  $\beta$  наведено в таблиці 11.1 як функції допоміжного кута  $\psi$ , який визначається за формулою:

$$\cos \psi = \frac{\pm \sqrt{\left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_1'} \right)^2 + \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_2'} \right)^2 + 2 \left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_1'} \right) \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_2'} \right) \cos 2\varphi}}{\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_1'} + \frac{1}{\rho_2} + \frac{1}{\rho_2'}}. \quad (11.14)$$

**Таблиця 11.1 – Значення коефіцієнтів  $\alpha$  і  $\beta$**

$\psi, ^\circ$	$\alpha$	$\beta$	$\psi, ^\circ$	$\alpha$	$\beta$
20	3,778	0,408	60	1,486	0,717
30	2,731	0,493	65	1,378	0,759
35	2,397	0,530	70	1,284	0,802
40	2,136	0,567	75	1,202	0,846
45	1,926	0,604	80	1,128	0,893
50	1,754	0,641	85	1,061	0,944
55	1,611	0,678	90	1,000	1,000

Знак чисельника у формулі (11.14) обирають так, щоб  $\cos \psi$  був додатним.

Найбільше напруження стискання в центрі площадки контакту

$$\sigma_{max} = 1,5 \frac{P}{\pi ab}. \quad (11.15)$$

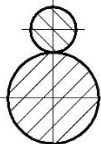
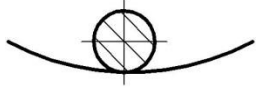
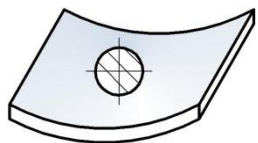
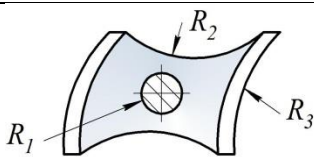
Найбільше дотичне напруження в небезпечній точці майже не залежить від відношення розмірів площадки:

$$\tau_{max} \approx 0,32\sigma_{max} . \quad (11.16)$$

Контактні напруження не залежать від пружних властивостей матеріалів. Зі збільшенням навантаження швидкість наростання напружень зменшується, що обумовлено збільшенням розмірів площадки контакту.

Наведемо також значення максимального напруження стискання для найбільш часто зустрічаються випадків контакту двох тіл (табл. 11.2).

**Таблиця 11.2 – Максимальне напруження стискання для різних випадків контакту**

Форма тіл		$\sigma_{max}$
схема	параметри	
	дві кулі радіусів $R_1$ , $R_2$	$0,388 \sqrt[3]{PE^2 \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_1^2 R_2^2}}$
	куля радіусу $R_1$ у напівсфері радіусу $R_2$	$0,388 \sqrt[3]{PE^2 \frac{(R_2 - R_1)^2}{R_1^2 R_2^2}}$
	куля радіусу $R_1$ у цилін- дричному жолобі радіусу $R_2$	$\alpha \sqrt[3]{PE^2 \frac{(R_2 - R_1)^2}{R_1^2 R_2^2}}$
	підшипник	$\alpha \sqrt[3]{PE^2 \frac{(R_2 - R_1)^2}{R_1^2 R_2^2}}$

З огляду на «м'якість» напруженого стану в небезпечних точках (всі три головних напруження – стискаючі), перевірку міцності при контактних напруженнях варто робити по третій або четвертій теоріях міцності:

$$\begin{aligned} \text{звідки} \quad \sigma_{\text{екв}} &= m\sigma_{\text{max}} \leq [\sigma], \\ \sigma_{\text{max}} &\leq \frac{1}{m}[\sigma] = [\sigma]_{\text{конт}}, \end{aligned} \quad (11.18)$$

де  $m$  – коефіцієнт запасу міцності.

Тут  $[\sigma]_{\text{конт}} = \frac{[\sigma]}{m}$  – допустимі значення, що, для найбільшого напруження в місці контакту.

### 11.3 Умови міцності при контактних напруженнях

Значення коефіцієнту  $m$  залежно від відношення півосей еліптичної площадки контакту й обраної теорії міцності наведені в табл. 11.3. Значення найбільшого допустимого тиску на площадці контакту наведено у табл. 11.4.

**Таблиця 11.3 – Значення коефіцієнту  $m$  залежно від відносин півосей еліптичної площадки контакту й обраної теорії міцності**

$\frac{b}{a}$	$m = \frac{\sigma_{\text{екв III}}}{\sigma_{\text{max}}}$	$m = \frac{\sigma_{\text{екв IV}}}{\sigma_{\text{max}}}$
1 (коло)	0,620	0,620
0,75	0,625	0,617
0,50	0,649	0,611
0,25	0,646	0,587
0 (смуга)	0,600	0,557

Можна рекомендувати наступний порядок розрахунку на міцність елементів конструкції в місцях контакту:

- визначити головні радіуси кривизни контактуючих тіл і кут  $\varphi$  між головними площинами кривизни одного й іншого тіла;
- обчислити по формулах (11.12) і (11.13) з урахуванням формули (11.14) розміри півосей еліптичної площадки контакту;
- визначити по формулі (23.15) найбільше напруження стиску в центрі площадки контакту. У випадку круглої й прямокутної площадок контакту знаходять безпосередньо з формул (11.2) або (11.8), не визначаючи розмірів площадки;
- розрахунок на міцність роблять по формулі (11.18). Значення коефіцієнта  $m$  беруть із табл. 11.3. При цьому рекомендується виходити із четвертої теорії міцності.

**Таблиця 11.4 – Допустимий найбільший тиск на площадці контакту**

Марка металу	Тимчасовий опір, $\sigma_B$ , МПа	Твердість по Брінеллю, НВ	Допустимий найбільший тиск на площадці контакту $[\sigma]_{\text{конт}}$ , МПа
<b>Сталь:</b>			
30	480-600	180	850-1050
40	570-700	200	1000-1350
50	630-800	300	1050-1400
50Г	650-850	240	1100-1450
15Х	620-750	240	1050-1600
20Х	700-850	240	1200-1450
15ХФ	1600-1800	240	1350-1600
ШХ15	–	–	
<b>Чавун:</b>			
СЧ 21		180-207	800-900
СЧ 24		187-217	900-1000
СЧ 28		170-241	1000-1100
СЧ 32		170-241	1100-1200
СЧ 35		197-255	1200-1300
СЧ 38		197-255	1300-1400

### 11.3 Контрольні запитання

1. Що називається контактними деформаціями та напруженнями?  
Наведіть приклади.
2. Умова міцності при контактних напруженнях.

## РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. **Пісаренко, Г.С.** Опір матеріалів [Текст]: підручник / Г.С. Пісаренко, О.Л. Квітка, Л.С. Уманський; за ред. Г.С. Пісаренка. -2 ге вид., допов. і перероб. – К.: Вища шк., 2004. – 655 с.
2. **Беляев, Н.М.** Сопротивление материалов [Текст]: учебник / Н.М. Беляев – М.: Гос.изд. технико-теоретич. лит, 1958. – 856 с.
3. **Гребенников, М.Н.** Геометрические характеристики плоских сечений [Текст]: учеб. пособие / М.Н. Гребенников, Н.И. Пекельный. – Х.: «Нац. аэрокосм. ин-т», 2015. – 92 с.
4. **Феодосьев, В.И.** Сопротивление материалов [Текст]: учеб. для вузов / Феодосьев В.И. – М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 592 с.
5. **Варданян, Г.С.** Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности [Текст]/ Г.С. Варданян, В.И. Андреев, Н.М. Атаров, А.А. Горшков – М.: ИНФРА-М, 2014. – 512 с.
6. **Писаренко, Г.С.** Справочник по сопротивлению материалов [Текст] / Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев – К.: Наук. думка, 1988. – 736 с.
7. **Мельников, О.В.** Опір матеріалів [Текст] / О.В. Мельников - Тернопіль: видавництво „ТДТУ ім. Пулюя”, 2003. – 212 с.
8. **Посацький, С.Л.** Опір матеріалів [Текст] / С.Л. Посацький - Львів: видавництво Львівського університету, 1972. – 403 с.
9. Державний стандарт України документація. Звіти у сфері науки і техніки структура і правила оформлення ДСТУ 3008–95