

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**Національний університет “Запорізька політехніка”**

Омельченко О.С., Скребцов А.А., Штанько П.К.

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**  
**3**  
**ОСНОВ ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ**  
для студентів інженерних спеціальностей усіх форм навчання

**2023**

Конспект лекцій з основ **опору матеріалів**. Конспект лекцій для студентів інженерних спеціальностей усіх форм навчання / Укл.: Омельченко О.С., Скребцов А.А., Штанько П.К., – Запоріжжя: НУ «Запорізька політехніка», 2023. –156 с.

Укладачі: А.А. Скребцов, доцент, канд.техн.наук;  
П.К. Штанько, доцент, канд.техн.наук;  
О.С. Омельченко, ст. викладач.

Рецензент: В.І. Пожусь, професор, д-р фіз-мат.наук

Відповідальний  
за випуск: В.Г. Шевченко, завідувач каф. «Механіка»

Затверджено  
на засіданні кафедри «Механіка»  
Протокол № 5  
від “ 12 ” 12 2022.

Рекомендовано до видання  
НМК ФБАД  
Протокол № 4  
від “ 28 ” 12 2022.

## ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА.....	6
1. ВСТУП. ЗАДАЧІ КУРСУ. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ.....	7
1.1 Наука про опір матеріалів. Об'єкти вивчення.....	7
1.2 Координати та системи координат.....	9
1.3 Класифікація зовнішніх сил.....	11
1.4 Види деформацій стержнів. Поняття про деформований стан.....	12
1.5 Основні гіпотези науки про опір матеріалів.....	15
1.6 Контрольні запитання.....	16
2. ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ.....	17
2.1 Статичні моменти площі. Центр ваги перерізу.....	17
2.2 Моменти інерції плоских фігур.....	20
2.3 Моменти інерції відносно паралельних осей.....	22
2.4 Залежність між моментами інерції при повороті координатних осей.....	23
2.5 Визначення напрямку головних осей інерції. Головні моменти інерції.....	25
2.6 Радіус інерції. Еліпс інерції.....	26
2.7 Моменти опору плоских перерізів.....	28
2.8 Контрольні запитання.....	31
3. ВНУТРІШНІ СИЛИ. МЕТОД ПЕРЕРІЗІВ. НАПРУЖЕННЯ І ВНУТРІШНІ СИЛОВІ ФАКТОРИ.....	32
3.1 Внутрішні сили. Метод перерізів.....	32
3.2 Напруження в перерізі.....	35
3.3 Принцип Сен-Венана.....	37
3.4 Контрольні запитання.....	38
4. РОЗТЯГАННЯ І СТИСКАННЯ.....	39
4.1 Напруження і деформації при розтяганні і стисканні.....	39
4.2 Умова міцності і жорсткості. Допустимі напруження і деформації.....	43
4.3 Урахування власної ваги при розтяганні та стисканні.....	44
4.4 Контрольні запитання.....	46
5. МЕХАНІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРІАЛІВ.....	48

5.1	Випробування матеріалів на розтягання. Види зразків .....	48
5.2	Діаграми розтягання ( $P - \Delta l$ , $\sigma - \varepsilon$ ).....	49
5.3	Поняття про запас міцності.....	53
5.4	Визначення твердості матеріалів.....	54
5.5	Поняття про концентрацію напруження.....	57
5.6	Контрольні запитання.....	58
6.	СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНІ КОНСТРУКЦІЇ.....	60
6.1	Статично невизначувані задачі.....	60
6.2	Розв'язання статично невизначуваних задач.....	61
6.3	Особливості статично невизначуваних систем.....	62
6.4	Контрольні запитання.....	63
7.	ОСНОВИ ТЕОРІЇ НАПРУЖЕНОГО І ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ.....	63
7.1	Напруження в точці.....	63
7.2	Закон парності дотичних напружень. Головні площадки і головні напруження.....	64
7.3	Лінійний напружений стан.....	66
7.4	Плоский напружений стан.....	60
7.5	Пряма задача в плоскому напруженому стані. Круг напружень (круг Мора).....	73
7.6	Зворотна задача в плоскому напруженому стані.....	76
7.7	Об'ємний напружений стан (о.н.с.).....	78
7.8	Деформації при об'ємному напруженому стані. Узагальнений закон Гука.....	79
7.9	Потенціальна енергія деформації.....	83
7.10	Контрольні запитання.....	85
8.	КРИТЕРІЇ МІЦНОСТІ.....	86
8.1	Критерії міцності.....	86
8.2	Поняття про теорію Мора.....	90
8.3	Контрольні запитання.....	91
9.	ЗСУВ.....	92
9.1	Зсув. Розрахунки на зріз.....	92
9.2	Чистий зсув.....	93
9.3	Розрахунок зварних з'єднань.....	98
9.5	Контрольні запитання.....	101
10.	КРУЧЕННЯ.....	102
10.1	Епюри крутильних моментів.....	102
10.2	Напруження і деформації при крученні.	

Умови міцності і жорсткості.....	103
10.2.1 Напруження при крученні.....	1037
10.2.2 Розрахунок трубчатого перерізу (порожнистого валу).....	108
10.2.3 Визначення кута закручування валу круглого перерізу.....	109
10.3 Статично невизначувані задачі при крученні.....	110
10.4 Кручення стержнів некруглого поперечного перерізу.....	111
10.4.1 Стержні прямокутного перерізу.....	116
10.4.2 Стержні відкритого складного профілю.....	117
10.5. Розрахунок гвинтових циліндричних пружин.....	118
10.6 Головні напруження при крученні.....	122
10.7 Контрольні запитання.....	122
11. ЗГИНАННЯ.....	124
11.1 Найпоширеніші види балок і опор.....	124
11.2. Диференційні залежності Д.І. Журавського при згинанні.....	127
11.3 Плоске згинання. Побудова епюр внутрішніх зусиль при плоскому згинанні.....	128
11.3.1 Побудова епюр внутрішніх зусиль при згинанні.....	129
11.4 Розрахунок на міцність та жорсткість при згинанні...	130
11.4.1 Визначення нормальних напружень в поперечному перерізі балки при чистому згинанні.....	133
11.4.2 Визначення дотичних напружень при згинанні (формула Д.І. Журавського).....	138
11.4.3 Про раціональну форму перерізів.....	144
11.5 Контрольні запитання.....	145
12. ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕННЯ БАЛКИ.....	146
12.1 Диференційні рівняння зігнутої осі балки.....	146
12.2 Визначення переміщень у балках за методом початкових параметрів.....	148
12.3 Контрольні запитання.....	155
РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА.....	156

## ПЕРЕДМОВА

Опір матеріалів є однією з найважливіших дисциплін, яка формує інженерне мислення студентів механічних та будівельних спеціальностей вищих технічних навчальних закладів і є теоретичним фундаментом їх технічної освіти. Розроблений конспект є актуальним та містить основні положення, визначення, правила, теореми, розрахункові формули та методи опору матеріалів, викладені у конспективній формі відповідно до розділів курсу. Методика виведення розрахункових формул наведена без деталізації проміжних результатів.

Матеріал розбитий на розділи, кожен з яких складається з теоретичної частини та контрольних запитань.

Конспект лекцій призначений для ефективноної самопідготовки студентів при мінімальних витратах часу, для впорядкування та закріплення набутих знань, а також при дистанційній формі навчання. Ефективне застосування наведених у матеріалів базується на загальному попередньому вивченні курсів з вищої математики та теоретичної механіки. Конспект відповідає стандартам освітніх програм по опору матеріалів для студентів механічних спеціальностей та адаптований для освітнього рівня здобувачів.

Конспект створено на підставі сучасних підручників з опору матеріалів.

# 1. ВСТУП. ЗАДАЧІ КУРСУ. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ

## 1.1 Наука про опір матеріалів. Об'єкти вивчення

Опором матеріалів називають науку про інженерні методи розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість елементів машин та споруд.

Під міцністю розуміють здатність конструкції, її частин та деталей витримувати певне навантаження не руйнуючись.

Жорсткість – це здатність конструкції та її елементів протистояти деформуванню (зміюванню форми і розмірів) під дією зовнішніх навантажень.

Стійкістю називають здатність конструкції або її елементів зберігати початкову форму пружної рівноваги.

Опір матеріалів у теоретичній частині базується на теоретичній механіці і математиці, а в експериментальній – на фізиці та матеріалознавстві.

Отже, **опір матеріалів** – це найбільш загальна наука про міцність елементів конструкцій, машин та споруд. Вона тісно стикається з іншими дисциплінами, такими, як будівельна механіка стержневих систем, теорія пружності і теорія пластичності. Основна ж роль у вирішенні задач міцності належить опору матеріалів.

Усю різноманітність видів конструктивних елементів, що застосовуються в конструкціях, спорудах і машинах, можна звести до основних форм: стержні, оболонки, пластини та масивні тіла.

**Стержнем або брусом називається тіло, у якого один розмір (довжина) значно перевищує два інших (поперечних) розміри.** Стержні бувають прямолінійні та криволінійні, як призматичні так і змінного перерізу (Рис. 1.1). Це вали, осі, балки, вантажно–підйомні гаки, кільця ланцюгів тощо.

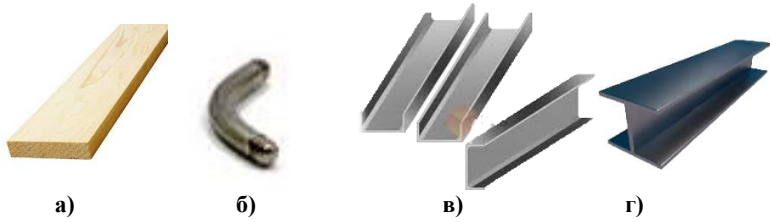


Рисунок 1.1 – Види стержнів

Стержні, товщина стінки яких значно менша від габаритних розмірів поперечного перерізу, називають тонкостінними (Рис. 1.1, г).

Оболонка – це тіло, обмежене криволінійними поверхнями, які розташовані на близькій відстані одна від одної. Поверхня, рівновіддалена від твердих поверхонь оболонки, називається **серединною поверхнею**. За формою серединної поверхні розрізняють оболонки циліндричні (а), конічні (б), сферичні (в) (Рис. 1.2). Якщо серединна поверхня є площиною, то розрахунковий об'єкт називають **пластиною**. Пластини бувають круглі, прямокутні та інших обрисів.

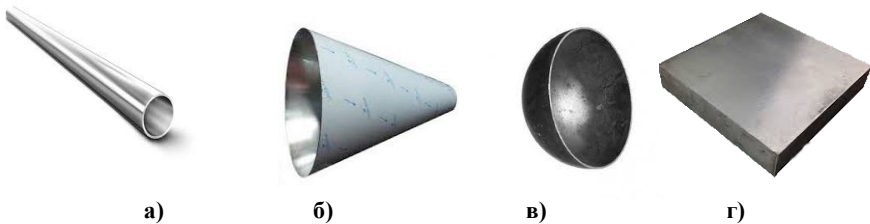


Рисунок 1.2 – Види оболонок

Як приклади можна розглянути резервуари котлів, куполи будинків, обшивки фюзеляжу, крила літака.

**Тіла, в яких усі три розміри одного порядку, називають масивними тілами.** До них належать фундаменти споруд, підпірні стінки, тощо.

Виникнення науки про опір матеріалів пов'язують з ім'ям італійського вченого **Галілео Галілея**, який проводив дослідження щодо вивчення міцності, хоча джерела цієї науки ми бачимо вже в творіннях **Леонардо да Вінчі**.



Швидкий розвиток науки про опір матеріалів почався наприкінці XVIII ст. у зв'язку з бурхливим розвитком промисловості та транспорту.

Проблемами міцності займалися академік Петербурзької академії наук Леонард Ейлер, видатні вчені М.О. Белелюбський, М.Г. Бубнов, А.М. Воропаєв, А.В. Гадолін, Х.С. Головін, Д.І. Журавський, Ф.С. Ясинський та ін.

У XX ст. значну роль у розвитку механіки й поширенні наукових знань у галузі опору матеріалів відіграли підручники видатних учених В.Л. Кирпичова, С.П. Тимошенка, М.М. Беляєва, О.О. Уманського, В.І. Феодосьєва, О.А. Ільюшина, І.А. Біргера та ін.

У 1678 році англійський вчений **Роберт Гук** установив **закон деформування пружних тіл**, за яким деформація пружного тіла пропорційна діючому на нього зусиллю. Цей закон є **основним у теорії опору матеріалів**

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (1.1)$$

## 1.2 Координати та системи координат

**Координатами точки** називаються такі величини, які визначають положення цієї точки (в просторі, на плоскій або кривій поверхні, на прямій або кривій лінії).

**Прямокутна система координат на площині.**

Положення точки на площині визначається двома координатами.

Проводять дві взаємно перпендикулярні прямі  $x'x$  та  $y'y$  (Рис. 1.3). Вони називаються **осями координат**. Одна з них  $x'x$  (частіше горизонтальна) називається **віссю абсцис**, друга  $y'y$  – **віссю ординат**. Точка їх перетину називається початком координат та позначається літерою  $O$ .

Для вимірювання відрізків на осях координат обирають одиниці масштабу (вільно, але однаково для обох осей).

Додатний напрямок на осі позначають стрілкою. Прийнято обирати додатний напрямок таким чином, щоб  $Ox$  після повороту на

90° проти ходу годинникової стрілки сумістився з додатним «+» напрямком  $Oy$ .

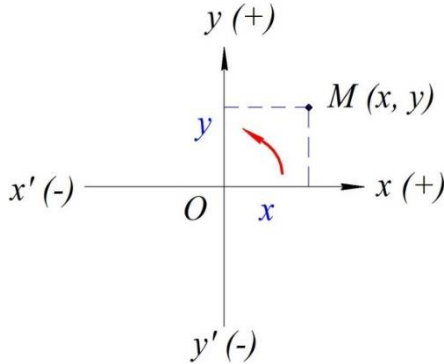
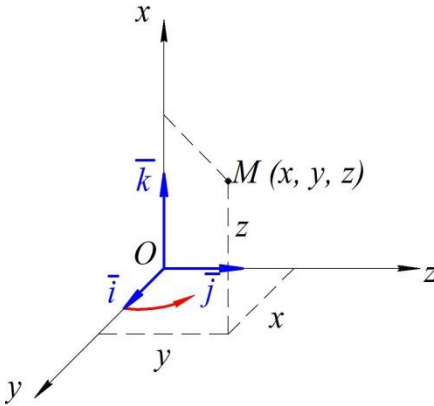


Рисунок 1.3 – Плошка прямокутна система координат

### Прямокутна просторова система координат.

Три взаємно перпендикулярні вісі  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  (Рис. 1.7), які проходять через точку  $O$ , утворюють прямокутну просторову систему координат. Точка  $O$  – **початок координат**, прямі  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  – **осі координат** ( $Ox$  – **ось абсцис**,  $Oy$  – **ось ординат**,  $Oz$  – **ось аплікат**). Масштаб для усіх осей однаковий.



Відклавши на осях у додатному напрямку відрізки  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$ , які дорівнюють одиниці масштабу, отримуємо три вектори  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$ ,  $\bar{k}$ .

Рисунок 1.4 – Прямокутна просторова система координат

Вони називаються **основними векторами або одиничними ортами** (див. рис. 1.4).

Додатні напрями на осях прийнято обирати так, щоб поворот на  $90^\circ$ , який поєднує додатний напрям  $Ox$  з напрямом  $Oy$  (див. рис. 1.4), був проти ходу годинникової стрілки, якщо спостерігати його з боку відрізка  $Oz$ . Така система координат називається **правою**. У лівій системі координат такий поворот здійснюється за годинниковою стрілкою.

### 1.3 Класифікація зовнішніх сил

Сили взаємодії елемента конструкції з середовищем або іншими тілами називають **зовнішніми силами**. Їх класифікують наступним чином.

#### 1. За характером прикладення сил:

- статичні (не приймають участі сили інерції);
- динамічні (приймають участь сили інерції):
  - миттєво прикладені;
  - ударні;
  - повторно – змінні.

#### 2. За зміною у часі:

- постійні;
- змінні;
- на певний час дії.

#### 3. За характером розподілення:

- об'ємні або масові (власна вага, сила інерції);
- поверхневі;
- зосереджені;
- розподілені по поверхні або лінії.

**Рівнодійна розподіленого навантаження чисельно дорівнює площі фігури його епюри та прикладена в центрі ваги цієї фігури** (Рис. 1.5).

$$Q = \frac{1}{2} qH. \quad (1.2)$$

Крім того, бувають навантаження, які можна подати у вигляді

зосередженого моменту (пари сил) з розмірністю (Нм, кНм, МНм).

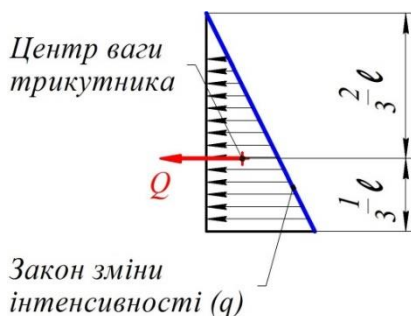


Рисунок 1.5 – Схема визначення рівнодійної розподіленого навантаження

#### 1.4 Види деформацій стержнів. Поняття про деформований стан

Реальні тіла змінюють свою форму і розміри внаслідок навантаження їх зовнішніми силами або зміни температури, тобто **деформуватися**. При деформуванні тіла його точки, а також уявно проведені лінії або перерізи переміщуються в площині або в просторі відносно свого початкового положення.

**Деформації бувають пружні, тобто такі, що зникають після припинення дії сил, які спричинили їх, та пластичні, або залишкові – ті, що не зникають.**

Основним об'єктом, що розглядається в опорі матеріалів, є стержень з **прямолінійною віссю**. В опорі матеріалів вивчають такі **основні види деформацій стержня: розтягання, стискання, зсув (зріз), кручення та згинання.**

Розглядають також більш складні деформації, що є наслідком сполучення кількох основних видів деформації.

**Розтягання (стискання)** виникає тоді, коли до стержня вздовж осі прикладено протилежно спрямовані сили. (Рис.1.6). **Зміну  $\Delta l$  початкової довжини  $l$  стержня називають абсолютним подовженням при розтяганні або абсолютним укороченням при стисканні.**

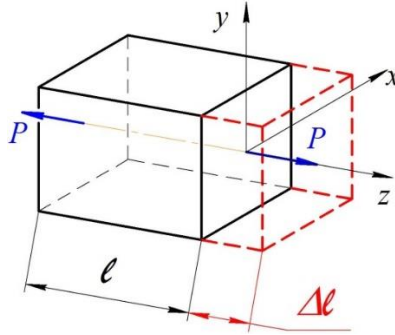


Рисунок 1.6 – Розтягання стержня

Відношення абсолютного подовження (укорочення)  $\Delta l$  до початкової довжини  $l$  стержня називають середнім відносним подовженням (укороченням) по довжині  $l$

$$\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{\Delta l}{l}. \quad (1.3)$$

В умовах розтягання або стискання працюють багато елементів конструкцій: стержні ферми, колони, шток поршневої машини, стяжний болт та ін.

**Зсув або зріз** виникає тоді, коли зовнішні сили зміщують два паралельних плоских перерізи стержня один відносно одного при незмінній відстані між ними (Рис. 1.7, а). Зміщення  $\Delta S$  називається абсолютним зсувом. Для визначення відносного зсуву виділемо елементарний об'єм з розмірами  $a \times a \times a$  (Рис. 1.7, б).

На зсув, або зріз, працюють, наприклад, заклепки і болти, що скріплюють елементи, які зовнішні сили прагнуть зрушити один відносно одного.

Відношення абсолютного зсуву  $\Delta S$  до відстані  $a$  між площинами, що зсуваються (тангенс кута  $\gamma$ ), називають відносним зсувом. Внаслідок малості кута  $\gamma$  його тангенс прирівнюють до значення кута ( $t\gamma \approx \gamma$ ). Отже **відносний зсув**

$$\gamma = \frac{\Delta S}{a}. \quad (1.4)$$

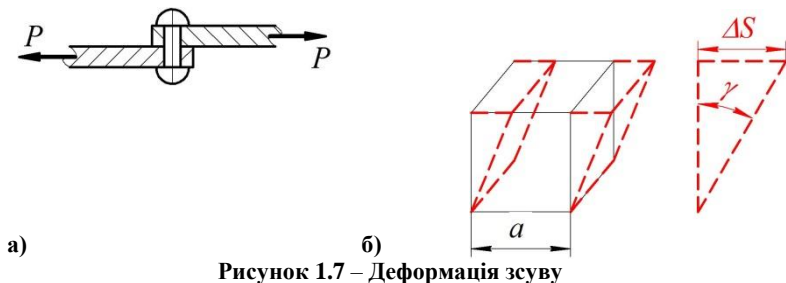


Рисунок 1.7 – Деформація зсуву

Кручення виникає при дії на стержень зовнішніх сил (прикладених по дотичній), які утворюють крутильний момент відносно осі стержня (Рис. 1.8).

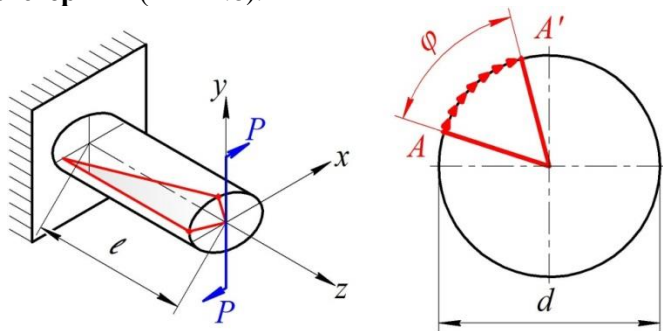


Рисунок 1.8 – Деформація кручення

Деформація кручення супроводжується поворотом поперечних перерізів стержня один відносно одного навколо його осі. Кут  $\varphi$  цього повороту називають **кутом закручування на довжині  $l$** . Відношення кута закручування  $\varphi$  до  $l$  називають **відносним кутом закручування  $\theta$**

$$\theta = \frac{\varphi}{l}. \quad (1.5)$$

На кручення працюють вали, шпинделі токарних і свердлильних верстатів і інші деталі.

**Деформація згинання** полягає у викривленні осі прямого

стержня або в зміні кривизни кривого стержня (Рис. 1.9). У прямих стержнях переміщення точок, які спрямовані перпендикулярно осі, називають прогинами та позначають літерою  $w$ .

$w$  – відстань між осями. При згинанні відбувається поворот перерізів відносно початкового положення. Кути повороту перерізів відносно початкового положення позначають літерою  $\varphi$ .

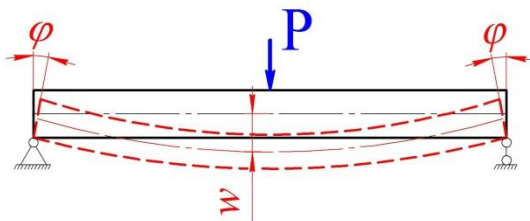


Рисунок 1.9 – Деформація згинання

На згинання працюють балки міжповерхових перекриттів, мостів, осі залізничних вагонів, листові ресори, вали, зуби шестерень, спиці коліс, важелі і багато інших деталей.

Унаслідок одночасної дії на тіло сил, що спричиняють різні види деформації, виникає більш складна деформація, тобто згинання з крученням, або згинання з розтяганням, тощо.

## 1.5 Основні гіпотези науки про опір матеріалів

Для вирішення практичних задач опору матеріалів вводять деякі гіпотези щодо структури й властивостей матеріалів, а також про характер деформації.

**1. Гіпотеза про суцільність матеріалу.** Вважається, що матеріал суцільно заповнює форму тіла. Відсутні внутрішні дефекти (пори, флокени, порожнини, тріщини).

**2. Гіпотеза про однорідність та ізотропність.** Матеріал вважається однорідним та ізотропним, тобто в будь-якому об'ємі та в будь-якому напрямі властивості матеріалу вважаються однаковими (для деталей, виготовлених деформаційною обробкою). Інколи припущення про ізотропію для деяких матеріалів не виконується. Наприклад: деревина, армовані композитні матеріали, тощо.

**3. Гіпотеза про малість деформацій.** Припускається, що деформації малі порівняно з розмірами тіла. Це дає змогу здебільшого нехтувати змінами в розташування зовнішніх сил відносно окремих частин тіла та складати рівняння статички як для недеформованого тіла.

**4. Гіпотеза про ідеальну пружність матеріалу.** Припускається, що всі тіла ідеально пружні. Тіло, яке здобуло деформацію, після усунення причин, що спричиняли її, повністю відновлює свою початкову форму

Прийнявши гіпотези про малість деформацій та про лінійну залежність між деформаціями і зусиллями, можна при розв'язуванні більшості задач опору матеріалів застосовувати **принцип суперпозиції** (принцип незалежності і додавання дії сил). Результати розрахунків добре узгоджуються з даними практики.

Зазначені гіпотези, а також деякі інші (принцип Сен-Венана), розглянуті далі, дозволяють розв'язувати широке коло задач на міцність, жорсткість та стійкість.

## 1.6 Контрольні запитання

1. Що називається опором матеріалів?
2. Поняття міцності, жорсткості та стійкості.
3. Основні види конструкційних елементів.
4. Чим відрізняється права та ліва просторові системи координат?
5. Визначення рівнодійної розподіленого навантаження.
6. Які основні види деформацій викликаються зовнішніми силами?
7. Дайте визначення деформацій розтягання-стискання, кручення, зсуву, згинання і кута закручування.
8. Що називається абсолютним і відносним подовженням (скороченням)?
9. Що називається абсолютним і відносним зсувом?
10. Запишіть формули відносного подовження, зсуву та кута закручування.
11. Основні гіпотези та припущення опору матеріалів.



## 2. ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ

Міцність та жорсткість елементів конструкції визначаються розмірами поперечних перерізів і суттєво залежать від їх форми. Площа поперечного перерізу стержня визначає затрати матеріалу, але не є мірою надійності.

Ці особливості враховуються у формулах опору матеріалів спеціальними характеристиками поперечних перерізів (геометричними характеристиками), що будуть вивчені в цьому розділі. Поперечні перерізи стержнів можна представити як плоскі фігури, та розглядати геометричні характеристики плоских фігур.

### 2.1 Статичні моменти площі. Центр ваги перерізу

Розглянемо довільну фігуру (поперечний переріз стержня), з координатними осями  $x, y$  (Рис. 2.1). Виділимо з цієї фігури площадку з елементарною площею  $dF$  з координатами  $x, y$ . За аналогією з виразом для моменту сили відносно якої-небудь осі (з курсу теоретичної механіки) можна записати вираз і для моменту площі, який називають **статичним моментом**.

Так добуток елементарної площі на відстань  $y$  від осі  $Ox$   $dS_x = ydF$  називається **статичним моментом елементарної площі відносно осі  $Ox$** .

Аналогічно  $dS_y = xdF$ .

Склавши такі добутки по площі  $F$  довільної фігури, отримаємо відповідно статичні моменти відносно осей  $x$  і  $y$ :

$$S_x = \int_F ydF, \quad S_y = \int_F xdF. \quad (2.1)$$

Позначимо  $x_C, y_C$  **координати центра ваги фігури**.

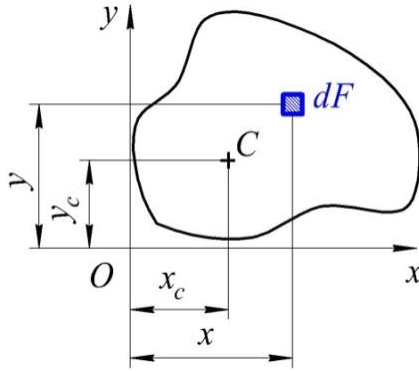


Рисунок 2.1 – Довільна фігура (переріз)

Продовжуючи аналогію з моментами сил, на підставі теореми про момент рівнодійної можна записати:  $S_x = F y_C$ ,  $S_y = F x_C$ , звідси визначити **координати центра ваги**.

$$x_C = \frac{S_y}{F}, \quad y_C = \frac{S_x}{F}, \quad (2.2)$$

де  $F = \sum F_i$  – площа всієї фігури.

При **паралельному переносі осей**  $x_1 = x - a$ ,  $y_1 = y - b$  (Рис. 2.2).

Тоді

$$S_{x_1} = \int_F (y - b) dF, \quad S_{y_1} = \int_F (x - a) dF \quad (2.3)$$

або

$$S_{x_1} = S_x - bF, \quad S_{y_1} = S_y - aF.$$

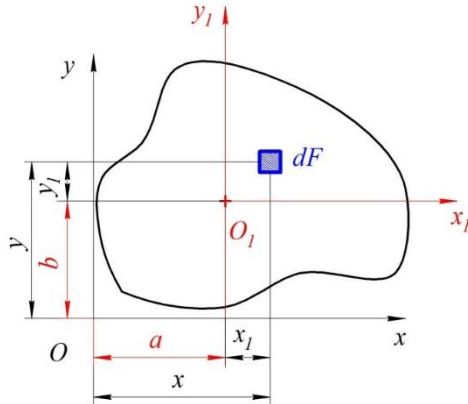


Рисунок 2.2 – Довільна фігура при паралельному переносі осей

Для визначення статичних моментів складної фігури її розбивають на прості частини, для кожної з яких відома площа  $F_i$ , та відоме положення центру ваги  $x_{Ci}$ ,  $y_{Ci}$ . Статичний момент площі всієї фігури відносно даної осі визначається як сума статичних моментів кожної частини:

$$S_x = F_1 \cdot y_{C1} + F_2 \cdot y_{C2} + \dots + F_n \cdot y_{Cn} = \sum_{i=1}^n (F_i \cdot y_{Ci});$$

$$S_y = F_1 \cdot x_{C1} + F_2 \cdot x_{C2} + \dots + F_n \cdot x_{Cn} = \sum_{i=1}^n (F_i \cdot x_{Ci}).$$

За формулами (2.2) легко знайти координати центра ваги фігури:

$$x_c = \frac{S_y}{F} = \frac{1}{\sum F_i} \cdot \sum_{i=1}^n (F_i \cdot x_{Ci});$$

$$y_c = \frac{S_x}{F} = \frac{1}{\sum F_i} \cdot \sum_{i=1}^n (F_i \cdot y_{Ci}).$$

(2.4)

У відповідності до таблиць сортаменту, статичний момент виражається у  $\text{см}^3$ . Визначення статичного моменту важливо для несиметричних фігур тому, що з наведених визначень витікають важливі висновки:

– якщо центр маси фігури збігається з віссю, то статичний момент відносно цієї осі дорівнює нулю; такі осі називають **центральною**;

– якщо фігура має ось симетрії, і ця ось проходить через центр маси, то статичний момент такої фігури дорівнює нулю.

Значення статичних моментів деяких простих фігур наведені в таблиці 2.1.

Для визначення положення центру ваги фігур і тіл складної геометричної форми, їх розкладають на такі частини простої форми (якщо, звичайно, це можливо), для яких положення центрів ваги відомі. Потім визначають положення центру ваги усієї фігури або тіла по формулах (2.4), розуміючи в цих формулах під  $F_i$  площі частин, на які розкладено це тіло, а під  $x_{Ci}$ ,  $y_{Ci}$  – координати центрів ваги цих частин. Потрібно враховувати знаки при додаванні або відніманні статичних моментів та площин.

## 2.2 Моменти інерції плоских фігур

Осьові моменти інерції входять в формулу для напружень та прогинів при згинанні балок. Від моменту інерції перерізу залежить стійкість стиснутого стержня.

**Осьовим моментом інерції** фігури називають інтеграл добутків площ елементарних площадок на квадрати їх відстані від осі, що лежать у площині фігури (Рис. 2.3).

$$\begin{aligned} J_x &= \int_F y^2 dF; \\ J_y &= \int_F x^2 dF; \\ J_\rho &= \int_F \rho^2 dF. \end{aligned} \tag{2.5}$$

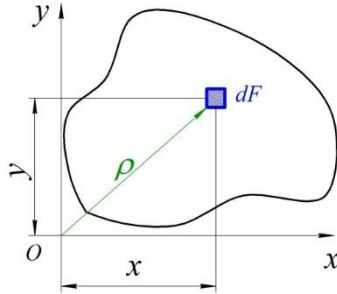


Рисунок 2.3 – Довільна фігура

Полярний момент інерції  $J_\rho$  використовують в формулах для напружень та деформацій при крученні.

**Полярним моментом інерції** площі фігури відносно полюса  $O$  називають інтеграл добутків площ елементарних площадок на квадрати їх відстаней від полюса.

Якщо через полюс проведено систему прямокутних осей, то  $\rho^2 = x^2 + y^2$ , тоді

$$J_\rho = \int_F (x^2 + y^2)dF = \int_F x^2 dF + \int_F y^2 dF = J_y + J_x. \quad (2.6)$$

Значимо, що осьові та полярні моменти інерції можуть набувати лише додатних значень.

**Відцентровим моментом інерції** називають інтеграл добутків площ елементарних площадок на відстані їх від осей  $x$  та  $y$ :

$$J_{xy} = \int_F xy dF. \quad (2.7)$$

Відцентровий момент інерції в залежності від положення осей може бути **додатним** чи **від'ємним** або **дорівнювати нулю**. Очевидно, що при поступовому повороті осей можна знайти таке їх положення, при якому відцентровий момент інерції буде дорівнювати нулю. Такі осі називаються **головними осями інерції**.

Дві взаємно перпендикулярні осі, з яких хоча б одна є віссю симетрії фігури, завжди будуть головними осями інерції, оскільки в

цьому разі кожній додатній величині  $x y dF$  відповідає така сама від'ємна по іншій бік від осі симетрії і сума їх по всій площі фігури дорівнює нулю. Головні осі, що проходять через центр ваги перерізу називають **головними центральними осями**.

При визначенні моментів інерції складних перерізів останні можна розкласти на прості частини, моменти інерції яких відомі. З основної властивості інтеграла суми випливає, що момент інерції складної фігури дорівнює сумі моментів інерції її складових частин.

Одиниці вимірювання моментів інерції –  $\text{см}^4$ .

### 2.3 Моменти інерції відносно паралельних осей

Якщо відомі моменти інерції фігури відносно центральних осей  $x$ ,  $y$  і треба визначити моменти інерції відносно осей паралельних центральним (Рис. 2.4), то враховуючи, що

$x_1 = x + b$  та  $y_1 = y + a$  можемо підставити ці значення та інтегрувати почленно:

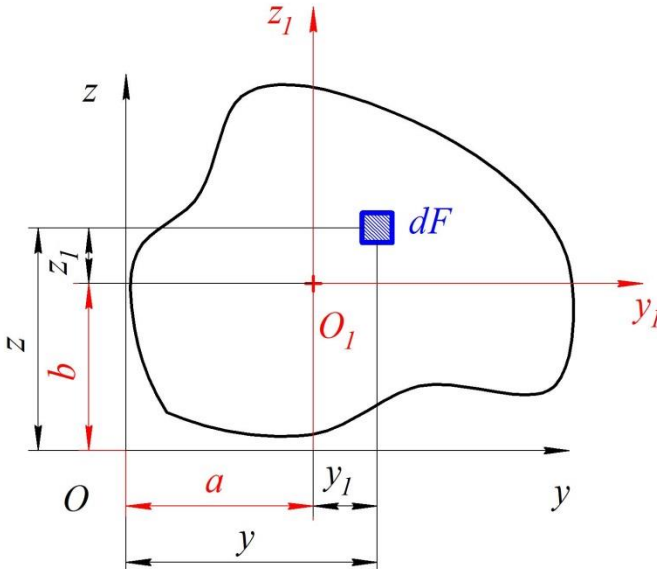


Рисунок 2.4 – Довільна фігура в паралельних осях

$$J_{x_1} = \int_F y_1^2 dF = \int_F (y - b)^2 dF = \int_F y^2 dF + b^2 \int_F dF - 2b \int_F y dF;$$

$$J_{y_1} = \int_F x_1^2 dF = \int_F (x - a)^2 dF = \int_F x^2 dF + a^2 \int_F dF - 2a \int_F x dF;$$

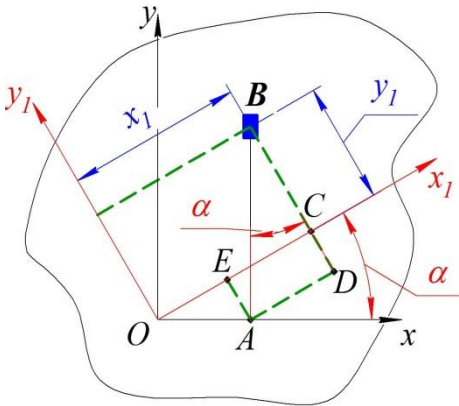
$$\begin{aligned} J_{x_1 y_1} &= \int_F x_1 y_1 dF = \int_F (x - a)(y - b) dF = \\ &= \int_F xy dF + ab \int_F dF + a \int_F x dF - b \int_F y dF. \end{aligned}$$

Інтеграли  $\int_F x dF = S_y$  та  $\int_F y dF = S_x$  дорівнюють нулю як статичні моменти площі відносно центральних осей. Тому отримуємо:

$$J_{x_1} = J_x + b^2 F; \quad J_{y_1} = J_y + a^2 F; \quad J_{x_1 y_1} = J_{xy} + abF. \quad (2.8)$$

## 2.4 Залежність між моментами інерції при повороті координатних осей

Нехай відомі моменти інерції довільної фігури відносно координатних осей  $x, y$  (2.5).



Якщо повернути осі  $x, y$  на кут  $\alpha$  проти годинникової стрілки, вважаючи кут повороту осей в цьому напрямі додатним, можна знайти моменти інерції перерізу відносно повернутих осей  $x_1, y_1$ , виразивши координати довільної елементарної площадки за допомогою тригонометричних функцій (Рис.2.5):

Рисунок 2.5 – Довільна фігура при повороті осей

$$\begin{aligned}x_1 &= OC = OE + AD = x \cdot \cos\alpha + y \cdot \sin\alpha; \\y_1 &= BC = BD - EA = y \cdot \cos\alpha - x \cdot \sin\alpha.\end{aligned}\quad (2.9)$$

Момент інерції перерізу відносно повернутих осей  $x_1y_1$ :

$$J_{x_1} = \int_F y_1^2 dF; \quad J_{y_1} = \int_F x_1^2 dF; \quad J_{x_1y_1} = \int_F x_1y_1 dF. \quad (2.10)$$

Підставив (2.9) у формулу (2.10), отримаємо:

$$\begin{aligned}J_{x_1} &= \int_F (y\cos\alpha - x\sin\alpha)^2 dF = \cos^2\alpha \int_F y^2 dF + \\&\quad + \sin^2\alpha \int_F x^2 dF - \sin 2\alpha \int_F xy dF;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}J_{y_1} &= \int_F (x\cos\alpha - y\sin\alpha)^2 dF = \sin^2\alpha \int_F y^2 dF + \\&\quad + \cos^2\alpha \int_F x^2 dF + \sin 2\alpha \int_F xy dF;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}J_{x_1y_1} &= \int_F (x\cos\alpha + y\sin\alpha)(y\cos\alpha - x\sin\alpha) dF = \\&= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \int_F xy dF + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \left( \int_F y^2 dF - \int_F x^2 dF \right).\end{aligned}$$

Враховуючи формули (2.5), остаточно отримуємо:

$$\left. \begin{aligned}J_{x_1} &= J_x \cos^2\alpha + J_y \sin^2\alpha - J_{xy} \sin 2\alpha; \\J_{y_1} &= J_x \sin^2\alpha + J_y \cos^2\alpha - J_{xy} \sin 2\alpha;\end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

$$J_{x_1y_1} = J_{xy} \cos 2\alpha - \frac{1}{2} (J_y - J_x) \sin 2\alpha. \quad (2.12)$$

Значимо, що ці формули, здобуті при повороті довільної системи прямокутних осей, справедливі й для центральних осей.



Додаючи почленно вирази (2.11), знаходимо:

$$J_{x_1} + J_{y_1} = J_x + J_y = J_\rho. \quad (2.13)$$

Отже, при повороті прямокутних осей сума осьових моментів інерції не змінюється і дорівнює полярному моменту інерції відносно початку координат.

При повороті осей на кут  $\alpha = 90^\circ$

$$J_{x_1} = J_y; \quad J_{y_1} = J_x; \quad J_{x_1 y_1} = -J_{xy}.$$

## 2.5 Визначення напрямку головних осей інерції. Головні моменти інерції

Нагадаємо, що **головні осі** – це такі, відносно яких відцентровий момент дорівнює нулю, а осьові набувають екстремальних значень. Головні центральні осі мають найбільше практичне значення. Позначимо їх літерами  $u$  і  $v$ . Отже,  $J_{uv} = 0$ .

Для визначення положення головних центральних осей плоскої фігури, повернемо початкову систему центральних осей  $xu$  (Рис. 2.6) на деякий кут  $\alpha_0$ , при якому відцентровий момент інерції дорівнює нулю ( $J_{uv} = 0$ ).

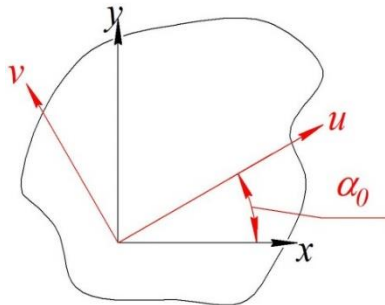


Рисунок 2.6 – Довільна фігура з головними осями

Тоді з формули (2.12) отримаємо:

$$J_{uv} = J_{x_1 y_1} = J_{xy} \cos 2\alpha_0 - \frac{J_y - J_x}{2} \sin 2\alpha_0, \quad (2.14)$$

звідки

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}. \quad (2.15)$$

Отримані з формули (2.15) значення кута  $\alpha_0$  різняться між собою на  $90^\circ$  і дають положення головних осей. Менший з цих кутів не перевершує  $\pi/4$ . Далі користуємось тільки меншим кутом. Проведену під таким кутом (додатним чи від'ємним) головну вісь будемо позначати літерою **u**.

**Головні моменти інерції** можна знайти із загальних формул переходу до повернутих осей (2.11), взявши  $\alpha = \alpha_0$ . Шляхом підставлень та перетворень знаходимо вирази для головних моментів інерції, що не містять тригонометричних функцій:

$$J_u = \frac{1}{2}(J_x + J_y) \pm \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2}; \quad (2.16)$$

$$J_v = \frac{1}{2}(J_x + J_y) \mp \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2}. \quad (2.17)$$

Причому верхні знаки беремо при  $J_x > J_y$ , а нижні при  $J_x < J_y$ .

Отже, формули (2.15), (2.16) і (2.17) дають змогу визначити положення головних осей та головні центральні моменти інерції.

Важливо зазначити, що головні моменти інерції, розраховані по формулам (2.16) і (2.17), мають властивість екстремальності.

## 2.6 Радіус інерції. Еліпс інерції

Момент інерції фігури відносно будь-якої осі можна подати у вигляді добутку площі фігури на квадрат деякої величини, що називають **радіусом інерції**:

$$J_z = \int_F y^2 dF = F i_z^2, \quad (2.18)$$

де  $i_z$  — радіус інерції відносно осі  $z$ . Із виразу (2.18) випливає, що

$$i_z = \sqrt{\frac{J_z}{F}}, \quad i_z^2 = \frac{J_z}{F}. \quad (2.19)$$

Аналогічно **радіус інерції площі перерізу відносно осі  $y$ :**

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}; \quad i_y^2 = \frac{J_y}{F}. \quad (2.20)$$

Головним центральним осям інерції відповідають головні радіуси інерції:

$$i_u = \sqrt{\frac{J_u}{F}}; \quad i_u^2 = \frac{J_u}{F}. \quad (2.20')$$

Поняття еліпса інерції має істотне значення в механіці.

По еліпсу інерції може бути визначений радіус інерції площі щодо будь-яких осей, що проходять через центр еліпса. За допомогою еліпса інерції можна графічно знайти радіус інерції для будь-якої осі.

Побудуємо на головних центральних осях інерції фігури еліпс з півосями, що дорівнюють головним радіусам інерції, причому вздовж осі  $\mathbf{u}$  відкладаємо відрізки  $i_v$ , а вздовж осі  $\mathbf{v}$  відрізки  $i_u$  (Рис. 2.7).

Цей еліпс, називають **еліпсом інерції**. Радіус інерції відносно довільної осі  $\mathbf{u}$  визначається перпендикуляром  $OA$ , поставленим із центра еліпса на дотичну до еліпса, паралельну цій осі.

Для визначення точки дотику досить провести паралельно даній осі  $z$  будь-яку хорду. Точка перетину еліпса з прямою, що з'єднує центр  $O$  із серединою хорди, і є точкою дотику.

Вимірявши потім відрізок  $OA$ , знаходимо момент інерції.

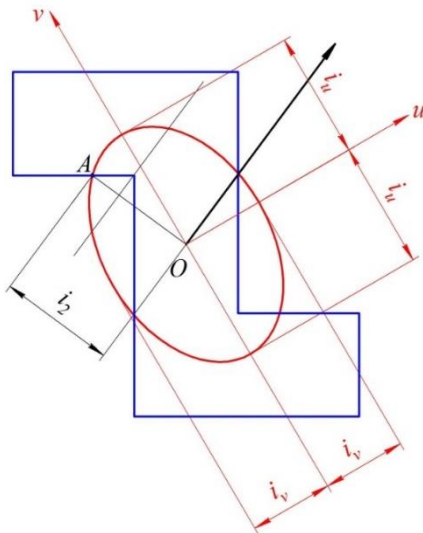


Рисунок 2.7 – Еліпс інерції

Еліпс інерції для центра ваги називається центральним еліпсом.

## 2.7 Моменти опору плоских перерізів

**Момент опору** – геометрична величина, що характеризує опір тіла (стрижня, балки, вала) напруженням залежно від форми і розмірів його поперечного перерізу. Одиниці вимірювання –  $\text{см}^3$ .

**Моменти опору характеризують собою міцність поперечного перерізу.** Момент опору складного поперечного перерізу визначається для всієї фігури в цілому, як відношення головного моменту інерції до відстані від головної осі до найбільш віддаленої точки перерізу.

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}; \quad W_y = \frac{J_y}{x_{\max}}; \quad W_\rho = \frac{J_\rho}{\rho_{\max}}. \quad (2.21)$$

**Моменти опору деяких простих фігур.**

Прямокутник

$$W_x = \frac{bh^2}{6}; \quad W_y = \frac{hb^2}{6}, \text{ см}^3.$$

Трикутник

$$W_{x_c} = \frac{bh^2}{24}, \quad \left( y_{max} = \frac{2}{3}h \right), \text{ см}^3.$$

Коло

$$W_x = \frac{\pi d^2}{32}, \quad W_\rho = \frac{\pi d^3}{16}, \quad \left( \rho_{max} = \frac{d}{2} \right), \text{ см}^3.$$

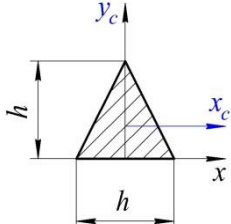
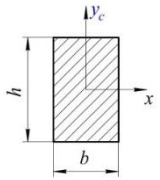
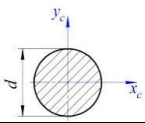
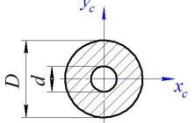
Кільце

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32} (1 - a^4), \quad W_\rho = \frac{\pi d^3}{16} (1 - a^4), \quad \text{см}^3 \left( a = \frac{d}{D} \right).$$

Геометричні характеристики простих фігур наведено в таблиці

2.1

Таблиця 2.1 – Геометричні характеристики простих фігур

Фігура	$S_X$	$S_y$	$J_X$	$J_y$	$J_\rho$	$W_X$	$W_y$	$W_\rho$
	$\frac{bh^2}{6}$		$\frac{bh^3}{36}$	$\frac{hb^3}{48}$		$\frac{bh^2}{24}$	$\frac{hb^2}{6}$	
			$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$		$\frac{bh^2}{6}$	$\frac{hb^2}{6}$	
			$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{32}$	$\frac{\pi d^3}{32}$	$\frac{\pi d^3}{32}$	$\frac{\pi d^3}{16}$
			$\frac{\pi d^4}{64} (1 - a)$	$\frac{\pi d^4}{64} (1 - a)$	$\frac{\pi d^4}{32} (1 - a)$	$\frac{\pi d^3}{32} (1 - a^4)$	$\frac{\pi d^3}{32} (1 - a^4)$	$\frac{\pi d^3}{16} (1 - a^4)$

## 2.8 Контрольні запитання

1. Як визначається статичний момент фігури? Яка розмірність статичного моменту?
2. Формули визначення координати центра ваги фігури.
3. Як визначити координати центру ваги складної фігури?
4. Що називається осьовим, полярним і відцентровим моментами інерції? Яка їхня розмірність?
5. Які з моментів інерції - величини завжди плюсові?
6. Як змінюється відцентровий момент інерції при повороті осей координат на  $90^\circ$ ?
7. Які осі називаються головними центральними осями інерції?
8. Чому вісь симетрії фігури завжди є однією з головних осей інерції?
9. Що таке радіус та еліпс інерції?
10. Що таке момент опору перерізу?
11. Моменти інерції відносно паралельних осей.

### 3. ВНУТРІШНІ СИЛИ. МЕТОД ПЕРЕРІЗІВ. НАПРУЖЕННЯ І ВНУТРІШНІ СИЛОВІ ФАКТОРИ

#### 3.1 Внутрішні сили. Метод перерізів

Між сусідніми частинами тіла (кристалами, молекулами, атомами) завжди є певні сили взаємодії, тобто **внутрішні сили**. В опорі матеріалів не розглядають і не беруть до уваги внутрішні сили, що діють в тілі, яке перебуває в своєму природному (ненавантаженому) стані, а вивчають й визначають тільки ті внутрішні сили, які з'являються внаслідок навантаження тіла. Внутрішні сили часто називають **зусиллями**. Для виявлення, а потім і визначення внутрішніх сил в опорі матеріалів широко застосовують **метод перерізів** (Рис. 3.1).

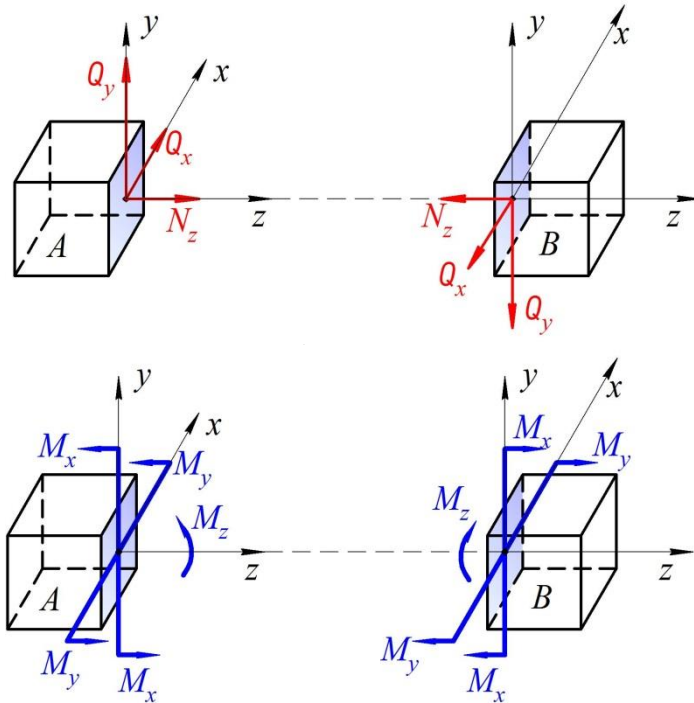


Рисунок 3.1 – Метод перерізів



Розглянемо довільне тіло навантажене самоврівноваженою системою сил. Поділимо його на дві частини  $A$  і  $B$  (див. рис. 3.1 а, б).

Відповідно до третього закону Ньютона, внутрішні сили, що діють у перерізі частини  $A$  дорівнюють за модулем та протилежні за напрямом внутрішнім силам частини  $B$ . Їх можна звести до **головного вектора і головного моменту**.

Якщо головний вектор і головний момент спроеціювати на вісь стержня  $z$ , та головні центральні осі перерізу  $y$  і  $x$ , то на кожному боці перерізу матимемо шість внутрішніх силових факторів: три сили  $(N_z, Q_y, Q_x)$  і три моменти  $(M_x, M_y, M_z)$  (Рис. 3.1 б).

Ці величини називають **внутрішніми силовими факторами** в перерізі стержня. Зусилля моментів у перерізі мають такі означення:

$N_z$  – поздовжня сила; яка дорівнює сумі проєкцій усіх внутрішніх сил, що діють у перерізі на нормаль до перерізу;

$Q_x$  та  $Q_y$  – поперечні сили, які дорівнюють сумі проєкцій всіх внутрішніх сил у перерізі на головні центральні вісі перерізу  $x$  та  $y$ ;

$M_x$  та  $M_y$  – згинальні моменти, визначаються як суми моментів усіх внутрішніх сил у перерізі відносно головних центральних осей перерізу  $x$  та  $y$ ;

$M_z = M_{кр}$  – крутильний момент, який дорівнює сумі моментів усіх внутрішніх сил у перерізі відносно осі стержня  $z$ :

$$\begin{aligned} \text{де} \quad N_z &= \sum P_{iz}; \quad Q_x = \sum Q_{ix}; \quad Q_y = \sum Q_{iy}; \\ M_x &= \sum_1^n M_{ix}; \quad M_y = \sum_1^n M_{iy}; \quad M_{кр} = \sum_1^n M_{iz}. \end{aligned}$$

Для практичного обчислення зусиль та моментів у перерізі використовують рівняння рівноваги довільної просторової системи сил:

$$\begin{aligned} \sum_1^n M_x(\bar{P}_i) + M_x &= 0; \quad \sum_1^n P_{ix} + Q_x = 0; \\ \sum_1^n M_y(\bar{P}_i) + M_y &= 0; \quad \sum_1^n P_{iy} + Q_y = 0; \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\sum_1^n m_z(\bar{P}_i) + M_z = 0; \quad \sum_1^n P_{iz} + N_z = 0.$$

Метод перерізів дає можливість знайти внутрішні зусилля та моменти в будь-якому перерізі стержня по всій довжині стержня під дією будь-якого навантаження.

Зусилля та моменти в різних перерізах одного і того ж самого стержня різні. **Графічні зображення, що показують, як змінюються внутрішні зусилля при переході від перерізу до перерізу, називають епюрами.** Кількість перерізів визначається кількістю силових ділянок. **Силовою ділянкою** називається частина стержня між точками прикладання зосереджених сил, або де розподілене навантаження змінюється за одним і тим же законом. Кількість силових ділянок найпростіше визначається кількістю розмірів, показаних на схемі. В практичних задачах побудова епюр потрібна для визначення положення найбільш навантаженого (небезпечного) перерізу стержня.

#### **Правила побудови епюр:**

1. Вісь (базу), на якій будується епюра, завжди вибирають так, щоб вона була паралельна або просто збігалася з віссю стержня.
2. Ординати епюри відкладають із урахуванням знаку перпендикулярно осі епюри.
3. Штрихують епюри лініями, які перпендикулярні базі.
4. Для зусиль і моментів вибирають певний масштаб. В полі епюри ставлять знак зусилля.
5. В точці, де прикладена сила, або момент на епюрі виникає стрибок (сходинка) на величину цієї сили або момента.
6. Поздовжня сила вважається додатною, якщо вона спричиняє розтягання, та від'ємною – при стисканні.

#### **Правила побудови епюр на розтягання (стискання).**

1. Зовнішні навантаження, які розтягують стержень спричиняють додатні внутрішні напруження; ті, які стискають - спричиняють від'ємні напруження. Додатні значення відкладаємо вверх від базової лінії, від'ємні – вниз.
2. В точці прикладання поздовжньої сили на епюрі виникає стрибок («сходинка») на величину цієї сили.

3. На ділянці з розподіленим навантаженням – епіюра обмежена прямою нахиленою лінією. Якщо на ділянці не діє розподілене навантаження, то епіюра обмежена прямою, паралельною базовій лінії.

### 3.2 Напруження в перерізі

Як уже зазначалося в перерізі внутрішні зусилля можна привести до головного вектора  $\bar{R}$  і головного моменту  $\bar{M}$ , проєкції яких на головні центральні осі дають величини  $N_z$ ;  $Q_y$ ;  $Q_x$ ;  $M_x$ ;  $M_y$ ;  $M_z$  – які називаються **зусиллями та моментами в перерізі, або внутрішніми силовими факторами**.

Розглянемо нескінченно малий елемент площі  $dF$  (Рис.3.2).

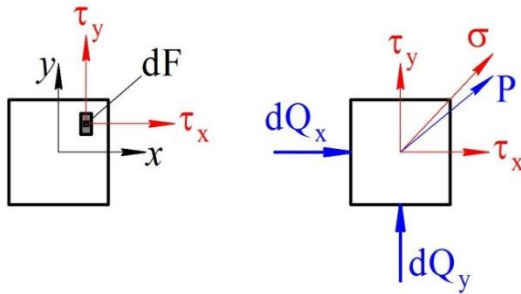


Рисунок 3.2 – Напруження в перерізі

Внаслідок малості елемента  $dF$  зусилля на цій площі будуть однакові за модулем і напрямком. Їх рівнодійна  $dR$  буде проходити через центр ваги площі  $dF$ . Проекціями  $dR$  по осям  $x$ ,  $y$ ,  $z$  будуть елементарні сили  $dN_z$ ,  $dQ_x$ ,  $dQ_y$ . Тоді відношення

$$\sigma = \frac{dN_z}{dF}, \quad \tau_y = \frac{dQ_y}{dF}, \quad \tau_x = \frac{dQ_x}{dF} \quad (3.2)$$

називають напруженням в точці з координатою  $x$  та  $y$ , де  $\sigma$  – нормальне напруження;  $\tau$  – дотичне напруження. Їх

виражають в  $\text{Па} = \frac{H}{M^2}$  або  $\text{кПа}$ ;  $\text{МПа}$  ( $\text{кПа} = 10^3 \text{Па}$ ;  $\text{МПа} = 10^6 \text{Па}$ ).

Отже, **напруженням називається внутрішня сила, віднесена до одиниці площі в точці перерізу, що розглядається**. Іноді, крім нормальних  $\sigma$  та дотичних  $\tau_x, \tau_y$  розглядають ще й **повне напруження**  $p = \frac{dR}{dF}$ , яке припадає на одиницю площі

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau_y^2 + \tau_x^2}. \quad (3.3)$$

Отже, виходячи з визначення зусиль та моментів (див. п. 3.1) і враховуючи формули (3.2) маємо:

$$N_z = \int_F dN_z = \int_F \sigma dF; \quad M_y = \int_F x dN = \int_F \sigma x dF;$$

$$Q_y = \int_F dQ_y = \int_F \tau_y dF; \quad M_x = \int_F y dN = \int_F \sigma y dF; \quad (3.4)$$

$$Q_x = \int_F dQ_x = \int_F \tau_x dF;$$

$$M_{кр} = \int_F (y dQ_y - x dQ_x) = \int_F (y \tau_x - x \tau_y) = \int_F \rho \tau dF, \quad (3.5)$$

де  $\tau$  – **повне дотичне напруження**:

$\rho$  – відстань від центра ваги перерізу до лінії дії  $dQ$ .

$$\tau = \frac{dQ}{dF} = \frac{\sqrt{dQ_y^2 + dQ_x^2}}{dF} = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_x^2}, \quad (3.6)$$

Формули (3.5, 3.6), встановлюють зв'язок між напруженнями та внутрішніми зусиллями, називають **статичними рівняннями**, або **інтегральними рівняннями рівноваги**.

При виведенні формул для досліджування напруженого стану (стержнів) завжди дотримуються такої схеми:

1. Розглядають статичний аспект задачі, тобто записують ті з рівнянь статички, котрі потрібні для вирішення задачі.

2. Розглядають **геометричний аспект задачі**: на базі експериментального вивчення деформації стержня та певних гіпотез (зокрема гіпотези плоских перерізів) встановлюють залежності між переміщенням точок стержня та їх положенням у перерізі відносно вибраної системи координат. Ці залежності називають **геометричними рівняннями**.

3. Розглядають **фізичний аспект задачі**: на підставі експериментальних досліджень фізичних властивостей матеріалу визначають залежності між напруженнями та деформаціями (або переміщеннями). Ці залежності називають **фізичними рівняннями**.

4. Виконують **синтез**, тобто разом розв'язують всі рівняння, здобуті у попередніх пунктах. Шляхом виключення деформацій (або переміщень) визначаємо формули, що виражають напруження через зусилля або моменти в перерізі.

### 3.3 Принцип Сен-Венана

Визначаючи напруження при різних видах деформування, в опорі матеріалів широко користуються принципом Сен-Венана, який полягає в наступному: якщо тіло навантажується статично еквівалентними системами сил, тобто такими, в яких головний вектор та головний момент однакові, й при цьому **розміри зони прикладених навантажень невеликі порівняно з розмірами тіла, в перерізах, які достатньо віддалені від місць прикладання сил, напруження мало залежать від способу навантаження**. Пояснимо дію принципу на наступному прикладі.

Якщо взяти стержень і прикласти до нього навантаження за різними схемами (Рис. 3.3), то напруження в поперечному перерізі на відстані  $b$  будуть практично однаковими. Загального теоретичного обґрунтування принципу Сен-Венана не існує, але його справедливність підтверджується численними теоретичними та експериментальними дослідженнями.

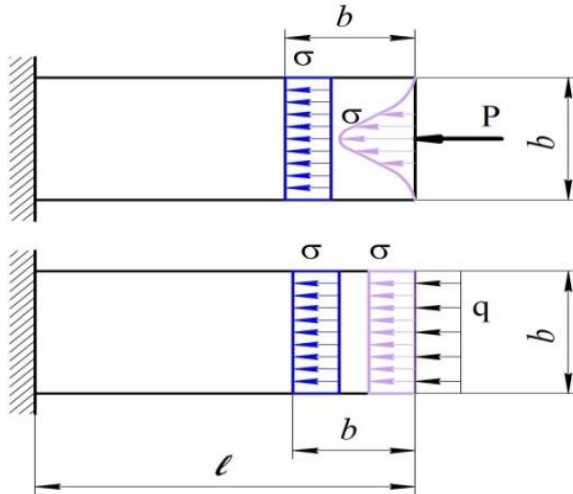


Рисунок 3.3 – Схеми прикладення навантажень до стержня

### 3.4 Контрольні запитання

1. Поняття внутрішніх силових факторів.
2. Що таке епюри та для чого вони призначаються ?
3. Правила побудови епюр.
4. Напруження нормальні та дотичні (формули).
5. Принцип Сен Венана.
6. Внаслідок чого з'являються внутрішні зусилля?
7. Для виявлення чого застосовують метод перерізів?
8. Третій закон Ньютона.
9. Скільки та які внутрішні сили фактори матимемо на кожному боці перерізу?
10. Напишіть статичні або інтегральні формули зусиль та моментів.
11. В чому полягає статичний, геометричний та фізичний аспекти виведення формул для досліджування напруженого стану (стержнів)?

## 4. РОЗТЯГАННЯ І СТИСКАННЯ

### 4.1 Напруження і деформації при розтяганні і стисканні

Просте розтягання або стискання стержня спричинюється силами, що діють уздовж його осі. У цьому разі в поперечних перерізах стержня з шести внутрішніх силових факторів виникає лише один – поздовжня (осьова) сила  $N_z$  (Рис. 4.1). Приклад побудови епюри повздовжніх сил показано у п.3.1.

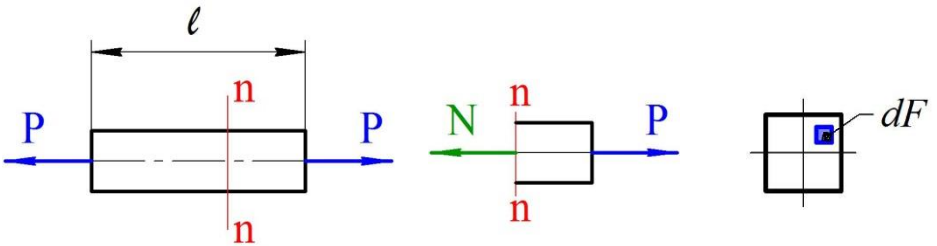


Рисунок 4.1 – Розтягання стержня

Для отримання формули нормальних напружень необхідно додержуватись наведеної послідовності (п. 3.1).

Розріжемо стержень довільним поперечним перерізом  $n - n$ .

**Статичний аспект** задачі виражається рівнянням (3.4)

$$N = \int_F \sigma dF. \quad (4.1)$$

Із цього рівняння не можна визначити напруження  $\sigma$ , оскільки невідомий закон його розподілу в точках поперечного перерізу.

**В геометричному аспекті** задачі приходимо до гіпотези плоских перерізів: поперечні перерізи стержня, плоскі до

деформації, залишаються плоскими і після неї, переміщуючись поступово вздовж осі стержня.

На підставі гіпотези плоских перерізів можна зробити висновок, що всі волокна подовжуються на одну і ту саму величину і їх відносні подовження є однакові.

$$\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell} = \text{const} \quad (4.2)$$

– це аналітичний вираз геометричного аспекту задачі.

**Фізичний аспект задачі** полягає у встановленні залежності деформацій від напружень. При пружних деформаціях ця залежність лінійна, і як відомо називається **законом Гука** (1.1)

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \text{ або } \sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (4.3)$$

де  $E$  – коефіцієнт пропорційності, що називається **модулем поздовжньої пружності, модулем першого роду або модулем Юнга**.

**Модуль пружності** – це одна з фізичних констант матеріалу. Виражається в одиницях напруження, (Па, МПа). Враховуючи сталість модуля пружності  $E$  для однорідного і ізотропного матеріалу, а також сталість  $\varepsilon$ , знаходимо що

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = \text{const}. \quad (4.4)$$

Підставляючи це у вихідний вираз (4.1), маємо

$$N = \int_F E \cdot \varepsilon dF = E\varepsilon \int_F dF = E\varepsilon F = \sigma F, \quad (4.5)$$

звідки

$$\sigma = \frac{N}{F}. \quad (4.6)$$

Знак напруження залежить від знака поздовжньої сили в досліджуваному перерізі. У разі стискання напруження вважають від'ємним.



**Визначення деформацій стержня.** Із попереднього виразу (4.5) можна знайти відносне подовження

$$\varepsilon = \frac{N}{EF}. \quad (4.7)$$

У межах призматичної ділянки стержня завдовжки  $\ell$ , виготовленого з однорідного ( $E = \text{const}$ ) матеріалу і у перерізах якого діють однакові сили  $N$ , подовження кожної одиниці довжини однакові, отже абсолютне подовження

$$\Delta\ell = \varepsilon\ell = \frac{N\ell}{EF} \quad (4.8)$$

Формула (4.8) – це **закон Гука для абсолютних подовжень**.

Добуток  $EF$  у знаменнику називається **жорсткістю поперечно перерізу стержня при розтяганні та стисканні**, має розмірність сили (Н). Чим жорсткість стержня буде більше, тим при одній і тій же довжині він отримає меншу деформацію. Жорсткість характеризує одночасно фізичні властивості матеріалу і геометричні розміри перерізу. Іноді зручно користуватися поняттям відносної жорсткості, яка дорівнює  $\frac{EF}{\ell}$ .

Якщо на розглядуваній ділянці поздовжня сила та поперечний переріз змінні, то для елемента нескінченно малої довжини  $dz$  на підставі формули (4.8) можна записати

$$\Delta(dz) = \frac{N(z)dz}{EF(z)}.$$

Повним подовженням ділянки завдовжки  $\ell$  буде сума подовжень всіх нескінченно малих відрізків

$$\Delta\ell = \int_0^{\ell} \frac{N(z)dz}{EF(z)}. \quad (4.9)$$

Розтягання та стискання супроводжуються зміною поперечних розмірів стержня (Рис. 4.2).

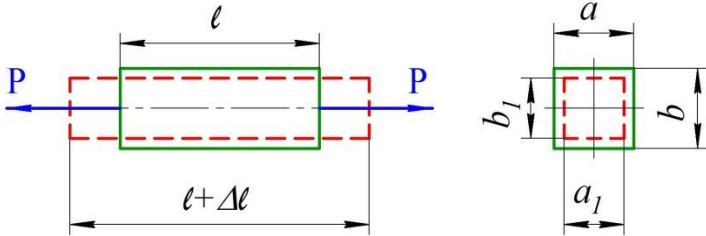


Рисунок 4.2. – Поперечна деформація стержня при розтяганні

За аналогією з подовжньою деформацією різницю відповідних розмірів після і до неї називають **абсолютною поперечною деформацією**.

$$\Delta a = a_1 - a; \quad \Delta b = b_1 - b. \quad (4.10)$$

При розтяганні абсолютні поперечні деформації від'ємні, при стисканні – додатні.

Поділивши абсолютну поперечну деформацію на відповідний початковий розмір, дістанемо **відносну поперечну деформацію**

$$\varepsilon' = \frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b}. \quad (4.11)$$

Між поперечною  $\varepsilon$  і поздовжньою  $\varepsilon'$  відносними деформаціями при простих розтяганні та стисканні в межах застосування закону Гука існує постійне співвідношення. Абсолютне значення цього відношення має назву **коефіцієнта Пуассона**

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right| \quad (4.12)$$

– це **безрозмірна величина**.

Враховуючи, що поздовжня й поперечна деформації завжди мають протилежні знаки, маємо:

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon, \quad (4.13)$$

або, враховуючи попереднє

$$\varepsilon' = -\mu \frac{\sigma}{E}. \quad (4.14)$$

Значення  $\mu$  перебувають у межах 0 – 0,5 і разом з  $E$  наведені у довідкових таблицях.

#### 4.2 Умова міцності і жорсткості. Допустимі напруження і деформації

**Основна задача опору матеріалу – забезпечити надійні розміри деталі, щоб вона не зруйнувалась.**

Небезпека початку руйнування характеризується не стільки значенням внутрішніх зусиль та моментів, скільки значенням нормальних та дотичних напружень, а також їх комбінаціями. Тому **найбільші напруження з умови надійної роботи деталі потрібно обмежувати деякими допустимими значеннями. Їх називають допустимими напруженнями.**

- $[\sigma]_P$  – при розтяганні;
- $[\sigma]_{CT}$  – при стисканні;
- $[\tau]$  – при зсуві.

Таким чином знаходять небезпечні перерізи, в яких напруження досягають найбільших за модулем значень і для цих перерізів записують **умову міцності**:

$$\sigma_{max} = \left| \frac{N_{max}}{F} \right| \leq [\sigma]. \quad (4.15)$$

**Використовуючи умову міцності можна розв'язувати три типи задач:**

1. За відомим навантаженням знайти надійні розміри стержня (проектувальний розрахунок);
2. За відомими розмірами та матеріалом деталі перевірити, чи зможе вона витримати задане навантаження (перевірочний розрахунок);
3. За відомими розмірами деталі, матеріалом та схемою навантажень визначити допустимі навантаження.

Також необхідно забезпечити умову жорсткості:

$$\Delta\ell = \int_{\ell} \frac{N(z)dx}{EF(z)} \leq [\Delta\ell], \quad (4.16)$$

де  $\Delta\ell$  – зміна довжини деталі;

$[\Delta\ell]$  – допустимі значення цієї зміни (допустима деформація).

Таким чином, для того, щоб знайти небезпечний переріз, потрібно побудувати епору внутрішніх зусиль, тобто зміну  $N_z$  за довжиною стержня та визначити точку з максимальним значенням  $N_z$  яка вказує на небезпечний переріз.

### 4.3 Урахування власної ваги при розтяганні та стисканні

В машинобудуванні, як правило, вплив власної ваги не враховують, тому що деталі мають невеликі розміри, і зовнішнє навантаження значно більше впливає на напруження ніж власна вага. Але при розрахунках канатів шахтних підйомників, штанг бурильних пристроїв, опор мостів, стін будівель, гребель вплив власної ваги слід враховувати.

Припустімо, що прямий стержень великої довжини  $\ell$  із сталим поперечним перерізом закріплено верхнім кінцем і навантажено силою  $P$  (Рис. 4.3). Визначимо, як змінюються поздовжні сили та напруження в поперечних перерізах стержня з урахуванням і без урахування власної ваги.

Використовуючи метод перерізів, будемо епори  $N_z$ ,  $\sigma$ ,  $\Delta\ell$ :

$$\sum P_{iz} = 0; \quad N_z - P - Fz\gamma = 0;$$

$$\text{звідки} \quad N_z = P + Fz\gamma, \quad (4.17)$$

де  $\gamma$  – питома вага матеріалу (для сталі  $78 \frac{\text{кН}}{\text{м}^3}$ );  $F$  – площа перерізу. При  $z = 0$   $N_z = P$ ; при  $z = \ell$   $N_z = P + F\ell\gamma$ .

Епора повздовжніх зусиль зображена на рис. 4.3, б.

Нормальні напруження в перерізі

$$\sigma = \frac{N_z}{F} = \frac{P}{F} + \gamma z. \quad (4.18)$$

Максимального значення нормальне напруження набуває у верхньому перерізі (в закріпленні стержня) при  $z = \ell$ :

$$\sigma_{max} = \frac{P}{F} + \gamma \ell, \quad (4.19)$$

тут перший доданок – це напруження від сили  $P$ , другий – від власної ваги. Епюру нормальних напружень наведено на рис. 4.4, в).

**Визначення переміщень перерізів стержня.** Мінімальне подовження стержня буде у закріпленні  $\Delta \ell = 0$ . У перерізі стержня на найбільшій відстані  $\xi$  від вільного кінця (Рис. 4.4, а) маємо  $N_z = P + \gamma F \xi$ . За формулою (4.9)  $\Delta \ell = \int_0^\ell \frac{N_z dz}{EF}$  при  $F = const$ , знаходимо:

$$\Delta \ell = \int_z^\ell \frac{N_z(\xi) d\xi}{EF} = \int_z^\ell \frac{(P + \gamma F \xi) d\xi}{EF}. \quad (4.20)$$

Подовження  $\Delta \ell$  стержня визначаємо з (4.20), взявши  $z = 0$ :

$$\Delta \ell = \frac{P\ell}{EF} + \frac{\gamma \ell^2}{2EF}. \quad (4.21)$$

Перший доданок – це подовження стержня від сили  $P$ , другий – від **власної ваги**. Епюру переміщень перерізів зображено на рис. 4.4, г).

Урахувавши, що повна вага стержня  $Q = \gamma F \ell$  (маса циліндра), замість формули (4.21) матимо:

$$\Delta \ell = \frac{P\ell}{EF} + \frac{Q\ell}{2EF}. \quad (4.22)$$

Отже, **абсолютне подовження стержня** від власної ваги таке саме, як подовження від зосередженої сили  $Q$ , що дорівнює вазі

стержня и прикладена в центрі ваги.

**Умова міцності для небезпечного перерізу**, в якому  $\sigma$  найбільше

$$\sigma = \frac{P}{F} + \gamma \ell \leq [\sigma]. \quad (4.23)$$

Звідки

$$F = \frac{P}{[\sigma] - \gamma \ell}. \quad (4.24)$$

Якщо зосередженого навантаження немає то **умова міцності**

$$\sigma = \gamma \ell \leq [\sigma]. \quad (4.25)$$

Звідси можна знайти довжину стержня, при якій напруження тільки від своєї власної ваги досягає допустимого і стержень не може нести корисне навантаження.

$$\ell_{\text{гр}} = \frac{[\sigma]}{\gamma}. \quad (4.26)$$

### **Правила побудови епюр повздовжніх сил:**

Для епюр повздовжніх сил характерні певні закономірності, знання яких дозволяє оцінити правильність виконаних побудов:

- 1) епюри  $N$  завжди **прямолінійні**;
- 2) на ділянці, де немає розподіленого навантаження, епюра  $N$  – пряма, паралельна осі; а на ділянці під розподіленим навантаженням – нахилена пряма;
- 3) під точкою прикладення зовнішньої зосередженої сили на епюрі обов'язково має бути стрибок (сходінка) на величину цієї сили;
- 4) позитивні значення відкладаються (у вибраному масштабі) над віссю епюри, негативні, – під віссю.

## **4.4 Контрольні запитання**

1. Сформулюйте закон Гука; як він виражається математично?
2. Що характеризує модуль пружності першого роду  $E$ ?

3. Яка розмірність модуля пружності?
4. Закон Гука для абсолютних подовжень.
5. Що називається жорсткістю стержня при розтяганні і стисканні?
6. Що таке коефіцієнт Пуассона?
7. Дайте визначення допустимого напруження.
8. Правила побудови епюр поздовжніх сил.
9. Умови міцності та жорсткості при розтяганні (стисканні).
10. Умови міцності та жорсткості при розтяганні (стисканні) з урахуванням власної ваги.
11. Напруження та деформації при розтяганні (стисканні).
12. Напруження та деформації при розтяганні (стисканні) з урахуванням власної ваги.

## 5. МЕХАНІЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТЕРІАЛІВ

**Основні характеристики металів.** При розрахунках на міцність деталей механізмів необхідно знати механічні характеристики матеріалів: міцність, пружність, які характеризуються модулем пружності першого роду  $E$  і коефіцієнтом Пуассона  $\mu$ , твердість (здатність даного тіла протистояти проникненню в нього другого тіла шляхом пружного або пластичного деформування або шляхом руйнування частини поверхні тіла), пластичність (яка характеризує здатність матеріалу давати залишкову деформацію). Тому матеріали випробовують на розтягання, стискання, зсув, кручення, згинання та твердість. Докладні описи всіх видів механічних випробувань, а також машин та приладів, що при цьому застосовуються, наведено в спеціальних курсах і посібниках з лабораторних робіт з опору матеріалів.

### 5.1 Випробування матеріалів на розтягання. Види зразків

Більшість механічних характеристик прямо або побічно можна визначити за випробуваннями на розтягання, які проводяться для металів у відповідності зі ГОСТ 1497-84.

**Випробування на розтягання.** На розтягання випробовуються зразки (Рис. 5.1), які мають робочу частину довжиною  $\ell$ , і голівки, які призначені для закріплення у захватах випробувальної машини.

Подовження визначається на початковій розрахунковій довжині  $\ell_0$  зразка. Частіше всього використовуються циліндричні зразки. Відношення розрахункової довжини до початкового діаметру  $\ell_0/d_0$  у «довгих» зразків прийнято рівним 10, у «коротких»  $\ell_0/d_0 = 5$ . Застосовуються також зразки прямокутного перерізу. Розрахункова довжина їх  $\ell_0$  пов'язана з початковою площиною поперечного перерізу  $F_0$  такими ж залежностями, як і у циліндричних зразків:  $\ell_0 = 11,3\sqrt{F_0}$  – довгі зразки і  $\ell_0 = 5,65\sqrt{F_0}$  – короткі зразки.



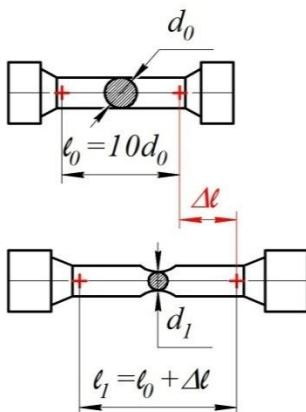


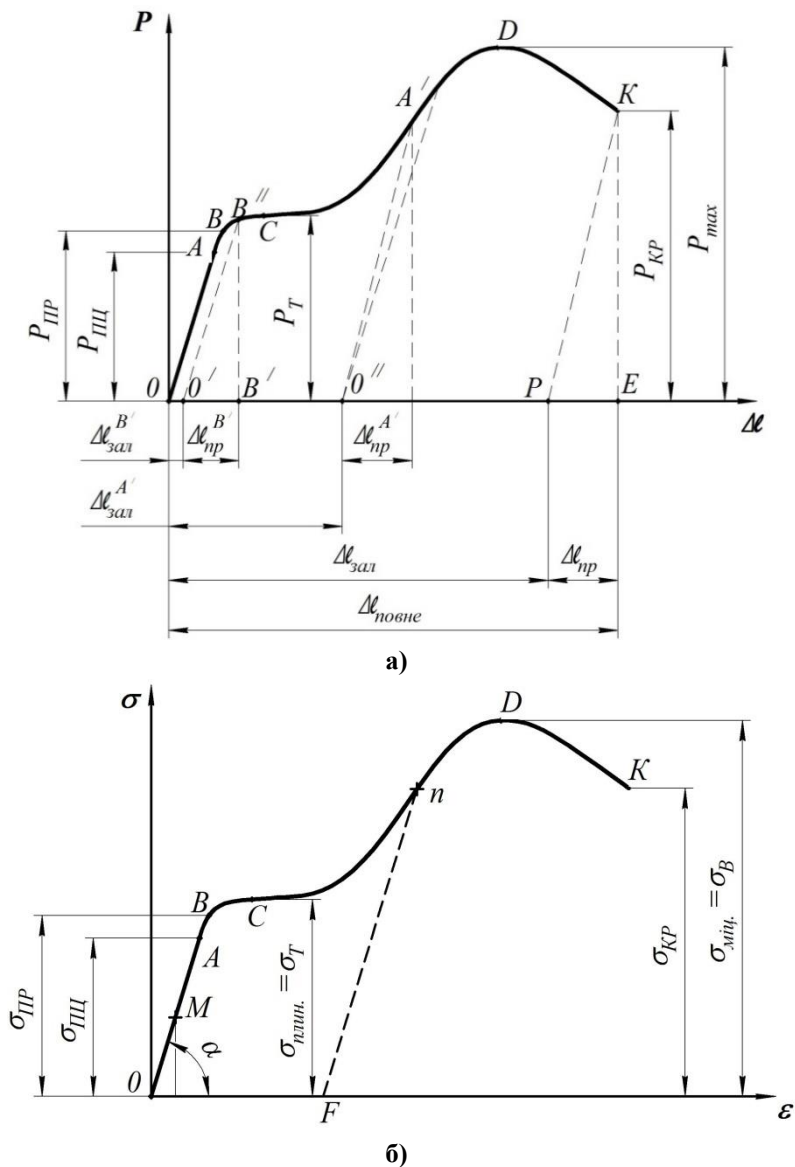
Рисунок 5.1 – Зразок для випробування на розтягання:  
а) до випробування; б) після розриву

Як основні використовують циліндричні зразки з діаметром  $d_0 = 10$  мм; при цьому робоча довжина  $l_0 = 100$  мм.

Дослідження зварних з'єднань проводять за ГОСТ 6996-66.

## 5.2 Діаграми розтягання ( $P - \Delta l, \sigma - \epsilon$ )

Для випробувань на розтягання застосовують розривні машини (ІМАШ-22-71 Р-10, Р-20, Р100), що дають змогу в процесі випробування визначити зусилля та відповідні до них деформації зразків. За цими даними будують **діаграму розтягання**, в якій по осі ординат відкладають зусилля, а по осі абсцис – відповідні до них подовження  $\Delta l$ . Характер діаграми розтягання залежить від властивостей матеріалу. Типовий вигляд такої діаграми для маловуглецевої сталі зображено на рис. 5.2, а).



а) залежність подовження від сили;

б) залежність відносної деформації від напруження.

Рисунок 5.2 – Діаграми розтягання для маловуглецевої сталі

Вигляд діаграми розтягання в координатах  $P - \Delta\ell$  залежить не тільки від властивостей матеріалу, а й від розмірів випробуваного зразка.

Щоб добути діаграму, яка характеризує тільки механічні властивості матеріалу, початкову діаграму розтягання перебудовують у координатах  $\sigma - \varepsilon$ . Ординати такої діаграми отримують поділивши силу, що розтягує зразок, на початкову площу поперечного перерізу зразка ( $\sigma = P/F_0$ ), а абсиси – діленням абсолютних подовжень зразка на його початкову довжину ( $\varepsilon = \Delta\ell/\ell_0$ ). Діаграму в координатах  $\sigma - \varepsilon$ , яка відповідає початковій діаграмі (Рис. 5.2, а), зображено на рис. 5.2, б). Точкам  $O, A, B, C, D, F$  початкової діаграми відповідають точки  $O, a, b, c, d, e, f$  діаграми  $\sigma - \varepsilon$ .

Діаграми мають ряд характерних точок. На ділянці  $OA$  між подовженням зразка та силою має місце прямопропорційна залежність. На цій стадії розтягання відбувається у відповідності до закону Гука.

Позначимо силу, за якою закон пропорційності припиняє свою дію, через  $P_{\text{пц}}$ . Цьому значенню сили на діаграмі відповідає точка  $A$ . Напруження, спричинене силою  $P_{\text{пц}}$ , називається границею пропорційності, його обчислюють за формулою:

$$\sigma_{\text{пц}} = P_{\text{пц}} / F_0 . \quad (5.1)$$

**Отже границею пропорційності називається напруження, після якого порушується закон Гука.**

**Деформація, що досягається, називається пружною. Вона повністю зникає після розвантаження.**

Доки сила  $P$  не досягне певного значення, доти спричинені нею деформації будуть зникати при розвантаженні. Процес розвантажування на діаграмі при цьому зображується тією самою лінією, що й навантажування.

Позначимо через  $P_{\text{пр}}$  найбільше значення сили, при якому зразок при розвантаженні ще не дає залишкової деформації. На діаграмі цьому значенні відповідає точка  $B$ , а пружній стадії розтягання зразка – ділянка  $OB$ .

Найбільше напруження, до якого залишкова деформація при розвантаженні не виявляється, називається **границею пружності**. Це напруження спричиняється силою  $P_{пр}$  і визначається за формулою

$$\sigma_{пр} = P_{пр} / F_0. \quad (5.2)$$

Точки  $A$  і  $B$ , а отже, і значення напружень  $\sigma_{пц}$  та  $\sigma_{пр}$  близько одна до одної, і, як правило, різницею між ними нехтують.

Після точки  $A$  при подальшому розтяганні зразка крива розтягання стає криволінійною і плавно піднімається до точки  $C$ , де спостерігається перехід до горизонтальної ділянки  $CD$  яка називається **площадкою текучості**.

На цій стадії розтягання подовження зразка зростає при сталому значенні сили, яку позначають  $P_T$ . Такий процес називають текучістю матеріалу. Вона супроводжується залишковим (пластичним) подовженням, що не зникає після розвантаження.

Отже, **границею текучості  $\sigma_T$  зветься найменше напруження, при якому деформація зразка відбувається при постійному розтягувальному зусиллю**. Границя текучості відзначається за формулою

$$\sigma_T = P_T / F_0. \quad (5.3)$$

Після стадії текучості матеріал знову набирає здатності збільшувати опір подальшому деформуванню і сприймає зусилля, що зростає до деякої гранці. Цьому явищу відповідає ділянка  $DE$  (Рис. 5.2, а) кривої розтягання, що зветься **ділянкою зміцнення**. Точка  $E$  відповідає найбільшому зусиллю  $P_{max}$ , яке може сприймати зразок.

Напруження, що відповідає максимальній силі  $P_{max}$ , називається тимчасовим опором, або границею міцності, і позначається  $\sigma_B$ . Його визначають за формулою

$$\sigma_B = P_{max} / F_0. \quad (5.4)$$

До цього моменту подовження розподілялися рівномірно по всій довжині  $l_0$  зразка. Площі поперечних перерізів зразка змінювалися неістотно і рівномірно по всій довжині. Тому для обчислення  $\sigma_{\text{пц}}$ ,  $\sigma_{\text{пр}}$ ,  $\sigma_{\text{T}}$  і  $\sigma_{\text{В}}$  у формулах вводилися початкові значення площі  $F_0$ .

Після досягнення зусилля  $P_{\text{max}}$  при розтяганні зразка деформація відбувається на невеликій довжині. Це послідовно призводить до утворення місцевого звуження у вигляді шийки (Рис. 5.2, б), до зменшення сили  $P$ , до зростаючої швидкості деформації і до розриву зразка.

Позначивши через  $P_{\text{кр}}$  силу в момент розриву, будемо мати:

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{P_{\text{кр}}}{F} . \quad (5.5)$$

Визначене таким чином напруження при розриві надто умовне і не може бути використано, як характеристика механічних властивостей сталі. Умовність полягає в тому, що його здобуто діленням  $P_{\text{кр}}$  на площу поперечного перерізу зразка, яка значно менша, ніж початкова внаслідок утворення шийки.

Основними характеристиками пружності та міцності матеріалів, що використовується у розрахунках є:  $\sigma_{\text{пр}}$  – границя пружності;  $\sigma_{\text{T}}$  – границя текучості;  $\sigma_{\text{В}}$  – границя міцності (тимчасовий опір).

### 5.3 Поняття про запас міцності

Визначення величини **допустимого напруження** являється однією з важливих задач розрахунків на міцність. Як витікає із визначення  $[\sigma] = \sigma_{\text{В}}/n$  ( $n$  – **коефіцієнт запасу міцності**), допустиме напруження отримують як частину величини напруження  $\sigma_{\text{неб}}$ , яке відповідає небезпечному стану матеріалу,  $\sigma_{\text{В}}$  визначається під час механічних випробувань. Для того, щоб уникнути залишкових деформацій, за величину  $\sigma_{\text{В}}$  для пластичних матеріалів приймають границю текучості  $\sigma_{\text{T}}$ . у цьому випадку коефіцієнт запасу називають **коефіцієнтом запасу по границі текучості**  $n_{\text{T}}$ . Тому формула набуває вигляд

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{T}}}{n_{\text{T}}} .$$

**Вибір коефіцієнта запасу міцності залежить** від стану пластичності матеріалу, характеру прикладання навантаження (статичне, динамічне, змінне) і загальних факторів:

- неоднорідність матеріалу (різні механічні властивості у малих зразках та в деталях, скриті дефекти виготовлення і т.п.);
- неточність задавання зовнішніх навантажень (направлення зусиль, невраховано дрібні силові фактори);
- наближеність розрахункових схем та певна наближеність розрахункових формул (абсолютно гладкі поверхні та шарніри без тертя, зосереджена сила ваги, імперичні формули);
- область експлуатації конструкцій (мости, транспорт, будівництво, літальні апарати,...);

Зазначені фактори необхідно враховувати при виборі коефіцієнта запасу міцності  $n$ , який іноді називають основним.

Для крихких матеріалів (чавун, високовуглецеві загартовані сталі і др.), у яких на діаграмі розтягання відсутня зона пластичних деформацій (площадка), за  $\sigma_{неб}$  приймають границю міцності  $\sigma_B$ , а під  $n$  розуміють коефіцієнт запасу за границею міцності, тому  $[\sigma] = \sigma_B/n_B$ .

## 5.4 Визначення твердості матеріалів

Іноді для оцінки тимчасового опору можна скористатися непрямим методом, зокрема вимірюванням твердості.

**Твердістю матеріалу називається здатність чинити опір механічному проникненню в його поверхню іншого більш твердого тіла, яке зветься індентор.** Індентор, після його вдавнення, залишає відбиток певного обрису. На підставі розмірів здобутого відбитка роблять висновок про твердість випробуваного матеріалу.

**Метод Брінелля.** Сталева загартована кулька діаметром  $D$  (Рис. 5.3) вдавлюється в зразок (виріб) під дією навантаження  $P$ , прикладеного протягом певного часу (10 – 0 с). Мінімальна товщина зразка для випробувань повинна бути не менша за десятикратну глибину відбитку. Після навантаження вимірюється діаметр відбитка,

що залишився на зразку. Число твердості за Брінеллем виражається відношенням навантаження до площі поверхні сферичного відбитка  $F$  (мм<sup>2</sup>)(ДСТУ ISO 6506-1:2007).

$$HB = \frac{2P}{\pi D(D - \sqrt{D^2 - d^2})}, \quad (4.32)$$

де  $P$  – прикладене навантаження (кПа);

$D$  – діаметр кульки, мм;

$d$  – діаметр відбитку, мм.

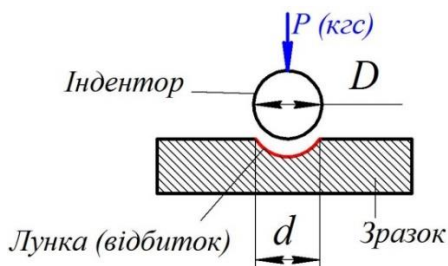


Рисунок 5.3 – Метод Брінелля.

Таблиця 5.1 – Значення твердості різних матеріалів

Матеріал	Твердість
М'яке дерево, сосна	1,6 HBS 10/100
Тверде дерево	від 2,6 до 7,0 HBS 10/100
Алюміній	15 HB
Мідь	35 HB
Дуралюміній	70 HB
М'яка сталь	120 HB
Нержавіюча сталь	250 HB
Скло	500 HB
Інструментальна сталь	650-700 HB

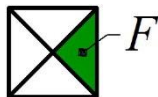
Згідно ДСТУ, діаметри кульки – 10, 5, 2,5 і 1 мм, величина навантаження – 187,5 кгс, 250 кгс, 500 кгс, 1000 кгс і 3000 кгс.

**Метод Роквелла.** За методом Роквелла твердість визначають вдавленням твердого сплаву або накінецьника з алмазним конусом із кутом при вершині  $120^\circ$  або зі сталеву кулькою діаметром 1,85 мм. Кулькою користуються при випробуванні м'яких сталей (до 220 НВ) при навантаженні 981 Н (100 кгс). (ДСТУ ISO 6508-1:2013). Твердість потрібно вимірювати не менш ніж у трьох точках. Для обчислення беруть середнє значення результатів другого і третього вимірювань.

Стандартами нормовано 11 шкал визначення твердості за методом Роквелла (А; В; С; D; Е; F; G; Н; К; N; Т); ці шкали відрізняються типом індентора, випробувальним навантаженням та константами у формулі для обчислення твердості за результатами вимірювання. З них найчастіше використовують дві шкали В і С. Шкала В використовує в якості індентора сталеву кульку. Шкала С використовується для більш твердих матеріалів (індентор – алмазний конус). Для позначення твердості, визначеної за методом Роквелла, використовують символ HR, до якого додають букву, що вказує на шкалу, за якою проводили випробування (HRB, HRC тощо).

За випробування алмазним конусом гранична глибина проникнення становить 0,2 мм, під час випробування кулькою — 0,26 мм.

**Метод Віккерса.** Метод полягає у визначенні твердості за величиною відбитка, залишеного алмазним індентором у формі чотирикутної піраміди, яку вдавлюють у поверхню під дією навантаження, прикладеного протягом певного часу. Твердість обчислюється як відношення зусилля  $P$ , прикладеного до наконечника, до площі похилої поверхні відбитка  $F$ ; одиницею твердості служить МПа.



Твердість, визначена за цим методом, позначається HV (ДСТУ ISO 6507-1:2007).



## 5.5 Поняття про концентрацію напруження

Якщо по довжині деталі або зразка поперечний переріз змінюється плавно, то напруження по довжині при розтягуванні будуть функцією площі поперечного перерізу.

**Номінальними називають напруження, визначені на підставі припущення про те, що концентрації напружень немає.**

**Концентрація напружень** – це збільшення напружень у твердому тілі у місцях зміни форми або порушень суцільності матеріалу.

Розглянемо різкі зміни площі поперечного перерізу, які призводять до нерівномірного розподілу напружень та спричиняють **концентрацію напружень** (Рис. 5.4).

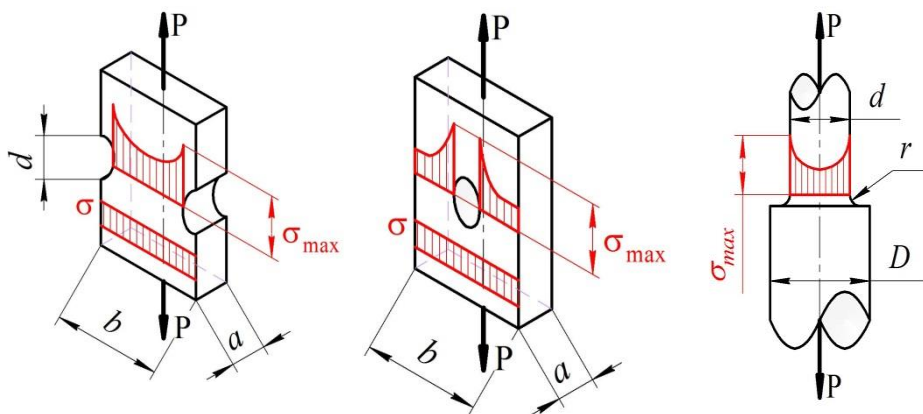


Рисунок 5.4 – Розподіл нормальних напружень в поперечному перерізі в залежності від форми концентратора

Кількісною характеристикою концентрації напружень є **теоретичний коефіцієнт концентрації**  $\alpha = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}}$ .

Коефіцієнт  $\alpha$  залежить як від форми концентратора так і від властивостей матеріалу. Тому розрізняють **теоретичний коефіцієнт концентрації**  $\alpha$ , який визначають методами теорії пружності і який залежить від виду концентратора та **дійсний (ефективний)**

**коефіцієнт концентрації  $k$** , що враховує сумісний вплив геометрії і властивостей матеріалу. На ефективний коефіцієнт концентрації впливає характер навантаження.

Так при статичному навантаженні:

$$k = \frac{P_I}{P_{II}}$$

де  $P_I$  – руйнівне навантаження зразка без концентратора напружень;

$P_{II}$  – руйнівне навантаження зразка з концентратором напружень.

Також до факторів, що обумовлюють концентрацію **напружень (концентраторів напружень)**, відносяться отвори, порожнини, тріщини, проточки, надрізи, кути, виступи, гострі краї, нарізь, а також нерівності та дефекти поверхні (риски, подряпини, мітки, зварні шви тощо). Напруження поблизу концентраторів напружень визначаються методами теорії пружності, чисельними методами (метод кінцевих елементів) або експериментально методами тензометрії (методи: фотопружності, голографічної інтерферометрії, з використанням тензометрів).

## 5.6 Контрольні запитання

1. Розміри довгих та коротких зразків.
2. Діаграми розтягання, основні принципи побудови.
3. Як визначити напруження в межах пропорційності, пружності, плинності, міцності?
4. Як може бути визначена величина модуля пружності  $E$  з діаграми розтягування?
5. Чому на діаграмі розтягування напруження, при якому відбувається руйнування зразка, лежить нижче межі міцності?
6. Яке напруження береться за основу при виборі допустимого напруження для крихкого матеріалу?
7. Яке напруження береться за основу при виборі допустимого напруження для пластичного матеріалу?
8. В яких випадках нехтують концентрацією напружень при виборі допустимого напруження?

9. Коефіцієнт запасу міцності.
10. Коефіцієнт запасу міцності при контактних напруженнях.
11. Основні методи визначення твердості матеріалів.
12. Поняття концентрації напружень, види концентраторів.
13. Теоретичний та дійсний коефіцієнти концентрації.
14. Як визначити число твердості за Брінеллем, Роквеллом та Віккерсом?

## 6. СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНІ КОНСТРУКЦІЇ

### 6.1 Статично невизначувані задачі

Статично невизначуваними називають конструкції, зусилля в елементах яких не можна визначити тільки з рівнянь статки. Крім рівнянь статки для розрахунку таких систем треба використовувати рівняння, що містять деформації елементів конструкції.

Різниця між кількістю невідомих та кількістю рівнянь статки називається ступенем статичної невизначуваності конструкції.

Наприклад:

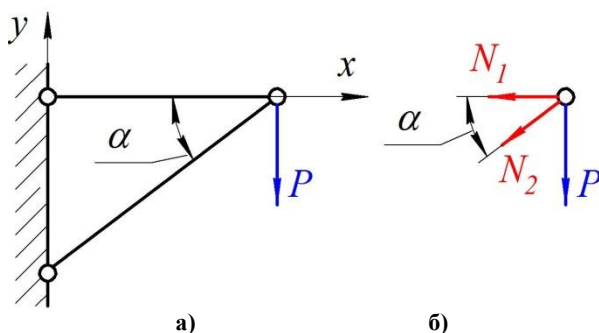


Рисунок 6.1 – Приклад статично визначуваного елемента конструкції

Конструкція статично визначувана, так як можна скласти два рівняння статки і визначити дві невідомі ( $N_1, N_2$ ).

$$\sum_1^n P_{ix} = -N_1 - N_2 \cos \alpha = 0; \quad \sum_1^n P_{iy} = -P - N_2 \sin \alpha = 0;$$

$$N_2 = -\frac{P}{\sin \alpha}; \quad -N_1 + \frac{P}{\sin \alpha} \cos \alpha = 0; \quad N_1 = P \operatorname{ctg} \alpha.$$

У випадку навантаження, показаному на рис. 6.2, а), система є один раз статично невизначувана, так як можемо скласти два рівняння

статики  $\sum P_{ix} = 0$  і  $\sum P_{iy} = 0$  і маємо три невідомих  $N_1; N_2; N_3$  а конструкція зображена на рис. 6.2, б) є двічі статично невизначувана (маємо чотири невідомих  $N_1; N_2; N_3; N_4$ ).

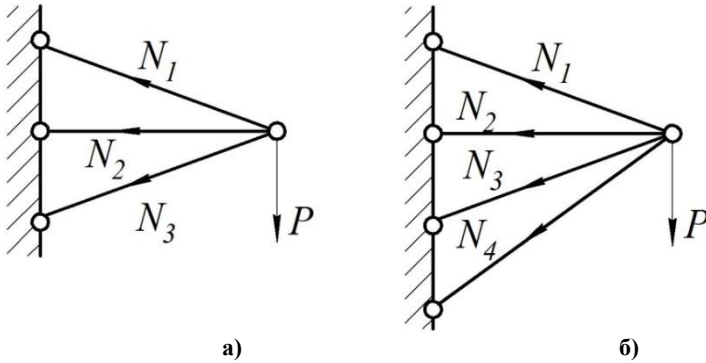


Рисунок 6.2 – Статично невизначувані системи

## 6.2 Розв'язання статично невизначуваних задач

Для розв'язання задач статично невизначуваних систем, які працюють на розтягання або стискання розглядають сумісно рівняння, здобуті в результаті розгляду статичного, геометричного і фізичного аспектів задачі. Розглядати їх потрібно в такій послідовності:

– **статичний аспект задачі.** Складаємо рівняння рівноваги відокремлених елементів конструкції, що мають невідомі зусилля.

– **геометричний аспект задачі.** Розглядаємо систему в деформованому стані, що дає змогу встановити зв'язки між деформаціями або переміщеннями окремих елементів конструкції. Здобуті рівняння називають рівняннями сумісності (нерозривності) деформації.

– **фізичний аспект задачі.** На підставі закону Гука виражаємо переміщення або деформації елементів конструкції через невідомі зусилля, що діють у них. У разі дії на конструкцію температурних навантажень, їх треба враховувати у фізичному аспекті.

– **синтез.** Розв'язуючи сумісно статичні, геометричні та фізичні рівняння, знаходимо невідомі зусилля.

### 6.3 Особливості статично невизначуваних систем

На підставі розглянутих прикладів можна зазначити такі особливості статично невизначуваних систем:

– розподіл зусиль між елементами залежить від жорсткості цих елементів. Якщо збільшити жорсткість одного із них, то він сприйматиме більше зусилля. Змінюючи співвідношення жорсткості елементів конструкції, можна як завгодно змінювати розподіл зусиль в них.

– у статично невизначуваних конструкціях при зміні температури їх елементів порівняно з температурою, при якій конструкція складалась, виникають зусилля і напруження.

– у елементах статично невизначуваних конструкцій можуть існувати зусилля і напруження. Коли немає зовнішнього навантаження їх називають початковими (або монтажними). Зусилля виникають або при неточності виготовлення, або з явною метою (наприклад затягування болтів, пресова посадка тощо).

– у статично невизначуваних конструкціях у загальному випадку в усіх елементах одночасно не можна досягти напруження, які дорівнюють допустимим. Це треба мати на увазі при проектуванні таких конструкцій.

### 6.4 Контрольні запитання

1. Які конструкції називаються статично невизначуваними?
2. Ступінь статичної невизначуваності.
3. Особливості статично невизначуваних систем.
4. Сформулювати статичний, геометричний і фізичний аспекти задачі.
5. Показати приклади один раз і двічі статично невизначуваних задач.
6. Як визначити подовження стержня  $\Delta l_t$  при зміні температури від  $t_1$  до  $t_2$  градусів?
7. Як визначаються напруження в елементах статично невизначуваних конструкцій?

## 7. ОСНОВИ ТЕОРІЇ НАПРУЖЕНОГО І ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ

Внаслідок взаємодії частинок тіла при його навантаженні виникають **напруження**. Зовнішні сили намагаються змінити взаємне розташування частинок, а напруження перешкоджають цьому зміщенню.

### 7.1 Напруження в точці

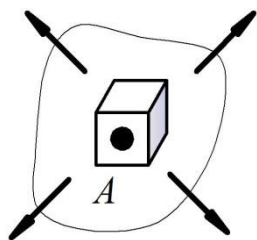


Рисунок 7.1 – Напружений стан в точці А

Досліджуючи напружений стан тіла в точці А, як правило виділяють елемент об'єму в вигляді нескінченно малого паралелепіпеда (Рис. 7.1), який у збільшеному масштабі показано на рис. 7.2, де початок координат суміщено з точкою А.

Внаслідок малості виділеного елемента можна вважати, що напруження на його гранях розподілено рівномірно. Повні напруження на гранях зображають у вигляді нормальних та дотичних складових (проекцій повних напружень на осі координат (Рис. 7.2)).

Нормальні напруження  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  (напрявлені по нормалям до перерізу), показані на рисунку, додатні так як вони розтягують паралелепіпед. Вони спричинюють лінійні деформації.

Дотичні напруження позначають  $\tau$  з двома індексами: **перший** відповідає напрямку нормалі до площини, а **другий** напрямку самого напруження. Іншими словами: **перший** індекс показує перпендикулярно якій осі напрямлено напруження, **другий** паралельно якій осі напрямлено напруження (Рис. 7.2, в).

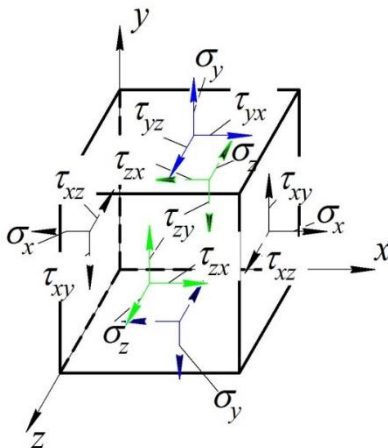


Рисунок 7.2 – Повні напруження на гранях елемента

Отже, на гранях елементарного паралелепіпеда діють дев'ять компонентів напружень. Цю сукупність можна записати у вигляді квадратної матриці або **тензора напружень**  $T_\sigma$ .

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \tau_{zx} & \sigma_z \end{vmatrix},$$

де у кожному рядку наведено складові напружень відповідно площадкам перпендикулярним до осей  $x, y, z$ . Далі буде показано, що коли відомий тензор напружень, то можна визначити напруження на будь-яких площадках елемента.

## 7.2 Закон парності дотичних напружень. Головні площадки і головні напруження

Не всі дев'ять компонентів напружень незалежні. В цьому легко переконатися, склавши умови рівноваги елемента щодо його обертання (Рис. 7.2). Для цього прирівняємо до нуля суми моментів усіх сил відносно осей  $x, y, z$ :



$$\sum M_{kx} = 0; \quad \sum M_{ky} = 0; \quad \sum M_{kz} = 0.$$

Напишемо суму моментів відносно осі  $O_z$ .

Сили, які паралельні цій осі і перетинають її, у рівняння не увійдуть. Моменти сил  $\sigma_y$  на двох гранях, перпендикулярних осі  $z$ , урівноважуються, так само як і моменти сил  $\sigma_y$  на верхній та нижній гранях елемента.

$$\text{Отже маємо } \tau_{xy} dy dz dx - \tau_{yx} dx dz dy = 0$$

Звідси знаходимо  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ .

Аналогічно з двох інших рівнянь знаходимо:  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ ;  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ .

Отже маємо рівності:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad (7.1)$$

які виражають **закон парності дотичних напружень**: дотичні напруження на двох будь-яких, але взаємно перпендикулярних площадках, які спрямовані перпендикулярно до лінії перетину площадок, однакові за модулем. При цьому вони намагаються повернути елемент у різні боки.

При зміні орієнтації площадок змінюються також напруження, що діють на них. При цьому можна знайти таке положення площадок, при якому дотичні напруження будуть дорівнювати нулю.

Площинки, на яких дотичні напруження дорівнюють нулю, називають **головними площадками**, а нормальні напруження, що діють на них – **головними напруженнями**.

Головні напруження позначають  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . При цьому індекси слід розставляти так, щоб виконувалась нерівність

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3. \quad (7.2)$$

Цю нерівність записують з урахуванням знаків напружень.

У залежності від кількості діючих головних напружень розрізняють **три види напруженого стану**.

1 – **одновісний або лінійний**. Напружений стан, в якому діє одне головне напруження. Два інших дорівнюють нулю.

2 – **двовісний або плоский**. Стан, в якому два головних напруження не нульові, а одне дорівнює нулю.

3 – **тривісний або об'ємний** напружений стан. Стан, в якому всі три головних напруження не дорівнюють нулю.

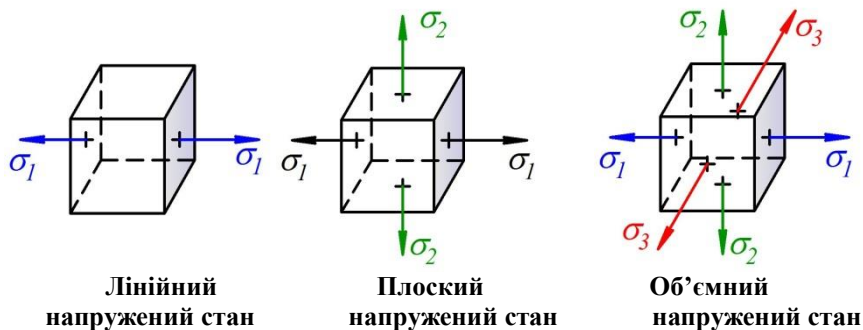


Рисунок 7.3 – Види напруженого стану

Крім того, напружений стан буває однорідним і неоднорідним. При однорідному напруженому стані напруження однакові в кожній точці будь-якого перерізу і всіх паралельних перерізах. У неоднорідному стані елемент слід вважати нескінченно малим. Тоді припущення про рівномірність розподілу напружень на його гранях виконується з точністю до малих другого порядку.

### 7.3 Лінійний напружений стан

Розглянемо призматичний стержень (Рис. 7.4), який зазнає простого розтягання силою  $P$ . В перерізах стержня, досить віддалених від точок прикладання зовнішніх зосереджених сил, напруження розподіляються рівномірно.

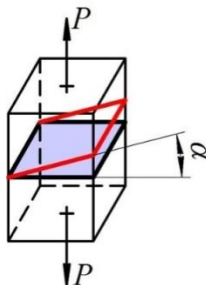


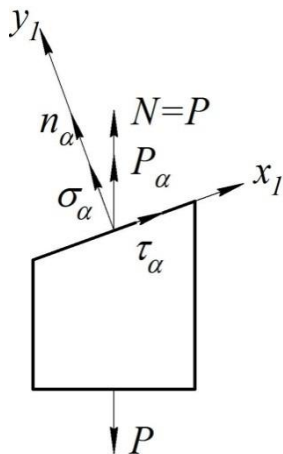
Рисунок 7.4 – Просте розтягання стержня

В поперечних перерізах перпендикулярних силі  $P$  нормальне напруження дорівнює:

$$\sigma_x = \frac{N}{F_0} = \frac{P}{F_0}.$$

Дотичні напруження тут дорівнюють нулю. Отже, ці перерізи є головними площадками.

Розглянемо тепер напруження на неголовній площадці, повернутій проти ходу годинникової стрілки на кут  $\alpha$  (Рис. 7.5). Таку площадку назвемо  $\alpha$ -площадкою, а напруження на ній:



$P_\alpha$  – повне напруження, що діє на цій площадці;

$\sigma_\alpha$  – нормальне напруження;

$\tau_\alpha$  – дотичне напруження;

$F_0$  – площа головної площадки;

$F_\alpha$  – площа нахиленої площадки.

Осьова сила в перерізі  $N = P$  є рівнодієюю повних напружень  $P_\alpha$ , що діють на площадці  $F_\alpha$ , площа якій дорівнює

Рисунок 7.5 – Напруження на нахиленій площадці

Отже,  $P_\alpha \cdot F_\alpha = N$ . Звідки

$$P_\alpha = \frac{N}{F_\alpha} = \frac{N}{F_0} \cos \alpha = \sigma_0 \cos \alpha. \quad (7.3)$$

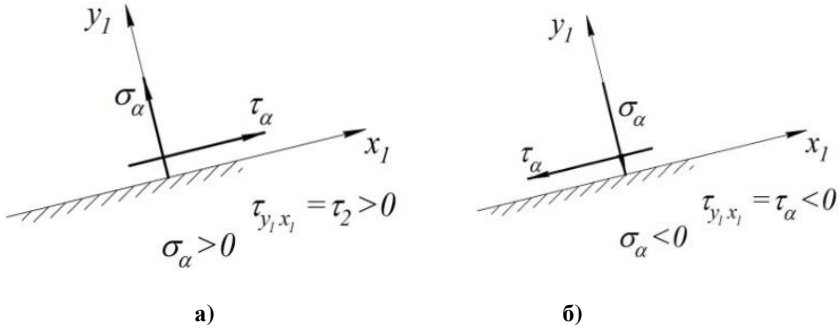


Рисунок 7.6 – Напруження на площадці, повернутій на кут  $\alpha$

Проекціюючи  $P_\alpha$  на нормаль  $n_\alpha$  і на площину перерізу  $F_\alpha$ , дістанемо формули для визначення нормальних і дотичних напружень, які діють на похилій площадці (Рис. 7.6, а):

$$\sigma_\alpha = P_\alpha \cos \alpha = \sigma_0 \cos^2 \alpha; \quad (7.4)$$

$$\tau_\alpha = P_\alpha \sin \alpha = \sigma_0 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\sigma_0}{2} \sin 2\alpha, \quad (7.5)$$

де  $2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin 2\alpha$ .

**Правило для визначення знаків напружень** стосовно до нахилених осей  $x_1, y_1$ : напруження вважаються додатними, якщо на правій грані вони намагаються повернути елемент проти годинникової стрілки.

Як видно, із формул, при повороті площадки напруження змінюються так (враховуючі, що  $\cos^2 45^\circ = \frac{1}{2}$ ,  $\sin(2 \cdot$



$45^\circ) = \sin 90^\circ = 1)$ :

$\alpha$	$\sigma_\alpha$	$\tau_\alpha$
$0^\circ$	$\sigma_0$	0
$45^\circ$	$\frac{\sigma_0}{2}$	$\frac{\sigma_0}{2}$
$90^\circ$	0	0

Отже:

- при простому розтяганні  

$$\sigma_1 = \sigma_0 = \frac{N}{F_0}, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0;$$
- при стисканні  

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -\sigma_0.$$

Дотичні напруження досягають свого найбільшого значення при  $\alpha = \pm 45^\circ$ , причому

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1}{2}.$$

## 7.4 Плоский напружений стан

Досліджуючи напружений стан елементів конструкцій, доводиться частіше мати справу з плоским (двовісним) напруженим станом. Він буває при крученні, згинанні та складному опорі. Усі означення та правила, які були введені в попередньому підрозділі залишаються в силі й для плоского напруженого стану.

Розглянемо прямокутний паралелепіпед (Рис. 7.7), грані якого є головними площадками. На них діють головні напруження  $\sigma_1, \sigma_2$ , що розтягують, а третє головне напруження  $\sigma_3 = 0$  (головний напрям, що відповідає  $\sigma_3$ , перпендикулярний до площини креслення).

Виберемо такий переріз, нормаль до якого складе з напрямом  $I$  кут  $\alpha_1$  (Рис. 7.7). З напрямом  $II$  та же нормаль складе кут  $\alpha_2$ . В тому ж перерізі діють нормальні  $\sigma_\alpha$  та дотичні  $\tau_\alpha$  напруження, які залежать від  $\sigma_1$ , та  $\sigma_2$ .

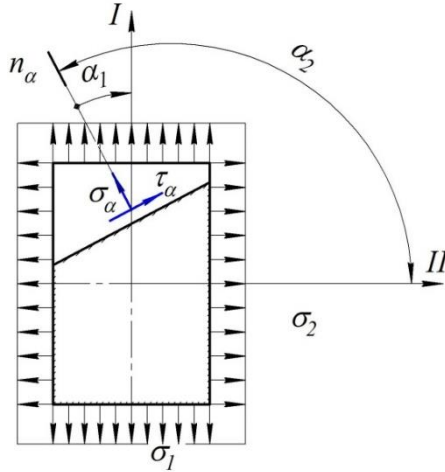


Рисунок 7.7 – Плоский напружений стан

Їх величину отримаємо, розглядаючи дії  $\sigma_1$ , та  $\sigma_2$  окремо та додаючи результати (застосовуючи принцип суперпозиції). Дія нормальних напружень, які визивають  $\sigma_1$ , виражається за формулою (7.4) та дорівнює  $\sigma_1 \cos^2 \alpha_1$ ; друга частина напружень  $\sigma_\alpha$ , яка викликана  $\sigma_2$ , дорівнює  $\sigma_2 \cos^2 \alpha_2$ , де  $\alpha_2 = 90^\circ + \alpha_1$ . Повне нормальне напруження:

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2 = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 (\alpha_1 + 90^\circ)$$

або

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \sin^2 \alpha_1. \quad (7.6)$$

За допомогою таких же міркувань визначені величини дотичних напружень за формулою (7.5) по обраній площадці:

$$\begin{aligned} \tau_\alpha &= \frac{1}{2} [\sigma_1 \sin 2\alpha_1 + \sigma_2 \sin 2\alpha_2] = \\ &= \frac{1}{2} [\sigma_1 \sin 2\alpha_1 + \sigma_2 \sin 2(\alpha_1 + 90^\circ)] \end{aligned}$$

або

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} 2 \sin \alpha_1. \quad (7.7)$$

У подальшому в формулах для  $\sigma_{\alpha}$  і  $\tau_{\alpha}$  кут  $\alpha_1$  будемо визначати через  $\alpha$  і **відраховувати його завжди від напрямку найбільшого головного напруження проти ходу годинникової стрілки.**

Користуючись формулами (7.6) і (7.7) для напружень на площадці  $a - a$  (Рис. 7.8), легко знаходити напруження на площадці  $b - b$ , їй перпендикулярній, яка має нормаль  $n_{\beta}$ , яка складає з напрямком найбільшого головного напруження кут  $\beta = \alpha + 90^{\circ}$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{\beta} &= \sigma_1 \cos^2 \beta + \sigma_2 \sin^2 \beta = \\ &= \sigma_1 \cos^2(\alpha + 90^{\circ}) + \sigma_2 \sin^2(\alpha + 90^{\circ}); \end{aligned}$$

$$\sigma_{\beta} = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha; \quad (7.6')$$

$$\tau_{\beta} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin^2 \beta = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(2\alpha + 180^{\circ}),$$

$$\tau_{\beta} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin^2 \alpha. \quad (7.7)$$

Додаючи формули (7.6) та (7.6'), отримаємо

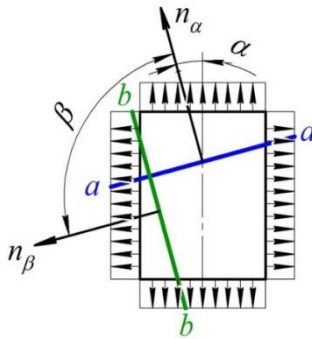


Рисунок 7.8 – Плоский напружений стан (поворот на  $90^{\circ}$ )

$$\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta} = \sigma_1 + \sigma_2 = \text{const.} \quad (7.8)$$

Властивість нормальних напружень (інваріантність): **сума нормальних напружень на двох взаємно перпендикулярних площадках інваріантна щодо нахилу цих площадок.**

Для дотичних напружень, порівнюючи формули (7.7) і (7.7'), отримаємо:

$$\tau_{\beta} = -\tau_{\alpha}. \quad (7.9)$$

Отже, **дотичні напруження на двох взаємно перпендикулярних площадках рівні за величиною і протилежні за знаком (закон парності дотичних напружень).**

Щоб знайти найбільше значення нормального напруження, необхідно дослідити вираз (7.6) на максимум. Прирівняємо похідну по  $\alpha$  від  $\sigma_{\alpha}$  та отримаємо:

$$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = -2\sigma_1 \cos\alpha + 2\sigma_2 \sin\alpha \cos\alpha$$

або

$$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = -(\sigma_1 - \sigma_2) \sin\alpha \cos\alpha = 0. \quad (7.10)$$

Співставляючи (7.10) та (7.7) бачимо, що умова максимуму для  $\sigma_{\alpha}$  співпадає з умовою рівності нулю дотичних напружень на відповідних площадках.

Отже  $\sigma_{\alpha}$  отримає найбільше значення або при  $\alpha = 0^{\circ}$ , або при  $\alpha = 90^{\circ}$ . Так як  $\sigma_1 > \sigma_2$ , то

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha \max} &= \sigma_1 \quad (\text{при } \alpha = 0^{\circ}), \\ \sigma_{\alpha \min} &= \sigma_2 \quad (\text{при } \alpha = 90^{\circ}), \end{aligned}$$

тобто найбільше і найменше нормальні напруження в даній точці – це головні напруження  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$ , які діють по взаємно перпендикулярними площадкам, вільним від дотичних напружень.



Найбільше значення дотичних напружень як видно з формули (7.7), буде:

$$\tau_{\alpha \max} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \text{ (при } \sin 2\alpha = 1, \alpha = 45^\circ\text{)}. \quad (7.11)$$

По площадкам, паралельним  $\sigma_2$ , найбільше дотичне напруження буде:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1}{2}. \quad (7.11')$$

### 7.5 Пряма задача в плоскому напруженому стані. Круг напружень (круг Мора)

В теорії напруженого стану можна відокремити дві основні задачі: пряму і зворотну.

**Пряма задача.** В точці відомі положення головних площадок і відповідні до них головні напруження: треба знайти нормальні і дотичні напруження, що діють по площадках, які нахилені під заданим кутом  $\alpha$  до головних.

**Зворотна задача.** В точці відомі нормальні і дотичні напруження, які діють у двох взаємно перпендикулярних площадках, що проходять через дану точку, треба знайти головні площадки і головні напруження. Аналітичне розв'язання прямої задачі дається формулами (7.4) – (7.7').

Залежність напруження від кута нахилу площадки, на якій вони діють, має просту геометричну інтерпретацію у вигляді діаграми, яка називається **кругом напружень Мора**. Першим створив графічне представлення напруження для подовжнього і поперечного напруження горизонтальної балки, що згиналася, був Карл Кульман.

Вклад Мора полягає у використанні цього підходу для плоского і об'ємного напружених станів і визначення критерію міцності, ґрунтованого на круговій діаграмі напруження.

Позначимо:

$$\alpha = \sigma_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (7.12)$$

Тоді напруження на похилих площадках можна представити у вигляді:

$$\sigma_\alpha = \alpha + R \cos 2\alpha; \quad \tau_\alpha = R \sin 2\alpha.$$

Ці рівняння представляють коло в параметричній формі. Вони еквівалентні рівняння:

$$(\sigma_\alpha - \alpha)^2 + \tau_\alpha^2 = R^2.$$

Даний спосіб дозволяє визначити дотичні і нормальні напруження в будь-якій точці конструкції.

Проаналізуємо напружений стан за допомогою простої графічної побудови. Візьмемо прямокутну систему координат  $\sigma$ - $\tau$ , тобто по осі абсцис будемо відкладати значення головних  $\sigma_1, \sigma_2$ , а також нормальних  $\sigma_\alpha, \sigma_\beta$  напружень, а по осі ординат – значення  $\tau_\alpha, \tau_\beta$  (Рис. 7.9). Вісь  $\sigma$  зручно напрямляти паралельно найбільшому головному напруженню  $\sigma$ . Порядок графічного розв'язання задачі покажемо на конкретному прикладі напруженого стану, зображеного на рис. 7.9.

Вибравши для напружень новий масштаб відкладаємо по осі  $\sigma$  відрізки:  $OA = \sigma_1; OB = \sigma_2$ . На відрізку  $AB$  як на діаметрі будемо коло з центром в точці  $C$ . Таким чином ми побудували **коло напружень або круг Мора. Радіус круга Мора:**

$$R = AC = BC = CD = \frac{AB}{2} = \frac{OA - OB}{2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \quad (7.13)$$

Точка  $D$  круга Мора буде відповідати вибраній площадці; її координати  $OK$  і  $DK$  дорівнюють відповідно  $\sigma_\alpha$  і  $\tau_\alpha$ . Дійсно, із трикутника  $KCD$ , маємо:

$$\begin{aligned} KD &= R \sin 2\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha = \tau_\alpha; \\ OK &= OB + BC + KC = \sigma_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos^2 \alpha = \\ &= \sigma_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} (1 + \cos^2 \alpha) = \sigma_2 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos^2 \alpha = \\ &= \sigma_2 + \sigma_1 \cos^2 \alpha - \sigma_2 \cos^2 \alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha = \sigma_\alpha. \end{aligned}$$

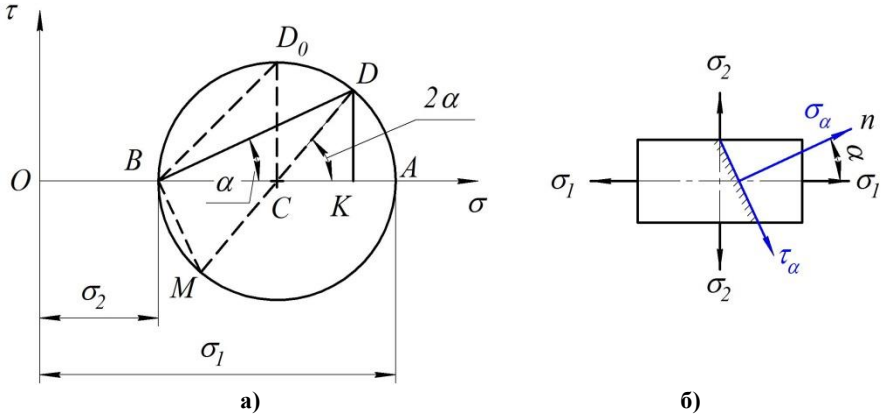


Рисунок 7.9 – Круг Мора

Визначивши побудовою круга Мора  $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$ , зобразимо їх на рисунку виділеного елемента, враховуючи знаки цих напружень (Рис. 7.9). Поеднаємо лінію дії найбільшого головного напруження  $\sigma_1$  з віссю  $\sigma$  на крузі; тоді лінія  $BD$  нахилена до осі під кутом  $\alpha$ , буде паралельна нормалі до розглянутої площадці, а значить, паралельна  $\sigma_\alpha$ ; лінія  $BM$  буде паралельна  $\tau_\alpha$ .

Як видно з рис. 7.10 найбільше значення дотичних напружень дорівнює  $CD_0$ , тобто радіусу круга :

$$\max \tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad (7.13)$$

відповідно кут  $2\alpha = 90^\circ$  і кут  $\alpha = 45^\circ$ . В крузі величина  $\tau_{\alpha \max}$  зображена ординатою  $CD_0$ , абсцисою для котрій служить

$$OC = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2},$$

на тієї ж площадці, де  $\tau_\alpha = \tau_{\max}$  нормальне напруження являється середнім.

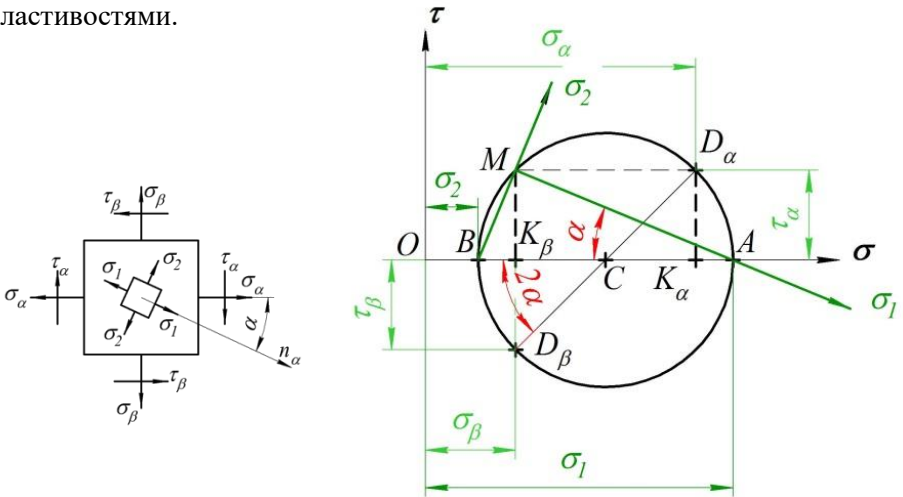
## 7.6 Зворотна задача в плоскому напруженому стані

Іноді потрібно вирішувати задачу зворотну розглянутої у попередньому підрозділі, тобто по відомим напруженням  $\sigma_\alpha$ ,  $\tau_\alpha$ ,  $\sigma_\beta$ ,  $\tau_\beta$  потрібно знайти головні напруження.

Вирішимо цю задачу, користуючись кругом напружень. Припустимо, що відомі напруження  $\sigma_\alpha, \tau_\alpha, \sigma_\beta, \tau_\beta$  на взаємно перпендикулярних площадках виділеного елемента (Рис. 7.10, а) і  $\sigma_\alpha > \sigma_\beta$ , а  $\tau_\alpha > 0$ . В системі прямокутних координат  $\sigma \sim \tau$  виберемо точку  $D_\alpha$  з координатами  $\sigma_\alpha, \tau_\alpha$  та точку  $D_\beta$  з координатами  $\sigma_\beta, \tau_\beta$  (Рис. 7.10, б).

Як значиться при розгляді прямої задачі, точки  $D_\alpha$  та  $D_\beta$  лежать на кінцях одного діаметра круга Мора. Далі знаходимо центра круга – точку  $C$  і радіус  $CD_\alpha = CD_\beta$ . Будуємо круг з таким радіусом. Абсциси точок перетину круга з віссю  $\sigma$  – відрізки  $OA$  та  $OB$  – дають значення головних напружень  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$ .

Для визначення положення головних площадок знайдемо полюс та скористаємось його властивостями.



а) б)  
Рисунок 7.10 – Зворотна задача

З цією метою з точки  $D_\alpha$  проведемо лінію паралельну лінії дії  $\sigma_\alpha$ . Точка  $M$  перетину цієї лінії з колом і буде полюсом. Поєднаємо полюс  $M$  з точками  $A$  та  $B$ , і отримаємо напрям головних напружень  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$ .

Головні площадки перпендикулярні до знайдених напрямів головних напружень. На рис. 7.10, а) всередині вихідного елемента видалимо елемент, обмежений головними площадками і покажемо головні напруження  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$ .

За допомогою круга Мора визначимо аналітичні вирази головних напружень  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$ .

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= OA = OC + CA; \\ \sigma_2 &= OB = OC - CB.\end{aligned}\quad (7.14)$$

Отже,

$$OC = \frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2}; \quad (7.15)$$

$$AC = CB = CD_\alpha = \sqrt{CK_\alpha^2 + D_\alpha K_\alpha^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2}. \quad (7.16)$$

Підставивши (7.16) та (7.15) в (7.14), отримаємо:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \left(\frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2}; \\ \sigma_2 &= \left(\frac{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}{2}\right) - \sqrt{\left(\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{2}\right)^2 + \tau_\alpha^2};\end{aligned}\quad (7.17)$$

або

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{1}{2} \left[ \sigma_\alpha + \sigma_\beta + \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2} \right]; \\ \sigma_2 &= \frac{1}{2} \left[ \sigma_\alpha + \sigma_\beta - \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2} \right].\end{aligned}\quad (7.17)$$

Враховуючи прийняте правило знаків, знайдемо формулу для тангенса кута нахилу головного напруження відносно осі  $\sigma$ . З рис. 7.12, б) видно, що

$$tg\alpha = -\frac{MK_{\beta}}{AK_{\beta}} = -\frac{MK_{\beta}}{OA - OK_{\beta}} = \frac{-\tau_{\beta}}{\sigma_1 - \sigma_{\beta}}.$$

Отже,

$$tg\alpha = \frac{-\tau_{\beta}}{\sigma_1 - \sigma_{\beta}}. \quad (7.18)$$

Ця формула і визначає єдине значення кута  $\alpha$ , на який треба повернути нормаль  $n_{\alpha}$ , щоб знайти напрям алгебраїчно більшого головного напруження.

### 7.7 Об'ємний напружений стан (о.н.с.)

У розрахунковій практиці о.н.с. зустрічається рідко, тому що завжди можна знехтувати меншим напруженням і звести до плоского або навіть лінійного напруженого стану. Однак, якщо всі три головних напруження величини одного порядку, то

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cos^2 \alpha_3,$$

$$\tau_{\alpha} = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \cos^2 \alpha_3 - \sigma_{\alpha}^2},$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

Площинки, рівнонахильні до головних осей, називаються «октаедричними», а напруження, що діють на даних площадках, — **октаедричними** (Рис.7.11).

Характеристики цих площадок:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha \quad ; \quad \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \alpha_3 = 1;$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{3}; \quad \sigma_{окт} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3};$$

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.$$

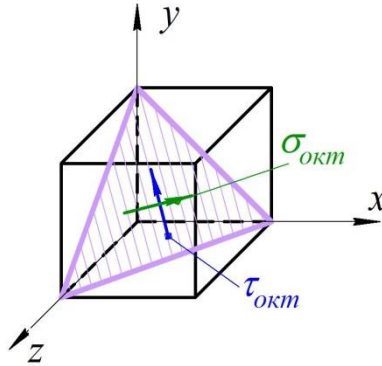


Рисунок 7.11 – Октаедричні напруження

## 7.8 Деформації при об'ємному напруженому стані. Узагальнений закон Гука

Досліджуючи деформації й розглядаючи питання при об'ємному та плоскому станах, будемо крім основних гіпотез та припущень вважати, що матеріал відповідає закону Гука, а деформації малі.

Дослідженнями простого розтягання–стискання, встановлено, що **відносна повздовжня деформація**

$$\varepsilon = \sigma/E, \quad (7.19)$$

**а відносна поперечна деформація**

$$\varepsilon' = -\mu \sigma/E, \quad (7.20)$$

де  $\mu = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon}$  – **безрозмірний коефіцієнт Пуассона**.

Для абсолютно крихкого матеріалу коефіцієнт Пуассона дорівнює 0, для абсолютно пружного – 0,5. Для більшості сталей цей коефіцієнт дорівнює приблизно 0,3, для гуми він приблизно дорівнює 0,49. Коефіцієнт Пуассона може бути від'ємним, хоча така ситуація екзотична. Це значить, що при розтяганні поперечні розміри тіла

збільшуються. Матеріали з такими властивостями отримали назву «ауксетики», це полімери.

Встановимо залежності між деформацією та напруженнями в загальному випадку об'ємного напруженого стану.

Розглядаючи деформування елемента з розмірами  $a \times b \times c$  у загальному випадку о.н.с. від головних напружень  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , (Рис. 7.12), застосовуючи закон Гука і принцип суперпозиції, дістанемо вирази для **головних відносних подовжень**.

Внаслідок деформації ребра елемента змінюють свою довжину і дорівнюють  $(a + \Delta a)$ ;  $(b + \Delta b)$ ;  $(c + \Delta c)$ .

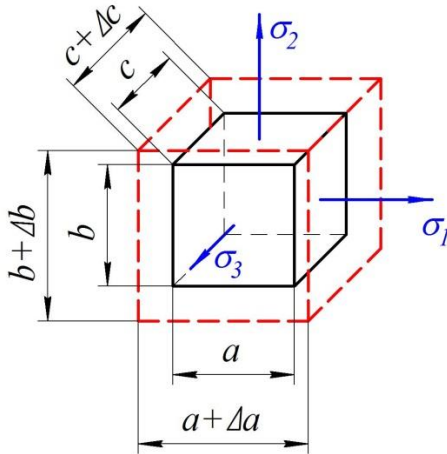


Рисунок 7.12 – Головні напруження і головні подовження

Величини

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta a}{a}; \varepsilon_2 = \frac{\Delta b}{b}; \varepsilon_3 = \frac{\Delta c}{c}$$

називаються **головними подовженнями** і є **відносними подовженнями в головних напрямках**.

Застосовуючи принцип суперпозиції, можна записати

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + \varepsilon_1'' + \varepsilon_1''' ,$$



де  $\varepsilon_1'$  – відносне подовження в напрямі  $\sigma_1$  спричинене тільки напруженням  $\sigma_1$  ( $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ );  $\varepsilon_1''$  – відносне подовження в тому самому напрямі, спричинене дією тільки  $\sigma_2$ ;  $\varepsilon_1'''$  – подовження, спричинене дією  $\sigma_3$ .

Оскільки напрям  $\sigma_2$  для самого напруження  $\sigma_1$  є повздовжнім (він розтягує грань  $a$ ), а  $\sigma_2$  і  $\sigma_3$  є поперечними (вони звужують грань  $a$ ), то, застосовуючи формули (7.19) та (7.20), знаходимо, що:

$$\varepsilon_1' = \frac{\sigma_1}{E}; \quad \varepsilon_1'' = -\mu \frac{\sigma_2}{E}; \quad \varepsilon_1''' = -\mu \frac{\sigma_3}{E}.$$

Склавши ці величини, матимемо:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + \varepsilon_1'' + \varepsilon_1''' = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)].$$

Аналогічно дістанемо формули й для двох інших подовжень  $\sigma_2$  і  $\sigma_3$ . Тоді

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{aligned} \right\} \quad (7.21)$$

Ці формули представляють собою **узагальнений закон Гука** для ізотропного тіла, тобто **залежність між деформаціями та головними напруженнями в випадку тривісного напруженого стану**.

Зауважимо, що стискаючи напруження підставляються у ці формули із знаком «мінус». З формул (7.21) легко дістати формули Гука для плоского напруженого стану. Наприклад, при  $\sigma_2 = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu\sigma_3]; \\ \varepsilon_2 &= -\frac{\mu}{E} [\sigma_1 + \sigma_3]; \\ \varepsilon_3 &= -\frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu\sigma_1]. \end{aligned} \right\} \quad (7.22)$$

### Об'ємна деформація

Встановимо залежність зміни об'єму  $\varepsilon_V$  від дії головних напружень. До деформації елемент займав об'єм  $V_0 = abc$ . У деформованого стані його об'єм:

$$\begin{aligned} V &= (a + \Delta a) \cdot (b + \Delta b) \cdot (c + \Delta c) = \\ &= abc \left(1 + \frac{\Delta a}{a}\right) \left(1 + \frac{\Delta b}{b}\right) \left(1 + \frac{\Delta c}{c}\right) = \\ &= V_0(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3) = \\ &= V_0(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \cdot \varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3). \end{aligned}$$

Враховуючи малість відносних лінійних деформацій, останніми чотирма членами можна знехтувати. Тоді відносна зміна об'єму буде:

$$\varepsilon_V = \frac{V - V_0}{V_0} = \frac{V_0(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)}{V_0} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Виразивши головні подовження через головні напруження згідно з (7.21), дістанемо

$$\varepsilon_V = \frac{1 - 2\mu}{E} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3). \quad (7.23)$$

Зокрема, при рівномірному всебічному стисканні, коли

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -P,$$

$$\varepsilon_V = \frac{-P}{K},$$

де

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}. \quad (7.24)$$

Величина  $K$  називається **модулем об'ємної деформації**.

Із формули (7.23) видно, що коли коефіцієнт Пуассона  $\mu = 0,5$  (наприклад, гума), об'єм тіла не змінюється.

## 7.9 Потенціальна енергія деформації

**Потенціальною енергією деформації** називають енергію, що накопичується в тілі при його пружному деформуванні і позначають  $U$ . Значення потенціальної енергії деформації, яке припадає на одиницю об'єму ( $1 \text{ см}^3$ ) тіла, називають питомою потенціальною енергією деформації і позначають  $u$ .

Потенціальна енергія деформації чисельно дорівнює роботі зовнішніх сил, яка витрачається при пружному деформуванні, тобто

$$U = A_p. \quad (7.25)$$

У межах пружності повна робота деформації визначається площею трикутника  $OAK$  (Рис.7.13):

$$A_p = \frac{P \cdot \Delta \ell}{2}. \quad (7.25')$$

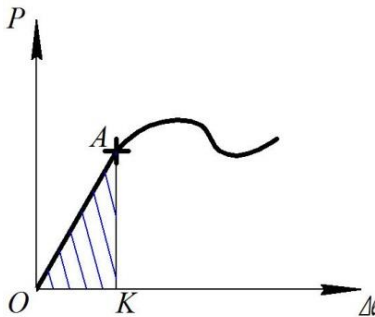


Рисунок 7.13 – Діаграма розтягання

При простому розтяганні (стисканні):

$$U = \frac{P \cdot \Delta \ell}{2}. \quad (7.26)$$

**Питома потенціальна енергія:**

$$u = \frac{P \cdot \Delta \ell}{2F \ell} = \frac{\sigma \varepsilon}{2}. \quad (7.27)$$

Враховуючи, що

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E},$$

матимо

$$u = \frac{\sigma^2}{2E}. \quad (7.28)$$

якщо взяти кубик з довжиною ребер, що дорівнює 1, на яких діють головні напруження  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , то ці зусилля здійснюють переміщення  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  оскільки ребра мають одиничну довжину. На підставі формули (7.27) будемо мати:

$$u = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \varepsilon_3}{2}. \quad (7.29)$$

Підставивши в ці формули значення  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  із загального закону Гука (7.21), знайдемо:

$$u = \frac{1}{2E} [\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - 2\mu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)]. \quad (7.30)$$

При деформуванні елемента змінюється як його об'єм, так і форма (з кубика він перетворюється на паралелепіпед). Тоді повна питома потенціальна енергія деформації:

$$u = u_V + u_\Phi, \quad (7.31)$$

де  $u_V$  – питома потенціальна енергія зміни об'єму,  $u_\Phi$  – енергія, яка накопичується внаслідок зміни форми елемента:

$$u_V = \frac{1 - 2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2; \quad (7.32)$$

$$\begin{aligned} u_\Phi &= \frac{1 + \mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1) = \\ &= \frac{1 + \mu}{6E} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \end{aligned} \quad (7.33)$$

### 7.10 Контрольні запитання

1. Внаслідок чого в тілі виникають напруження?
2. Значення індексів при позначенні напружень.
3. Які напруження називаються головними?
4. Як позначаються головні напруження?
5. У чому полягає закон парності дотичних напружень?
6. Три види напруженого стану.
7. Правило знаків для визначення напружень.
8. В якому перетині бруса при розтягуванні виникають максимальні нормальні напруження і в якому перетині - максимальні дотичні напруження?
9. Який стан матеріалу називається лінійним, плоским і об'ємним напруженим станом?
10. Круг Мора. Принцип побудови та можливості використання.
11. Які площадки в тілі називають головними?
12. Узагальнений закон Гука.
13. Потенціальна енергія деформації.
14. Коефіцієнт Пуасона.
15. Пряма задача в плоскому напруженому стані.
16. Зворотна задача в плоскому напруженому стані.
17. Написати тензор напружень.

## 8. КРИТЕРІЇ МІЦНОСТІ

### 8.1 Критерії міцності

Найважливішим завданням інженерного розрахунку є оцінка міцності елементів машин і споруд за відомим напруженим станом.

Небезпечними вважаються напруження, при яких з'являються **залишкові деформації** (наступає пластична деформація), тобто починається руйнування.

Із небезпечних напружень (при відомому коефіцієнті запасу міцності), визначають допустимі напруження при розтяганні [ $\sigma_p$ ] або стисканні [ $\sigma_{ст}$ ] при лінійному напруженому стані. Складніше вирішується це питання при плоскому і об'ємному напруженому стані (див. розділ. 7).

У цих випадках, як показують дослідження, для одного і того самого матеріалу небезпечний стан може настати при різних граничних значеннях головних напружень  $\sigma_{1н}$ ,  $\sigma_{2н}$ ,  $\sigma_{3н}$  залежно від співвідношення їх.

Тому, на підставі теоретичних і практичних досліджень поведінки різних матеріалів, вводять гіпотезу про переважний вплив на міцність деякого фактора. Вважають, що порушення міцності матеріалу при будь-якому напруженому стані відбудеться тільки тоді, коли цей фактор досягне певного граничного значення. Граничне значення фактора знаходять з випробувань на просте розтягання або стискання, а іноді – на кручення. Отже, для вирішення задач плоского і об'ємного напруженого стану, вводять поняття **критерію міцності**. Він дає можливість складний напружений стан привести до простого і знайти таке еквівалентне (розрахункове) напруження, яке в обох випадках даватиме однаковий коефіцієнт запасу. Під **коефіцієнтом запасу міцності** розуміють число  $n$ , що показує, в скільки разів треба одночасно збільшити всі компоненти напруженого стану  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$ , щоб він став граничним:

$$\sigma_{1н} = n\sigma_1; \quad \sigma_{2н} = n\sigma_2; \quad \sigma_{3н} = n\sigma_3. \quad (8.1)$$

Вибрану таким способом гіпотезу називають **механічною теорією міцності**, або просто **теорією міцності**.

**Існують чотири класичні теорії міцності.**

**I теорія міцності – теорія найбільших нормальних напружень.** Згідно з цією теорією руйнування матеріалу буде тоді, коли найбільше нормальне напруження досягає небезпечного значення для даного матеріалу. Умова міцності з коефіцієнтом запасу  $n$  має вигляд

$$\sigma_1 = \sigma_{max} \leq [\sigma] = \frac{\sigma_H}{n}, \quad (8.2)$$

де  $n$  – коефіцієнт запасу;

$\sigma_H$  – визначається при простому розтяганні (стисканні).

Дослідна перевірка показує, що ця теорія дає задовільні результати лише для дуже крихких матеріалів (наприклад, для каменю, цегли, кераміки, інструментальної сталі).

**II теорія – теорія найбільших лінійних деформацій.**

Згідно з цією теорією, критерієм міцності вважають найбільшу за абсолютним значенням лінійну деформацію. Тобто руйнування виникає тоді, коли найбільше лінійне відносне подовження  $\varepsilon_{max}$  досягає небезпечного значення  $\varepsilon_H$ . Останнє визначають при простому розтяганні (стисканні) зразків з даного матеріалу. Отже **умова руйнування** має вигляд

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_H, \quad (8.3)$$

**а умова міцності:**

$$\varepsilon_{max} \leq [\varepsilon] = \frac{\varepsilon_H}{n}. \quad (8.4)$$

Використовуючи узагальнений закон Гука, умову міцності виразимо через напруження  $[\sigma] = [\varepsilon] \cdot E$ , або  $[\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E}$ . Якщо найбільше відносне подовження буде  $\varepsilon_1$ , а допустиме напруження дорівнює  $[\sigma]$ , то з (8.4) маємо:

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)],$$

або

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]. \quad (8.5)$$

Як видно з умови міцності (8.5), для II теорії, з допустимим напруженням треба порівнювати не одне з трьох головних напружень, а їх комбінацію. **Еквівалентне напруження** в цьому разі

$$\sigma_{екв}^{II} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3). \quad (8.6)$$

Дослідна перевірка цієї теорії показала узгоджені результати тільки для крихкого стану матеріалу (наприклад: для легованого чавуну або високоміцних сталей низького відпускання).

### III теорія - теорія найбільших дотичних напружень.

Згідно з цією теорією руйнування матеріалу буде тоді, коли найбільше дотичне напруження  $\tau_{max}$  досягне небезпечного значення  $\tau_H$ , яке визначають при досягненні граничного стану у випадку простого розтягання зразків з даного матеріалу.

**Умова руйнування** має вигляд

$$\tau_{max} = \tau_H, \quad (8.7)$$

**а умова міцності**

$$\tau_{max} \leq [\tau] = \frac{\tau_H}{n}. \quad (8.8)$$

Згідно формул (8.7, 8.8)  $\tau_{max} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$ , а  $\tau_H = \frac{1}{2}\sigma_H$ , то умови (8.7) і (8.8) можна виразити через головні напруження.

**Умова руйнування:**

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_n; \quad (8.9)$$

**Умова міцності:**

$$\sigma_1 - \sigma_3 = [\sigma]. \quad (8.10)$$



Отже, еквівалентним напруженням за третьою теорією буде

$$\sigma_{\text{екв}}^{\text{III}} = \sigma_1 - \sigma_3. \quad (8.11)$$

Третя теорія міцності добре підтверджується дослідженнями для пластичних матеріалів, у яких допустимі напруження на розтягання і стискання однакові. Недоліком цієї теорії є те, що вона не враховує проміжного головного напруження  $\sigma_2$ .

**IV теорія – критерій питомої потенціальної енергії деформації формозміни.**

Згідно з цією теорією, небезпечний стан (текучість) у загальному випадку напруженого стану виникає тоді, коли. Останнє можна визначити при простому розтяганні в момент настання текучості.

**Умова настання текучості:**

$$U_{\phi} = U_{\phi.т.} \quad (8.12)$$

**Умова міцності:**

$$U_{\phi} \leq [U_{\phi}]. \quad (8.13).$$

Припускаючи, що закон Гука справедливий до настання граничного стану, можна питому потенціальну енергію формозміни записати у вигляді:

$$U_{\phi} = \frac{1 + \mu}{3E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)]. \quad (8.14)$$

При простому розтяганні в момент текучості ( $\sigma_1 = \sigma_T$ ;  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ) маємо

$$U_{\phi.т.} = \frac{1 + \mu}{3E} \sigma_T^2. \quad (8.15)$$

Підставляючи (8.14) і (8.15) в умову (8.12), отримаємо

$$\sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} = \sigma_T. \quad (8.16)$$

**Умова міцності** при цьому має вигляд

$$\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq \frac{\sigma_T}{n} = [\sigma], \quad (8.17)$$

**а еквівалентне напруження за четвертою теорією**

$$\sigma_{\text{екв}}^{IV} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}.$$

Дослідження добре підтверджують четверту теорію для пластичних матеріалів при розтяганні та стискання. Для цих матеріалів розрахунки по четвертій теорії більш точні, ніж по третій теорії.

## 8.2 Поняття про теорію Мора

Критерій Мора ґрунтується на припущенні, що міцність матеріалів у загальному випадку напруженого стану залежить в основному від значення і знаку найбільшого  $\sigma_1$  і найменшим  $\sigma_3$  головних напружень. Середнє за модулем головне напруження  $\sigma_2$  лише неістотно впливає на міцність. Досліди з мідними, нікелевими і чавунними трубками показали, що похибка, яка пов'язана з тим, що не враховується  $\sigma_2$  не вище 12-15%. Виходячи з цього припущення будь-який напружений стан можна зобразити кругом Мора, побудованим на напруженнях  $\sigma_1$  і  $\sigma_3$ .

**Умова міцності по теорії Мора:**

$$\sigma_{\text{розр}}^M = \sigma_1 - \alpha \sigma_3 \leq [\sigma], \quad (8.19)$$

де

$$\alpha = \frac{[\sigma]_p}{[\sigma]_{\text{ст}}}.$$

Ця теорія добре узгоджується і для крихких і для пластичних матеріалів. Якщо  $\alpha = 1$ , то отримуємо формулу для III теорії.

Оскільки перша і друга теорії міцності мають істотні недоліки, то останнім часом панує думка про недоцільність застосування їх. Отже для практичних розрахунків слід рекомендувати четверту або третю теорію міцності для матеріалів з однаковим опором розтягнанню та стисканню і **теорію Мора – для матеріалів, опір яких розтягнанню та стисканню різний, тобто для крихких матеріалів.**

Недоліки розглянутих теорій, а також поява нових матеріалів (пластмас, композитів тощо) призвели до розробки нових теорій міцності (Ю.І. Ягна, Г.С. Писаренка, Я.Б. Фрідмана та ін.). Більшість з них ґрунтується на виборі такої форми граничної поверхні, яка дає змогу найповніше враховувати особливості опору даного класу матеріалів в умовах складного напруженого стану. Все це розглядається в спеціальних курсах.

### 8.3 Контрольні запитання

1. На яких припущеннях засновані перша, друга, третя і четверта теорії міцності?
2. Для чого служать теорії міцності?
3. Для яких матеріалів слід використовувати теорію Мора?
4. Що розуміють під коефіцієнтом запасу?
5. Умова міцності по I теорії.
6. Для яких матеріалів I теорія міцності дає задовільні результати?
7. Умова міцності і еквівалентне напруження по II теорії міцності.
8. Для яких матеріалів II теорія міцності дає задовільні результати?
9. Умова міцності і еквівалентне напруження по III теорії міцності.
10. Для яких матеріалів III теорія міцності дає задовільні результати?
11. Умова міцності і еквівалентне напруження по четвертій теорії міцно
12. Для яких матеріалів четверта теорія міцності дає задовільні результати?
- 13.3 чим пов'язана похибка та якої величини вона досягає при використанні критерію Мора?

## 9. ЗСУВ

### 9.1 Розрахунки на зріз

Деформація зсуву можлива тоді, коли на елемент діє дві однакові протилежно направлені сили, які знаходяться на близькій відстані одна від одної і діють перпендикулярно осі стержня (Рис. 9.1, а). В умовах зсуву працюють деталі різних з'єднань (заклепкових, болтових, зварних).

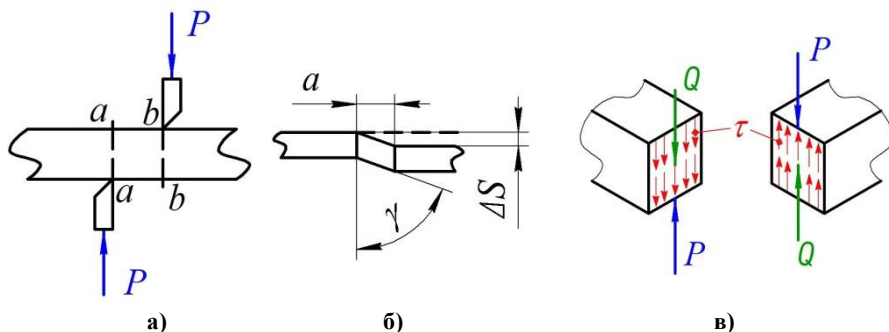


Рисунок 9.1 – Деформація зрізу

Абсолютне зміщення перерізів  $aa$  і  $bb$  позначають  $\Delta S$  і називають **абсолютним зсувом** (Рис. 9.1, б). Кут  $\gamma$  називають **кутом зсуву** або **відносним зсувом**. З рис. 9.1, б маємо  $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta S}{a}$  і, враховуючи малість кута  $\gamma$ , можна вважати, що

$$\gamma = \frac{\Delta S}{a}. \quad (9.1)$$

#### Визначення дотичних напружень при зсуві

Використовуючи метод перерізів, знаходимо, що на відрізку  $ab$  поперечна сила  $Q = P$ . Встановимо зв'язок між поперечною силою і напруженням. З формули (3.4) маємо  $\int_F \tau dF = Q$ . Вважаючи, що дотичні напруження  $\tau$  рівномірно розподілені по площі поперечного перерізу  $F$  (Рис. 9.1, в) ( $\tau = \text{const}$ ), будемо мати  $Q = P = \tau F$ , звідки

$$\tau = \frac{Q}{F} = \frac{P}{F}. \quad (9.2)$$

### Умова міцності при зсуві

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max}}{F_{зсуву}} \leq [\tau]. \quad (9.3)$$

де  $F_{зсуву}$  – вся площа, яка зсувається;  $Q_{max}$  – максимальна поперечна сила;  $[\tau]$  – допустимі напруження при зсуві.

### 9.2 Чистий зсув

Напружений стан, коли на чотирьох гранях прямокутного елемента діють тільки дотичні напруження називається **ЧИСТИМ ЗСУВОМ** (Рис. 9.2).

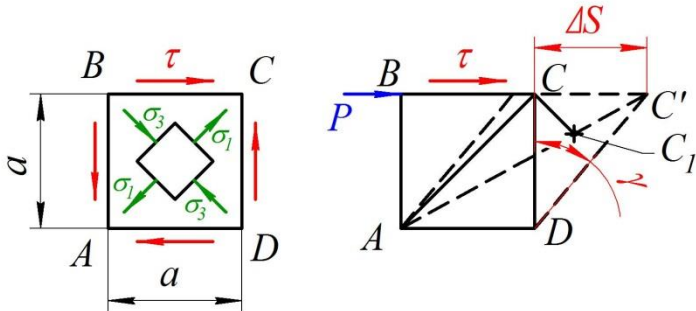


Рисунок 9.2 – Схема чистого зсуву

В цьому випадку головні площадки нахилені до граней елемента на кут  $45^\circ$ , а головні напруження  $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$ .

При чистому зсуві діагональ  $ac$ , яка збігається з напрямком  $\sigma_1$ , подовжується, а діагональ  $bd$ , що збігається з напрямком стискаючого напруження  $\sigma_3$ , укорочується. Внаслідок цього квадрат перетворюється на ромб. **Кут зсуву** (відносний зсув) буде визначатися за формулою (9.1).

### Закон Гука при чистому зсуві

Залежність між навантаженням та деформацією при зсуві можна простежити за так званою діаграмою зсуву. Її можна отримати при скручуванні тонкостінної труби (Рис. 9.3). На діаграмі показано характеристики міцності: границю пропорційності  $\tau_{пц}$ , границю текучості  $\tau_T$  та границю міцності  $\tau_B$ . Виділений елемент стінки труби перебуває в умовах чистого зсуву.

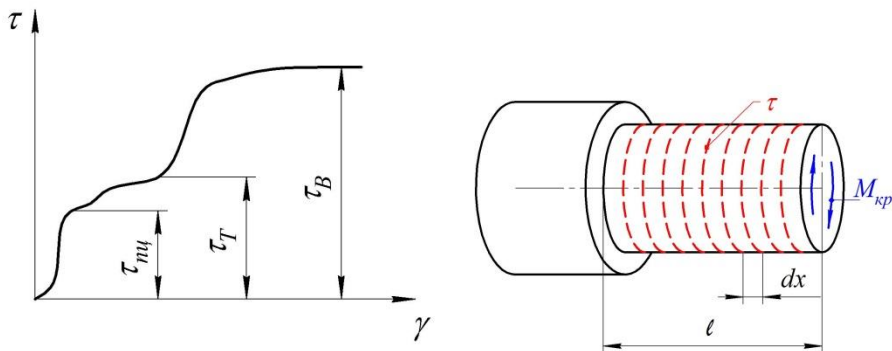


Рисунок 9.3 – Кручення тонкостінної труби

Розглядаючи деформацію цього елемента, визначимо, що між відносним зсувом  $\gamma$  та дотичним напруженням  $\tau$  існує лінійна залежність, яку можна виразити формулою (закон Гука для чистого зсуву):

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \text{ або } \tau = G \cdot \gamma, \quad (9.4)$$

де  $G$  – коефіцієнт пропорційності, який називається **модулем пружності при зсуві**, або **модулем пружності другого роду**, і виражається в мегапаскалях (МПа).

Для ізотропних матеріалів між модулем пружності  $G$  при зсуві, та модулем пружності  $E$  при розтяганні існує певна залежність. Для визначення її розглянемо деформацію елемента в умовах чистого зсуву (див. рис. 9.2). Довжина діагоналі  $AC$ , до деформації,  $\ell = a\sqrt{2}$ .

Знайдемо подовження  $\Delta\ell$  діагоналі  $AC$ .

Розглядаючи геометричну картину деформації, матимемо

$$\Delta \ell = C_1 C \approx C' C_1 \cos 45^\circ = \frac{\Delta S}{\sqrt{2}}.$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{\Delta S}{a\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\gamma}{2},$$

де

$$\gamma = \frac{\Delta S}{a}; \Delta S = a\gamma.$$

Оскільки головне напруження  $\sigma_1$  діє в напрямі діагоналі  $AC$ , то її відносно подовження

$$\begin{aligned} \varepsilon = \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] = \\ &= \frac{1}{E} [\tau - \mu(0 - \tau)] = \frac{\tau(1 + \mu)}{E}. \end{aligned} \quad (9.5)$$

За законом Гука для чистого зсуву:

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\tau}{2\sigma} = \frac{\tau(1 + \mu)}{E},$$

звідки

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (9.6)$$

При

$$\mu = \frac{1}{3} \dots \frac{1}{4}$$

буде  $G = (0,375 \dots 0,4) E$ , а для сталі  $G = 8 \cdot 10^4$  МПа.

### Потенціальна енергія деформації

Запишемо вираз для зміщення однієї грані відносно іншої (тобто вираз абсолютного зсуву  $\Delta S$ ) при чистому зсуві. Позначаючи площу грані  $F$ , рівнодійну сили, яка зсуває  $Q = F\tau$  та відстань між гранями, які зсуваються, через  $a$  (Рис. 9.2), матимемо:

$$\Delta S = \gamma \cdot a = \frac{\tau}{G} \cdot a = \frac{Q \cdot a}{GF}, \quad (9.7)$$

тобто

$$\Delta S = \frac{Qa}{GF}. \quad (9.8)$$

Формула (9.8) виражає закон Гука для абсолютного зсуву.

Питома потенціальна енергія деформації елемента при чистому зсуві:

$$u = \frac{U}{V} = \frac{Q^2 a}{2GF \cdot aF} = \frac{Q^2}{2F^2 G}, \quad (9.9)$$

або

$$U = \frac{Q^2 a}{2GF}, \quad V = aF, \quad u = \frac{\tau^2}{2G}, \quad (9.10)$$

де  $U$  - повна потенціальна енергія деформації при чистому зсуві;

$V$  - об'єм виділеного елемента.

### Допустимі напруження при зсуві

Перевіримо міцність елемента при деформації чистого зсуву. Дотичні напруження на гранях елемента дорівнюють  $\tau$ , допустиме напруження для матеріалу при розтяганні  $[\sigma]$ .

Як вже зазначалося, головні напруження при чистому зсуві  $\sigma_1 = \tau$ ;  $\sigma_2 = 0$ ;  $\sigma_3 = -\tau$ . Умова міцності залежить від вибору теорії міцності.

За другою теорією міцності:

$$\sigma_1 - \mu \sigma_3 \leq [\sigma].$$

Підставляючи значення головних напружень, знаходимо

$$\tau \leq \frac{[\sigma]}{1 + \mu}.$$

Тобто, допустиме напруження при чистому зсуві



$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{1 + \mu}. \quad (9.11)$$

Для металів  $\mu = 0,25 \dots 0,42$ . Отже, за другою теорією міцності

$$[\tau] = (0,7 \dots 0,8)[\sigma]. \quad (9.12)$$

За третьою теорією міцності:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leq [\tau] \text{ або } \tau - (-\tau) \leq [\sigma],$$

звідки

$$\tau \leq \frac{[\sigma]}{2} = [\tau],$$

тобто

$$[\tau] = 0,5[\sigma]. \quad (9.13)$$

За четвертою теорією міцності:

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3} \leq [\sigma],$$

або

$$\tau \leq \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}.$$

Отже,

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \approx 0,6[\sigma]. \quad (9.14)$$

**Умова міцності при зсуві** (зрізі) може бути записана у звичайному вигляді:

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max}}{F} \leq [\sigma]. \quad (9.15)$$

Слід мати на увазі, що значення допустимих напружень на зріз  $[\tau]$  залежить від властивостей матеріалу, характеру навантаження та типу елементів конструкції. Конкретні значення  $[\tau]$  для деяких матеріалів стосовно заклепкових та зварних з'єднань містяться в табл. 9.1.

**Таблиця 9.1 – Допустимі напруження на зріз для заклепкових і зварних з'єднань**

Тип з'єднання	Напруження на зріз, МПа
З'єднання заклепкою:	
основні елементи із сталі 20.....	100
заклепка в розсвердлених отворах (клас В)....	140
заклепка в продавлених отворах (клас С).....	100
Зварне з'єднання:	
зварювання ручне, електроди з тонкою обмазкою.....	80
--/--, електроди з товстою обмазкою.....	110
зварювання автоматичне.....	110

### 9.3 Розрахунки зварних з'єднань

Зварні з'єднання можуть бути виготовлені з такими **типами швів**: стикові; торцеві; флангові.

Стикові шви перевіряють на міцність з умови міцності на розтягання. В стикових швах при товщині деталей  $\delta$  не більше 8 мм кромки не обробляють: а) при товщині 8...20 мм кромки скошують з одного боку (V-подібний шов); б) при товщині більше 20 мм кромки скошують з двох сторін (X-подібний шов); в) якщо напрям кутового шва перпендикулярний до напрямку дії зусилля, то шов називають лобовим або торцевим.

У з'єднаннях в стик (Рис. 9.4, а) **умова міцності шва довжиною  $\ell$  при роботі на розтягання:**

$$\sigma_{max} = \frac{P}{F_{шва}} = \frac{P}{\ell \cdot \delta} \leq [\sigma'_p], \quad (9.16)$$

**при роботі на стискання**

$$\sigma_{max} = \frac{P}{\ell \cdot \delta} \leq [\sigma'_{ст}]. \quad (9.17)$$

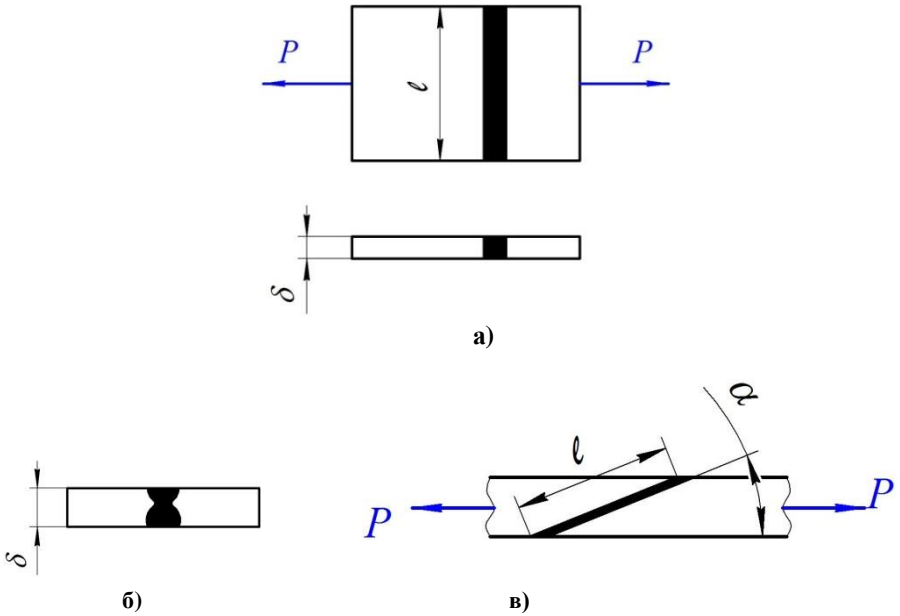


Рисунок 9.4 – Розрахунки стикових швів

Якщо шов зорієнтовано під кутом  $\alpha$  (Рис. 9.5, в) (звичайно  $\alpha = 45^\circ$ ) до напрямку зусилля  $P$ , то умова міцності визначається за формулою

$$\tau = \frac{P}{\ell \cdot \delta} \leq [\tau'] . \quad (9.18)$$

У наведених залежностях:  $\sigma$  і  $\tau$  – нормальні і дотичні напруження в матеріалах шва;  $P$  – діюче зусилля;  $\delta$  – товщина з'єднаних елементів;  $[\sigma'_p]$ ,  $[\sigma'_{ст}]$  – допустимі нормальні напруження матеріалу шва;  $[\tau']$  – допустиме дотичне напруження матеріалу шва.

Для з'єднання нахлестом в прямих (лобових) (Рис. 9.5) і флангових (Рис. 9.6) швах умова міцності:

$$\tau = \frac{P}{F_{\text{еф}}} \leq [\tau'] \quad \text{або} \quad \tau = \frac{P}{2 \cdot 0,7 \cdot k \cdot \ell_T} \leq [\tau'] , \quad (9.19)$$

де  $F_{\text{еф}} = 2 \cdot 0,7\ell_T$  – площа шва;

$k$  – довжина катета шва;

$\ell_T = \ell - 10$  мм розрахункова довжина шва (10 мм приймають на непровар по краю деталі);

$[\tau']$  – при електродуговому зварюванні вибирається в залежності від виду зварювання і типу електрода (ручне чи автоматичне, тип електрода і обмазки, тощо) і викладена в спеціальній літературі.

$F_{\text{шва}} = 0,7\delta$  – це довжина катета шва.

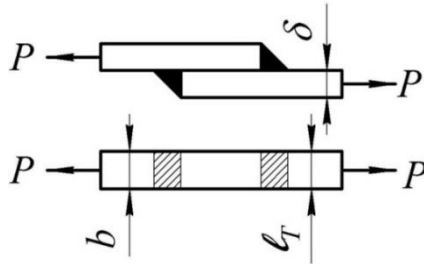


Рисунок 9.5 – Прямий (лобовий шов)

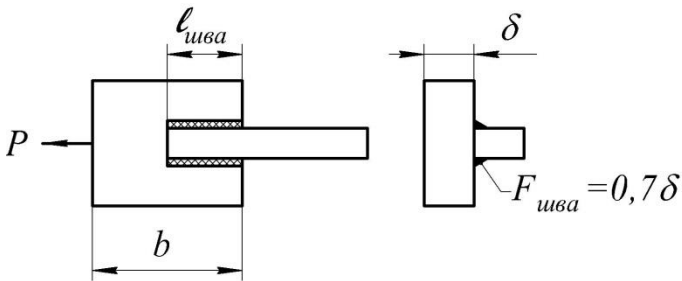


Рисунок 9.6 – Фланговий шов

## 9.4 Контрольні запитання

1. У чому полягає деформація зсуву?
2. Що називається абсолютним і відносним зсувом? Яку вони мають розмірність?
3. Який напружений стан називається чистим зсувом?
4. Як виражається закон Гука при чистому зсуві?
5. За яких умов відбувається зріз?
6. За якою формулою визначають дотичні напруження при зсуві?
7. Яка залежність між модулями пружності першого і другого роду?
8. Що називається зминанням?
9. Які бувають типи зварних з'єднань?
10. Умова міцності для зсува.
11. Умова міцності для зварних з'єднань (для різних типів швів).
12. Повна потенціальна енергія деформації при чистому зсуві.
13. Допустиме напруження при чистому зсуві.
14. Умова міцності болта на зріз.
15. Умова міцності на зминання.

## 10 КРУЧЕННЯ

### 10.1 Епюри крутильних моментів

**Кручення** – це такий вид деформації, при якому в поперечних перерізах елемента конструкції має місце тільки одне із шести зусиль – **внутрішній крутильний момент** ( $M_z = M_{кр} \neq 0$ ), а всі інші зусилля дорівнюють нулю.

В умовах кручення працюють трансмісійні вали.

Теорія **кручення** ґрунтується на таких **трьох гіпотезах** (припущеннях):

1. Поперечний переріз стержня, плоский до скручування, лишається плоским і в процесі скручування. Це припущення називається **гіпотезою плоских перерізів**.

2. Радіуси поперечних перерізів бруса при скручуванні лишаються прямими.

3. Відстань між поперечними перерізами не змінюється.

Ці гіпотези дають змогу визначити напруження, що виникають у брусі круглого перерізу.

В поперечних перерізах вала крутильні моменти змінюються. Епюри крутильних моментів будуються з використанням методу перерізів. За епюрою визначається положення небезпечного перерізу стержня. Небезпечним вважається той переріз, в якому діє найбільший за модулем крутильний момент.

Внутрішній крутильний момент дорівнює алгебраїчній сумі всіх зовнішніх моментів відносно осі  $z$ , діючих по один бік від перерізу, що розглядається

$$M_{кр} + \sum m_{kz} = 0.$$

#### **Правило знаків для крутильних моментів.**

Якщо дивитись з боку напрямку **осі**, то **додатній крутильний момент** той, що діє проти годинникової стрілки (Рис. 10.1).

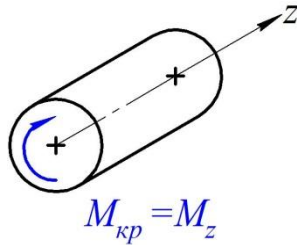


Рисунок 10.1 – Деформація кручення

Зовнішні моменти можуть бути зосереджені і розподілені за довжиною валу де:  $m$  – інтенсивність  $\left[\frac{\text{Нм}}{\text{м}}\right]$ .

**Правило побудови епюр** таке ж як і при побудові епюр повздовжніх сил. Тобто:

– подумки розрізаємо вал перерізами на ділянки (ділянкою називають довжину вала між двома зосередженими моментами, або де закон розподіленого навантаження один і той же);

– використовуючи метод перерізів, складають рівняння рівноваги

$$\sum m_{kz} = 0.$$

За отриманими значеннями моментів на кожній ділянці будуємо епюру в довільно вибраному масштабі (Рис.10.2, г).

### Правила для перевірки побудови епюр

1. На ділянці, де немає розподіленого навантаження, лінія епюри паралельна осі стержня.

2. На ділянці, де діє розподілене навантаження епюри крутних моментів представляє собою пряму, нахилена до осі стержня.

3. В перерізі, де діє зосереджений момент на епюрі крутних моментів буде розрив (скачок) рівний за величиною цьому моменту.

## 10.2 Напруження і деформації при крученні. Умова міцності і жорсткості

### 10.2.1 Напруження при крученні.

Для визначення напружень у поперечних перерізах розглянемо стержень, який скручується парою сил (Рис. 10.3).

$d_0$  – діаметр стержня;  
 $\ell$  – довжина стержня;  
 $AB$  – твірна;  
 $\varphi$  – кут закручування;  
 $BB'$  – абсолютний зсув одного перерізу відносно іншого;  
 $\gamma$  – кут відносного зсуву на поверхні, де  $\gamma = \text{const}$ .

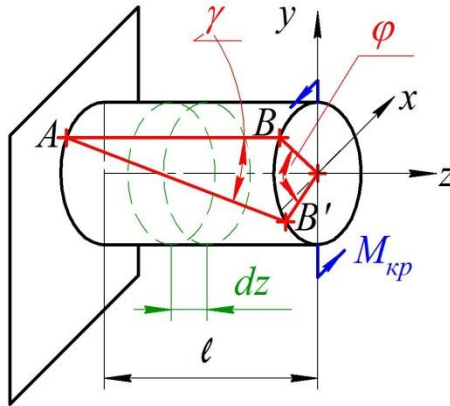


Рисунок 10.3 – Деформація кручення

Для вирішення задачі по визначенню напруження при крученні розглянемо три аспекти задачі.

#### Статичний аспект задачі:

Оскільки при крученні  $M_{кр}$  – єдиний внутрішній силовий фактор, то є підстави вважати, що в перерізах діють тільки дотичні напруження. Тоді п'ять рівнянь (3.4) тотожно перетворюються на нуль, а (3.5) набуває вигляду

$$M_{кр} = \int_F \rho \tau dF, \quad (10.1)$$

де  $\rho$  – змінний радіус,

$$0 \leq \rho \leq \frac{d_0}{2};$$

$\tau$  – дотичне напруження, що діє на елементарній площадці  $dF$ .

Характер розподілу напружень по перерізу з'ясуємо, розглянувши геометричну картину деформації вала при крученні.



**Геометричний аспект задачі:**

Розглянемо деякий елемент вала довжиною  $dz$ . Вал скручується зовнішнім моментом  $M_{кр}$ , який спричиняє в поперечних перерізах внутрішні крутильні моменти  $M_{кр}$ .

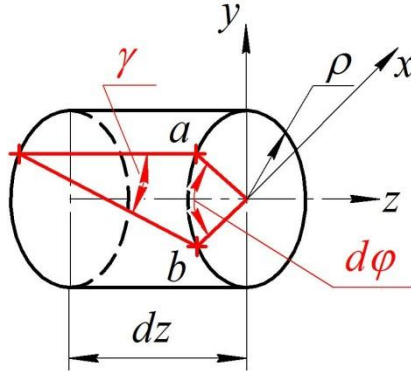


Рисунок 10.4 – Геометричний аспект задачі

Кут закручування відрізка вала завдовжки  $dz$  (Рис. 10.4) дорівнює  $d\varphi$ .

Абсолютний зсув одного перерізу відносно іншого

$$ab = \rho d\varphi = \gamma dz, \text{ де } \gamma = \rho \frac{d\varphi}{dz},$$

$$\gamma = \rho\theta, \quad (10.2)$$

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz},$$

тут  $\theta$  – відносний кут закручування,  $\text{см}^{-1}$ .

**Фізичний аспект задачі.** Оскільки елемент вала в будь-якій точці поперечного перерізу, на відстані  $\rho$  від центра перерізу, зазнає чистого зсуву, то матимемо:

$$\tau = \gamma G. \quad (10.3)$$

Формула (10.3) – закон Гука при крученні.

**Синтез.** Підставляючи (10.2) в (10.3), а потім в рівняння (10.1) визначимо напруження яке діє в поперечному перерізі вала при крученні:

$$M_{\text{кр}} = \int_F \rho \cdot \theta \cdot G \cdot \rho \cdot dF = \theta G \int_F \rho^2 dF = \theta G J_\rho.$$

Звідки виведемо **формулу для визначення відносного кута закручування круглого стержня:**

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_{\text{кр}}}{G J_\rho}, \quad (10.4)$$

де  $G J_\rho$  – жорсткість поперечного перерізу стержня при крученні, Н·м<sup>2</sup>;  $J_\rho$  – полярний момент інерції круглого стержня.

На підставі (10.4) можна записати формулу для визначення взаємного кута закручування двох перерізів, розташованих на відстані  $\ell$

$$\varphi = \int_0^\ell \frac{M_{\text{кр}}}{G J_\rho} dz. \quad (10.5)$$

За цією формулою можемо побудувати епюру  $\varphi$ .

Якщо в межах відрізка стержня завдовжки  $\ell$  крутильні моменти в перерізах не змінюються, то

$$\varphi = \theta \cdot \ell = \frac{M_{\text{кр}} \cdot \ell}{G J_\rho}. \quad (10.6)$$

Ця формула і виражає **закон Гука при крученні.**

Дотичне напруження  $\tau$  в будь-якій точці перерізу вала

$$\tau = \frac{M_{\text{кр}} \cdot \rho}{J_\rho}. \quad (10.7)$$

Максимальне дотичне напруження (на зовнішньому шарі матеріалу стержня при  $\rho = r$  і  $\frac{\rho}{J_\rho} = \frac{1}{W_\rho}$ )

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр max} \cdot r}{J_\rho} = \frac{|M_{кр max}|}{W_\rho}, \quad (10.8)$$

де  $W_\rho = \frac{J_\rho}{r} = \frac{J_\rho}{\rho}$  – **полярний момент опору при крученні**, см<sup>3</sup>.

Запишемо рівняння міцності та жорсткості при крученні. Згідно з (10.8) **умова міцності** запишеться так:

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр max}}{W_\rho} \leq [\tau], \quad (10.9)$$

де  $[\tau]$  – **допустиме дотичне напруження при крученні**,

$$[\tau] = 0,5 - 0,6[\sigma].$$

$[\sigma]$  – допустиме напруження, визначається при простому розтяганні.

**Умова жорсткості**, згідно з (10.4)

$$\theta_{max} = \frac{M_{кр}}{GJ_\rho} \leq [\theta], \quad (10.10)$$

де  $[\theta]$  – допустимий відносний кут закручування.

На підставі формул (10.9) і (10.10), маємо:

$$W_\rho \geq \frac{M_{кр}}{[\tau]} \quad \text{і} \quad J_\rho \geq \frac{M_{кр}}{G[\theta]}. \quad (10.11)$$

Таким чином, для визначення небезпечного перерізу (для знаходження перерізу де діє  $|M_{кр max}|$ ) необхідно побудувати епюру  $M_{кр}$ .

**За допомогою умови міцності можна вирішувати три типа задач:**

1. За відомими навантаженням та матеріалом знайти діаметр стержня, при якому буде виконуватись умова міцності

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр max}}{\frac{\pi d^3}{16}} \leq [\tau], \quad d = \sqrt[3]{\frac{16M_{кр max}}{\pi[\tau]}}$$

2. За відомими розмірами деталі і матеріалом визначити допустиме навантаження.

$$M_{кр max} = \frac{\pi d^3}{16} \cdot [\tau] - \text{проектувальний розрахунок.}$$

3) Коли відомі навантаження, розміри і матеріал деталі перевірити, чи виконується **умова міцності**

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр max}}{W_\rho} \leq [\tau].$$

### 10.2.2 Розрахунок трубчатого перерізу (порожнистого валу).

Вали, що передають велику потужність, виготовляють трубчатими. Як видно з епюри (Рис. 10.5) в середині матеріал валу мало навантажений. Наприклад, суцільний вал, який передає потужність повинен бути в діаметрі 300 мм. Якщо взяти трубчатий вал з зовнішнім діаметром  $D = 350$  мм, та внутрішнім діаметром  $d = 275$  мм, то він передасть таку ж потужність, але вага його буде в 2 рази менша.

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр max}}{W_\rho} = \frac{16M_{кр max}}{\pi D^3(1 - \alpha^4)} \leq [\tau],$$

де  $W_\rho = \frac{\pi D^3(1 - \alpha^4)}{16}$ , – полярний момент опору для трубчатого перерізу,

$\alpha = \frac{d}{D}$  – відношення внутрішнього  $d$  до зовнішнього діаметра  $D$ .

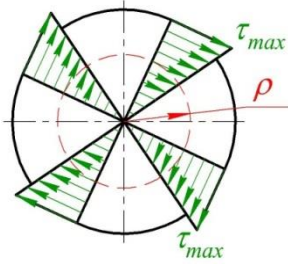


Рисунок 10.5 – Зміна напружень  $\tau$  в перерізі валу

Якщо по довжині валу крутильні моменти прикладені нерівномірно, то щоб зекономити матеріал валу та зменшити його вагу, вали роблять східчастими. Такий вал називається рівноміщним.

### 10.2.3 Визначення кута закручування валу круглого перерізу.

Як було показано раніше кут закручування дорівнює:

$$\varphi = \int_0^{\ell} \frac{M_{кр}}{GJ_{\rho}} dz .$$

Якщо в межах ділянки крутильний момент не змінюється і діаметр  $d$ - постійний, то

$$\varphi = \frac{M_z \cdot \ell}{GJ_{\rho}} . \quad (10.12)$$

Якщо вал має декілька силових ділянок або еюра крутильних моментів перетинає нульову лінію, то кут закручування одного перерізу відносно іншого дорівнює алгебраїчній сумі кутів закручування на кожній ділянці (тобто з урахуванням напрямлення цього закручування).

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \frac{M_{zi} \cdot \ell_i}{GJ_{\rho}} . \quad (10.12')$$

### 10.3 Статично невизначувані задачі при крученні

**Приклад 10.3.** Розглянемо круглий вал, закріплений обома кінцями боків і навантажений крутільним моментом  $M$  в перерізі вала т.С (Рис. 10.6). Відомо: момент  $M$ , розміри  $a$  і  $b$ .

Побудувати епюру крутільних моментів по довжині вала.

При такому навантаженні в місцях закріплення вала виникнуть реактивні моменти  $M_A$  та  $M_B$  в площинах перпендикулярних до осі вала.

Розглянемо три аспекти задачі:

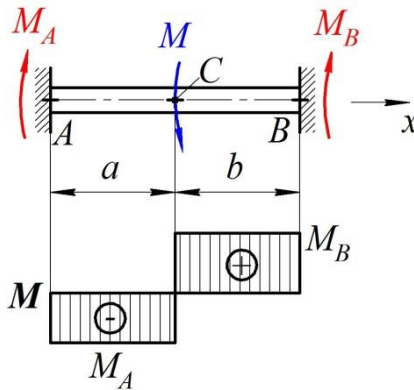


Рисунок 10.6 – Статично невизначувана система

**Статичний аспект задачі.**

$$\sum M_{kz} = 0 \quad -M_A - M_B + M = 0. \quad (10.13)$$

**Геометричний аспект задачі.** Оскільки обидва кінці вала закріплені, то кут повороту перерізів B відносно A дорівнює нулю:

$$\varphi_{B-A} = \varphi_{B-C} + \varphi_{C-A} = 0. \quad (10.14)$$

**Фізичний аспект задачі.** Використовуючи формулу (10.5), запишемо вирази для кутів закручування:

$$\varphi_{B-C} = -\frac{M_B \cdot b}{GJ_\rho}; \quad \varphi_{C-A} = \frac{(M - M_B) \cdot a}{GJ_\rho}. \quad (10.14')$$

**Синтез.** Підставимо (10.14') в (10.14), отримаємо

$$-\frac{M_B \cdot b}{GJ_\rho} + \frac{(M - M_B) \cdot a}{GJ_\rho} = 0.$$

Звідси з урахуванням (10.13) знайдемо, що

$$M_B = \frac{M \cdot a}{a + b}, \quad M_A = \frac{M \cdot b}{a + b}.$$

Епюра крутильних моментів показана на рис. 10.6.

## 10.4 Кручення стержнів некруглого поперечного перерізу

В інженерній практиці досить часто кручення зазнають стержні некруглого поперечного перерізу (прямокутні, трикутні, тощо). У цих випадках **гіпотеза плоских перерізів не може бути застосована**, оскільки перерізи викривляються (деплануються). Тому дослідження НДС таких стержнів не можна виконати методами опору матеріалів. Для розв'язання цієї проблеми застосовують методи теорії пружності. Результати досліджень показали, що в межах закону Гука найбільші дотичні напруження відсутні та повні і відносні кути закручування можна визначати за формулами:

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр\ max}}{W_K}; \quad (10.15)$$

$$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot \ell}{GJ_K}; \quad (10.16)$$

$$\theta = \frac{M_{кр}}{GJ_K}, \quad (10.17)$$

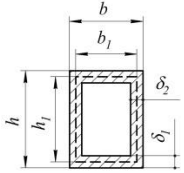
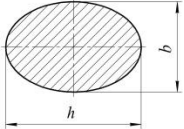
де  $J_k$  і  $W_k$  – геометричні характеристики: **момент інерції (см<sup>4</sup>)** та **момент опору (см<sup>3</sup>) при крученні**. Формули для визначення  $J_k$  і  $W_k$  для деяких перерізів наведені в табл.10.1



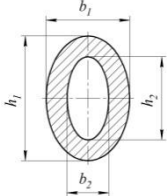
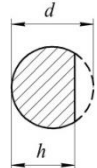
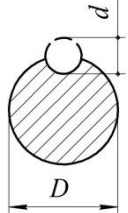
Таблиця 10.1 Геометричні характеристики деяких перерізів при крученні

Форма перерізу	Момент інерції при крученні, $J_K, \text{CM}^4$	Момент опору при крученні, $W_K, \text{CM}^3$	Точки з найбільшими дотичними напруженнями $\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_K}$	Примітки			
				1	2	3	4
	$J_K = \beta hb^3$	$W_K = \alpha hb^2$	Посередині довгих сторін $\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_K}$ ; посередині коротких сторін $\tau = \gamma \tau_{max}$ ; У кутах $\tau = 0$ .	$h/b$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
				1	0,208	0,141	1
				1,5	0,231	0,196	0,859
				1,75	0,239	0,214	-
				2,0	0,246	0,229	0,795
				2,5	0,256	0,249	-
				3,0	0,267	0,263	0,753
				4,0	0,282	0,281	0,745
				6,0	0,299	0,299	0,743
				8,0	0,307	0,307	0,743
1,0	0,313	0,313	0,743				
$\infty$	0,333	0,333	0,743				

Продовження табл. 10.1

1	2	3	4	5
	$J_K = \frac{h_0^2 b_0^2 \delta_1 \delta_2}{h \delta_2 + b \delta_1 - \delta_1^2 - \delta_2^2}$	$W_{K1} = 2h_0 b_0 \delta_1$ $W_{K2} = 2h_0 b_0 \delta_2$	<p>Посередині довгих сторін</p> $\tau_1 = \frac{M_{кр}}{W_{K1}};$ <p>посередині коротких сторін</p> $\tau_2 = \frac{M_{кр}}{W_{K2}}.$	<p>У внутрішніх кутах має місце висока концентрація напружень, що досягають границі текучості матеріалу.</p> <p>Якщо є заокруглення радіуса <math>r</math>, коефіцієнт концентрації</p> $\alpha_K = 1,74 \sqrt{\frac{\sigma_{max}}{r}}.$
	$J_K = \frac{h_0^2 b_0^2 \delta_1 \delta_2}{h \delta_2 + b \delta_1 - \delta_1^2 - \delta_2^2}$	$W_K = \frac{\pi b^2 h}{16}$	<p>У зовнішніх точках малих напівосей</p> $\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_K};$ <p>у кінці великих півосей</p> $\tau_1 = \frac{\tau_{max}}{m}.$	$\frac{h}{b} = m > 1$

Продовження табл. 10.1

1	2	3	4	5						
	$J_K = \frac{\pi m^3 b_1^4 (1 - \alpha^4)}{16(m^2 + 1)}$	$W_K = \frac{\pi b_1^3}{16} \times (1 - \alpha^4) m$	<p>У кінці малих півосей  <math>\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_K}</math>;  у кінці великих півосей  <math>\tau_1 = \frac{\tau_{max}}{m}</math>.</p>	$\frac{h_1}{b_1} = \frac{h_2}{b_2} = m > 1$ $\frac{h_2}{h_1} = \frac{b_2}{b_1} = \alpha < 1$						
	$J_K = \frac{d^4}{16} \left( 2,6 \frac{h}{d} - 1 \right)$	$W_K = \frac{d^3}{8} \frac{2,6 \frac{h}{d} - 1}{\left( 0,3 \frac{h}{d} + 0,7 \right)}$	$\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_K}$	$\frac{h}{d} > 0,5$						
	$J_K = \alpha \frac{D^4}{16}$	$W_K = \beta \frac{D^3}{8}$	<p>По дну канавки  <math>\tau_{max} = \frac{M_{кр}}{W_K}</math></p>	$d/D$	$\alpha$	$\beta$	$d/D$	$\alpha$	$\beta$	
				0,00	1,57	1,57	0,40	0,76	1,22	
				0,05	0,80	1,56	0,60	0,66	0,92	
				0,10	0,81	1,56	0,80	0,52	0,63	
				0,20	0,82	1,46	1,00	0,38	0,38	

#### 10.4.1 Стержні прямокутного перерізу.

В практиці найчастіше застосовуються стержні прямокутного перерізу. В цьому разі розподіл дотичних напружень має вигляд, як на рис. 10.7.

Найбільші напруження виникають біля поверхні, посередині довгих сторін прямокутного перерізу в точках  $C$  і  $D$ .

Визначаються вони за формулою (10.14), де

$$W_k = \alpha h b^2; \quad (10.18)$$

$h$  і  $b$  – сторони перерізу;

$\alpha$  – коефіцієнт, який залежить від співвідношення  $h$  і  $b$ .

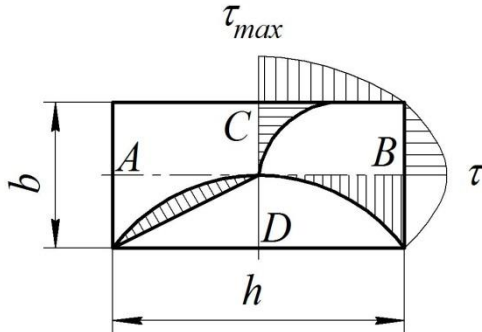


Рисунок 10.7 – Епюри напружень у прямокутному перерізі при крученні

Напруження, які виникають посередині коротких сторін (в точках  $A$  та  $B$ ), визначаються таким чином

$$\tau = \gamma \tau_{max}. \quad (10.19)$$

Відносні та повні кути закручування за формулами (10.16) та (10.17), де

$$J_k = \beta h b^3. \quad (10.20)$$

Коефіцієнти  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  залежать від співвідношення сторін  $h$  і  $b$ .

$h/b$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
1	0,208	0,141	1
10	0,313	0,313	0,743

**Умови міцності та жорсткості при крученні стержнів прямокутного перерізу розраховуються за формулами:**

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр\ max}}{\alpha hb^2} \leq [\tau]; \quad (10.21)$$

$$\theta = \frac{M_{кр}}{G\beta hb^3} \leq [\theta]. \quad (10.22)$$

#### 10.4.2 Стержні відкритого складного профілю

Стержні, які мають поперечні перерізи у вигляді кутника, двотавра або швелера, можна розраховувати за такими ж формулами, що і стержні прямокутного поперечного перерізу. У цьому разі перерізи умовно розбивають на прямокутні частини, а геометрична характеристика  $J_k$  визначається як сума:

$$J_k = \frac{1}{3}\eta \sum b_i^3 h_i. \quad (10.23)$$

При співвідношенні сторін  $h/b > 10$  коефіцієнти  $\alpha$  і  $\beta$  в формулах (10.20) і (10.21) дорівнюють  $\alpha + \beta = \frac{1}{3}$ . Коефіцієнт  $\eta$  в формулі (10.23) в залежності від реального перетину буде різним. Так для кутника  $\eta=1,0$ , швелера  $\eta=1,12$ , тавру  $\eta=1,15$ , двотавру  $\eta=1,2$ .

Геометричну характеристику міцності (**момент опору при крученні**)  $W_k$  визначають за формулою:

$$W_k = \frac{J_k}{\delta_{max}}, \quad (10.24)$$

де  $\delta_{max}$  – найбільша товщина прямокутників, які входять у розгорнутий складний переріз.

Кут закручування і найбільше дотичне напруження визначається в вигляді:

$$\varphi = \frac{M_{кр} \cdot \ell}{G\beta hb^3}; \quad (10.25)$$

$$\tau_{max} = \frac{M_{кр} \delta_{max}}{J_k}, \quad (10.26)$$

де згідно з формулою (10.24)

$$\delta_{max} = \left( \frac{J_{ki}}{W_{ki}} \right)_{max}.$$

## 10.5 Розрахунок гвинтових циліндричних пружин

Точний розрахунок на міцність гвинтових циліндричних пружин досить складний, оскільки дрiт пружини може зазнавати складного навантаження – одночасних кручення, зсуву та згинання. Але при малих кутах нахилу витків, впливом згинання можна знехтувати.

Розглянемо циліндричну гвинтову пружину з середнім діаметром  $D = 2R$ , яка має  $n$  витків і виготовлена із дроту діаметром  $d$ . Пружина зазнає розтягання центральною силою  $P$  (Рис. 10.9, а).

Поділимо пружину діаметральною площею і розглянемо рівновагу верхньої частини. Для забезпечення рівноваги прикладемо в точці перерізу силу  $P$  і  $M_{кр}$  (Рис. 10.9, б). Таким чином, дрiт пружини зазнає деформації зсуву та кручення. Від зсуву дотичні напруження будуть рівномірно розподілені по перерізу (Рис. 10.10, а).

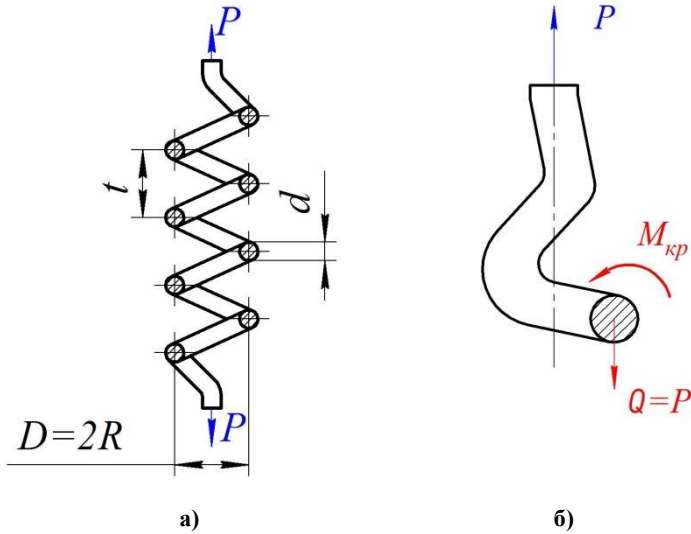


Рисунок 10.9 – Розрахунок гвинтових пружин

Від кручення максимальні напруження  $\tau_2$  виникає на поверхні (Рис. 10.10, б):

$$\tau_1 = \frac{P}{F} = \frac{4P}{\pi d^2}, \quad \text{де } F = \frac{\pi d^2}{4},$$

$\tau_1$  – дотичні напруження в дроті від зсуву;

$$\tau_2 = \frac{M_{кр}}{W_\rho} = \frac{16M_{кр}}{\pi d^3}, \quad \text{де } W_\rho = \frac{\pi d^3}{16},$$

$\tau_2$  – дотичні напруження в дроті від кручення.

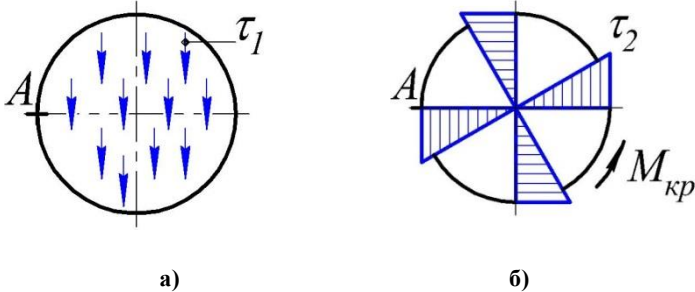


Рисунок 10.10 – Напруження в дроті від зсуву (а) і кручення б)

Максимальне напруження буде в точці А (Рис.10.10, а)

$$\tau_{max} = \tau_1 + \tau_2 = \frac{16PD}{\pi d^3} \left( 1 + \frac{d}{4D} \right). \quad (10.27)$$

Нехтуючи виразом у дужках одержимо

$$\tau_{max} = \frac{16PD}{\pi d^3}.$$

При розрахунках потужних пружин (залізничний транспорт) необхідно враховувати вираз у дужках, оскільки напруження від зрізу тут істотні внаслідок великого значення  $\frac{d}{R}$ .

Руйнування в цьому випадку починається з внутрішнього боку витка, де діють найбільші сумарні дотичні напруження  $\tau_1$  і  $\tau_2$ . Формула  $\tau_{max}$  набуває такого вигляду:

$$\tau_{max} = \frac{16PD}{\pi d^3} \left( \frac{4m-1}{4m-4} + \frac{0,615}{m} \right), \quad (10.28)$$

де  $m = \frac{D}{d}$ .

### Визначення розтягання $\lambda$ пружини

Розглянемо деформації кручення виділеного елемента пружини довжиною  $dS$  (Рис. 10.11).



Під дією крутильного моменту  $M_{кр}$  переріз повернеться відносно лівого перерізу на деякий кут  $d\varphi$ . За рахунок цього точка  $O$  переміститься в точку  $O_1$ .

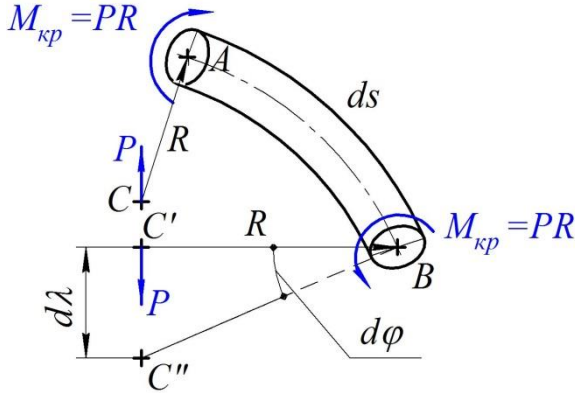


Рисунок 10.11 – Визначення розтягу  $\lambda$  пружини

$d\lambda$  – осадка пружини елемента довжиною  $dS$ .

Кінець пружини опуститься на величину  $d\lambda = R d\varphi$ ; де

$$d\varphi = \frac{M_{кр} dS}{GJ_{\rho}}; \quad M_{кр} = P \cdot R; \quad J_{\rho} = \frac{\pi d^4}{32}.$$

$$d\lambda = \frac{P \cdot R \cdot R \cdot dS \cdot 32}{G\pi d^4}.$$

Повне опускання нижнього кінця пружини, тобто її подовження визначається формулою:

$$\lambda = \int_0^{2\pi Rn} \frac{32P \cdot R^2 dS}{G\pi d^4} = \frac{64P \cdot R^3 \pi n}{G\pi d^4} = \frac{64P \cdot R^3 n}{Gd^4}$$

$$\lambda = \frac{8P \cdot D^3 n}{Gd^4}, \quad (10.29)$$

де  $P$  – сила, що розтягує (або стискає) пружину;

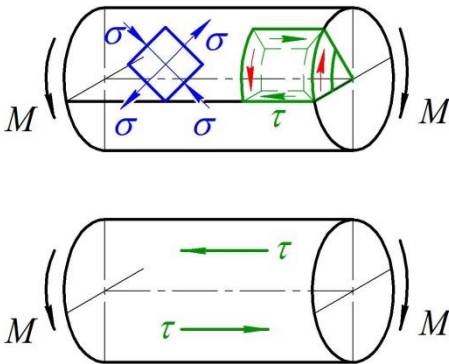
$D$  – діаметр пружини;

$n$  – кількість витків пружини;  
 $d$  – діаметр дроту;  
 $G$  – модуль пружності матеріалу дроту.

## 10.6 Головні напруження при крученні

Аналітичні розрахунки та досліди показують, що при крученні валів, в них виникають як головні нормальні, так і головні дотичні напруження. Такий характер розподілу напружень при крученні підтверджується виглядом руйнувань різних матеріалів від кручення.

Деревина (деякі пластмаси) руйнуються при крученні від дотичних напружень, що діють вздовж волокон.



Пластичні матеріали (сталі, сплави тощо) руйнуються від дотичних напружень, що діють у поперечних напрямках.

Крихкі матеріали (чавуни) руйнуються від нормальних напружень шляхом руйнування під кутом  $45^\circ$ .

Рисунок 10.12 – Схема розподілу різних видів напружень при крученні різних матеріалів

## 10.7 Контрольні запитання

1. Який вид деформації називається крученням?
2. Правило знаків для крутильних моментів?
3. Правила для побудови епюр кручення.
4. Який кут називається повним кутом закручування?
5. Як пишеться формула повного кута закручування?
6. Яка величина називається жорсткістю при крученні?
7. Закон Гука при крученні.

8. Що називається моментом опору крученню? Яка його розмірність?

9. За якою формулою визначається осадку циліндричної спіральної пружини?

10. Умова міцності для кручення.

11. Умова жорсткості для кручення.

## 11. ЗГИНАННЯ

### 11.1 Найпоширеніші види балок і опор

Балками будемо називати прямолінійні стержні, покладені на опори і які працюють на згинання. В опорі матеріалів з точки зору розрахунків на міцність, жорсткість та стійкість балкою називають не тільки будівельну балку, та інші елементи конструкцій на опорах: вал, болт, вагонну вісь, зуб шестерні. тощо.

На розрахункових схемах балку прийнято зображати її віссю, поперечний переріз зображають окремо. При цьому всі навантаження повинні зводитися до осі балки, а силова площина буде збігатися з площиною рисунка.

Реальні вузли закріплення елементів конструкції різноманітні, проте в опорі матеріалів їх зводять до умовних опор: защемленням і шарнірними опорами.

**Шарнірно-рухома опора** – це опора, яка поставлена на катки, які не перешкоджають переміщенню балки уздовж опорної поверхні. В рухомій шарнірній опорі (Рис. 11.1, а) виникає тільки одна реакція  $R_y$  – сила в напрямку обмеження руху (перпендикулярно напрямку руху).

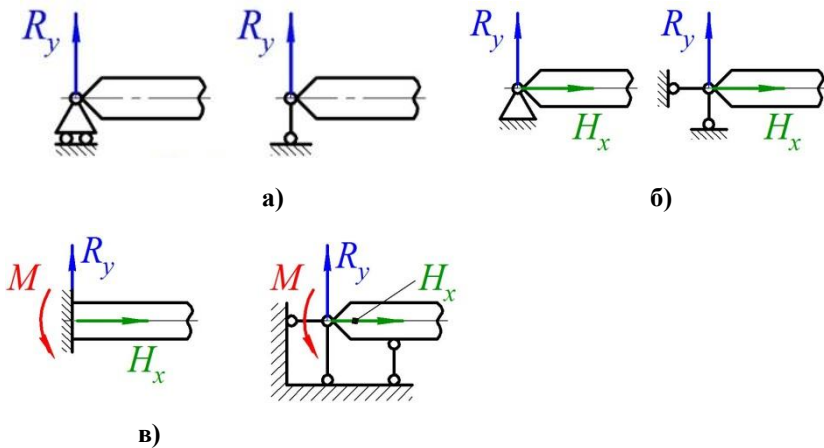


Рисунок 11.1 – Типи опор та їх реакції

**Шарнірно-нерухома опора** – це опора, яка перешкоджає поступальним переміщенням балки уздовж координатних осей, але дає їй можливість повертатися щодо осі шарніра. В нерухомій шарнірній опорі (Рис. 11.1, б) можуть виникати дві складові – вертикальна реакція  $R_y$  та горизонтальна реакція  $H_x$ . Опора дозволяє опорному перерізу балки повертатися навколо шарніру, але не допускає поступального переміщення.

**Жорстке затиснення або защемлення** – це опора, яка не дозволяє конструкції ніяких переміщень. З боку опори на балку (**консоль**) діє сила і реактивний момент пари сил, які враховують як три складові: вертикальну реакцію  $R_y$ , горизонтальну реакцію  $H_x$ , та опорний момент  $M$  (Рис. 11.1, в). Опора не дозволяє ніяких переміщень закріпленого кінця балки.

Реакції опор балок відносяться до зовнішніх навантажень.

**Консоллю** називають незакріплену частину балки.

У реальних умовах кількість прольотів завжди більш одного. Такі балки називають **багатопрольотними**.

Балка, що перекриває один прольот і має дві опори, називається **розрізною**. Балка без проміжних шарнірів, що перекриває декілька прольотів і має декілька опор, називається **нерозрізною багатопрольотною** (статично невизначуваною).

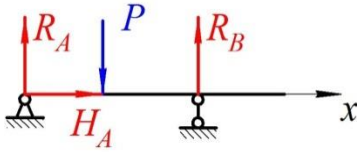
**Види навантажень.**

Всі існуючі навантаження можна звести до таких:

1. Зосереджена сила  $P$ , Н (Рис.11.2).
2. Зосереджений момент  $M$ , Н·м (Рис.11.2, б, в).
3. Розподілене навантаження з інтенсивністю  $q$ , Н/м (Рис. 11.3).

**Інтенсивність** – це величина навантаження, яка приходить на певну довжину.

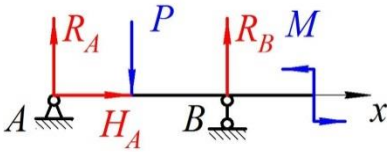
В залежності від видів опор, що застосовуються на схемі, розрізняють такі **види балок**:



а)

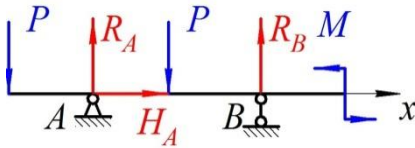
– **проста однопрольотна балка**

на двох опорах, відстань  $\ell$  між двома опорами називають **прольотом**;



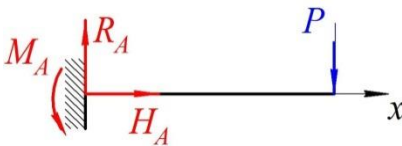
б)

– **двохопорна (однопрольотна) балка з однією консоллю (права консоль)**;



в)

– **двохопорна однопрольотна балка з двома консолями (ліва та права)**;



г)

– **жорстко защемлена консольна балка.**

Рисунок 11.2 – Види балок

Для вирішення задач розподілене навантаження замінюють рівнодіючою силою, величина якої дорівнює площі епюри навантаження і прикладена в центрі ваги цієї фігури (Рис. 11.3).

### Приклад 11.1

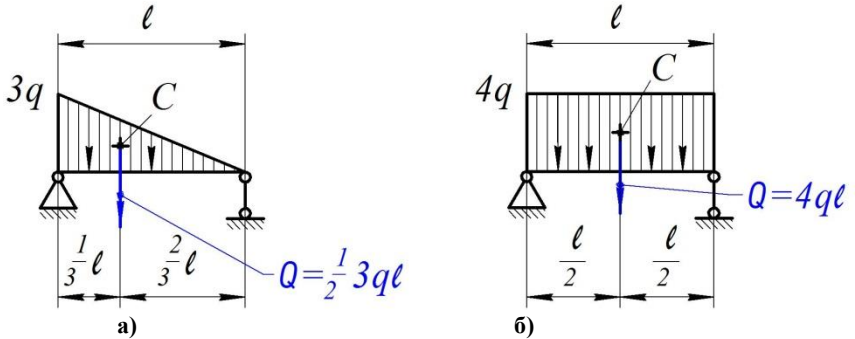


Рисунок 11.3 – Рівнодійна прикладеного навантаження

Рівнодійна  $Q = \frac{1}{2} 3q\ell$ , де  $C$  – центр ваги трикутника, який розташований на  $\frac{1}{3}\ell$  від лівої опори (Рис.11.3, а).

## 11.2 Диференційні залежності Д.І. Журавського при згинанні

Ці диференційні залежності виражають зв'язок між згинальним моментом та навантаженням і поперечною силою

Виділимо із балки елемент довжиною  $dx$ . Виділений елемент повинен знаходитись в рівновазі під дією зовнішніх навантажень і внутрішніх зусиль (Рис. 11.4).

$$\begin{aligned} \sum P_{ky} &= 0; \\ -dQ_y + qdx &= 0; \quad \frac{dQ_y}{dx} = q. \end{aligned} \quad (11.1')$$

Таким чином, **інтенсивність розподіленого навантаження в даному перерізі дорівнює першій похідній від поперечної сили по  $dx$ .**

Складемо рівняння суми моментів сил відносно точки  $O_2$  (Рис.11.4, б):

$$\sum M_{kO_2} = 0; \quad -M_z + (M_z + dM_z) - Q_y dx - \frac{q(dx)^2}{2} = 0.$$

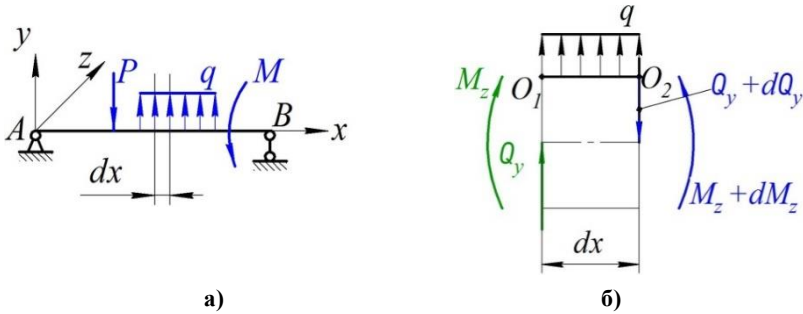


Рисунок 11.4 – Довільне навантаження балки

Нехтуючи складовою  $\frac{q(dx)^2}{2}$  та враховуючи (11.1'), яка є членом другого порядку малості, будемо мати:

$$\frac{dM_z}{dx} = Q_y, \quad \frac{d^2M_z}{dx^2} = q. \quad (11.1)$$

Рівняння (11.1) – диференційні залежності при згинанні.

На підставі диференційних залежностей при згинанні одержано ряд правил, які дозволяють контролювати **правильність побудови епюр  $Q_y$  і  $M_z$  при згинанні**.

1. На ділянках, де немає розподіленого навантаження епюра  $Q_y$  пряма, де є розподілене навантаження – епюра нахилена до осі  $x$ .
2. На ділянках, де  $Q_y > 0$  епюра  $M_z$  зростає.
3. Стрибки на епорах там, де є зосереджені навантаження.

### 11.3 Плоске згинання. Побудова епюр внутрішніх зусиль при плоскому згинанні

Деформація згинання полягає у викривленні осі прямого стержня або в зміні кривизни кривого стержня. У прямих стержнях переміщення точок  $\delta$ , які спрямовані перпендикулярно до початкового положення осі, називають прогинами. На згинання працюють осі залізничних вагонів, ресори, зуби шестерень, балки міжповерхових перекриттів, важелі та ін.

Як відомо, згинання буває чистим і поперечним.



Згинання називається **плоским**, якщо переріз балки має осі симетрії, а зовнішні навантаження діють в площині симетрії, вісь балки згинається, але залишається в площині симетрії.

**Плоским, чистим згинанням** називають таке згинання, коли у поперечному перерізі діє одне внутрішнє зусилля – згинальний момент  $M_x$ .

Якщо в поперечному перерізі діє два внутрішніх зусилля – згинальний момент  $M_x$  та поперечна сила  $Q_y$ , то таке згинання називається **плоским поперечним згинанням**.

При плоскому згинанні початкова пряма вісь балки викривляється, але лежить в поздовжній площині симетрії, залишаючись плоскою кривою.

### 11.3.1 Побудова епюр внутрішніх зусиль при згинанні.

Порядок побудови епюри внутрішніх зусиль розглянемо на прикладах.

**Правило знаків для поперечної сили та згинального моменту.**

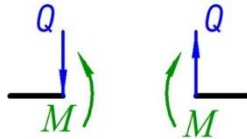


Рисунок 11.5 – Правило знаків при згинанні

**Додатними вважаються** напрямки коли:

- поперечна сила  $Q_y$  повертає відрізану частину балки за годинниковою стрілкою;

- згинальний момент  $M_z$  діє так, що верхні волокна балки укорочуються, а нижні подовжуються.

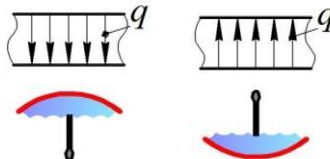


Рисунок 11.6– Правило для визначення вигину параболі

## 11.4 Розрахунок на міцність та жорсткість при згинанні

Виходячи з характеру розподілу діючих при поперечному згинанні напружень, робимо висновок, що напружений стан в перерізах стержнів неоднорідний, і це має враховуватись у розрахунках на міцність. Розглянемо двоопорну балку на шарнірних опорах (Рис. 11.7).

В довільному перерізі балки, крім опорних перерізів  $A$  і  $B$ , одночасно діють поперечні сили і згинальні моменти, епюри яких представлені на рис. 11.7 а), зображені епюри розподілу нормальних і дотичних напружень по висоті перерізу. Виберемо ряд точок в перерізі стержня та проаналізуємо напружений стан в них.

**Точка 1.** Це найвіддаленіша від нейтрального шару точка.

Тут

$$\sigma = \sigma_{max} = \frac{M_z}{W_z}; \tau = 0.$$

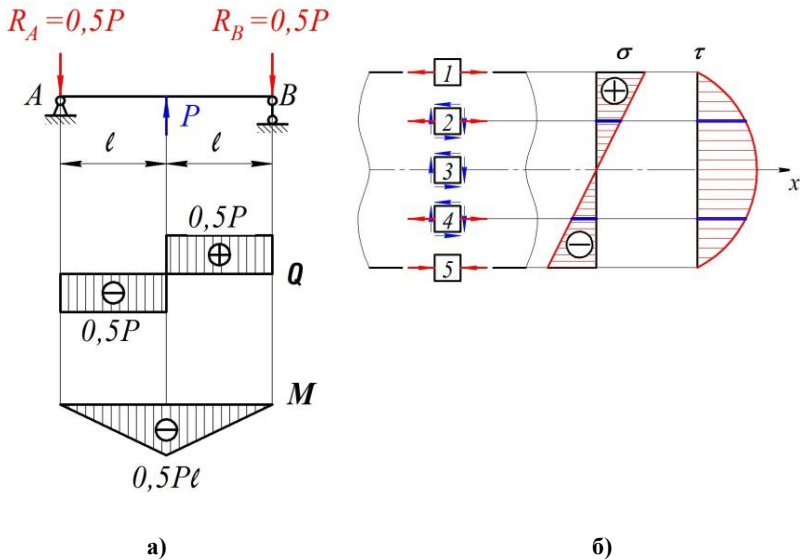


Рисунок 11.7 – До аналізу напруженого стану балки при поперечному згинанні

Маємо лінійний напружений стан, і умова міцності для цієї точки запишеться так:

$$\sigma_{max} = \frac{M_z}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (11.1)$$

**Точка 2.** Тут

$$\sigma = \frac{M_z}{J_z} y; \quad = \frac{QS_z(y)}{b(y)J_z}.$$

Має місце плоский напружений стан. Щоб перевірити точку 2 на міцність, слід скористатися відповідним критерієм міцності, **залежно від матеріалу балки.**

Визначимо головні напруження в цій точці.

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}); \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}).$$

Якщо матеріал балки **крихкий**, то слід скористатися критерієм найбільших нормальних напружень (перша теорія міцності). Умова міцності за цією теорією:

$$\sigma_p^I = \sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}). \quad (11.2)$$

Якщо матеріал балки **пластичний**, то скористаємось критерієм найбільших дотичних напружень (третя теорія міцності) або критерієм найбільшої потенціальної енергії формозміни (четверта теорія міцності). За цими теоріями розрахункові напруження відповідно дорівнюють

$$\sigma_p^{III} = \sigma_1 - \sigma_3;$$

$$\sigma_p^{IV} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}.$$

Підставляючи знайдені вирази для головних напружень, отримаємо умови міцності в такому вигляді:

$$\sigma_p^{III} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]; \quad (11.3)$$

$$\sigma_p^{IV} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (11.4)$$

Якщо матеріал балки **по-різному опирається розтягання і стисканню**, то слід скористатися критерієм Мора (п'ята теорія міцності):

$$\sigma_p^V = \sigma_1 - \frac{[\sigma]_p}{[\sigma]_{ст}} \sigma_3.$$

Позначивши

$$\frac{[\sigma]_p}{[\sigma]_{ст}} = \alpha,$$

(див. формулу 8.19) отримаємо **умову міцності**:

$$\sigma_p^V = \frac{1 - \alpha}{2} \sigma + \frac{1 + \alpha}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (11.5)$$

**Точка 3.** Ця точка належить нейтральному шару, де  $\sigma = 0$ ;  $\tau = \tau_{max}$ .

**Умова міцності:**

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} \cdot S_{max}}{bJ_z} \leq [\tau]. \quad (11.6)$$

**Точка 4.** Тут умови міцності аналогічні до умов міцності для точки 2.

**Точка 5.** Як і у точці 1, тут має місце лінійний напружений стан. Якщо відстань від нейтрального шару до точки 5 така ж, як до точки 1, тобто переріз симетричний відносно осі z, то умова міцності для точки 5 записується аналогічно до умови (11.8). Оскільки в нашому прикладі в цій точці діють стискаючі напруження, отримаємо таку умову міцності:

$$|\sigma_{max}| = \frac{M}{W} \leq [\sigma_{ст}]. \quad (11.7)$$

Якщо ця точка знаходиться ближче до нейтрального шару, ніж точка 1, то умову міцності слід записати так:

$$\sigma'_{max} = \frac{M_z}{J_z} y_5 \leq [\sigma_{ст}]. \quad (11.8)$$

Тут  $\sigma'_{max}$  – напруження у точці 5, і вони є найбільшими напруженнями стискання в перерізі;  $y_5$  – відстань від нейтрального шару до точки 5.

**Примітка.** Якщо матеріал стержня однаково опирається розтягання і стисканню, то перевіряти слід лише точки 1, 2 і 3.

**11.4.1 Визначення нормальних напружень в поперечному перерізі балки при чистому згинанні.** Розглянемо випадок чистого плоского згинання. АВ – волокно на нейтральному шарі (Рис. 11.8 а).

Сукупність точок, розподілених на одній лінії називається волокном.

При згинанні має місце гіпотеза плоских перерізів або гіпотеза Бернуллі, за якою плоскі перерізи до деформації залишаються плоскими та перпендикулярними до нейтральної лінії після деформації, повертаючись один відносно іншого на деякий кут.

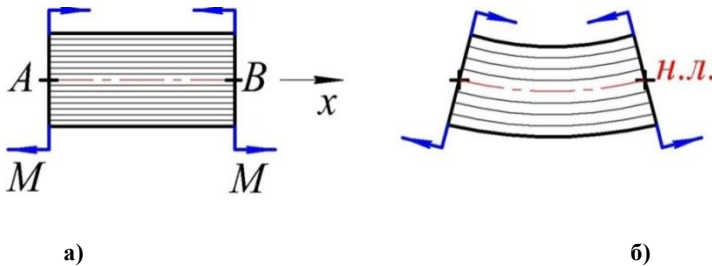


Рисунок 11.8– Чисте згинання

Сукупність волокон, які при згинанні не змінюють своєї довжини, називають центральним шаром або нейтральною лінією (Рис. 11.8, б).

Частина волокон, що лежить вище нейтральної лінії укорочується, тобто зазнає деформації стискання. Частина волокон,

що лежить нижче нейтральної лінії подовжується, тобто зазнає деформації розтягання.

Виділимо із балки двома паралельними перерізами елемент довжиною  $dx = 1$  (Рис. 11.9) та розглянемо його деформований стан.

$\theta$  – відносний кут повороту перерізу по довжині  $l$  або кривизні нейтральної лінії.

$$\theta = \frac{1}{\rho}, \quad dx = \rho d\varphi; \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d\varphi}{dx} = \theta, \quad (11.8')$$

де  $\rho$  – радіус від центру кривизни до нейтральної лінії.

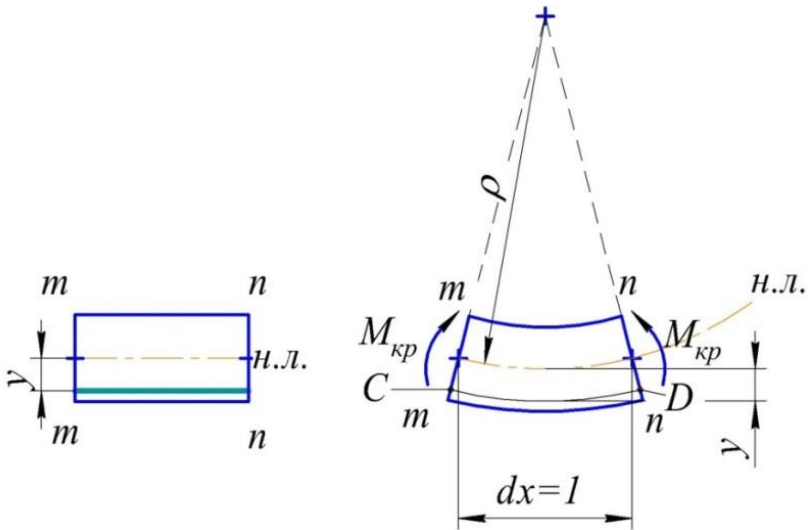


Рисунок 11.9 – Чисте згинання елемента  $dx$

Розглянемо випадок чистого згинання балки (Рис. 11.9) Із шести внутрішніх силових факторів, які можуть діяти в поперечних перерізах в загальному випадку згинання, при чистому згинанні не дорівнює нулю тільки згинальний момент  $M$ .

Проведемо поперечний переріз  $m - m$  на відстані  $x_1$  від початку координат. Виділимо в перерізі елемент площі  $dF$  з координатами  $y$  та  $z$ .

При чистому згинанні всі зусилля  $Q$  та моменти  $M_{кр}$ , пов'язані з дотичними напруженнями – дорівнюють нулю. Отже, з усіх умов рівноваги (3.4) залишаються тільки три.

Для визначення нормальних напружень в поперечному перерізі при згинанні розглянемо 3 аспекта задачі:

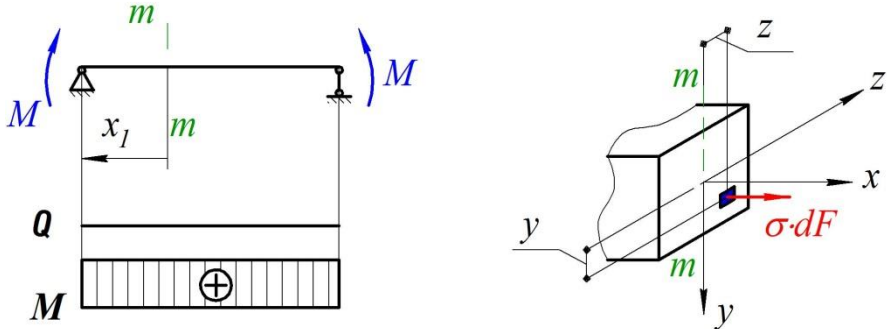


Рисунок 11.10 – Чисте плоске згинання

#### Статичний аспект задачі.

В загальному вигляді в перерізі діє

$$N = \int_F \sigma dF; \quad M_y = \int_F \sigma z dF; \quad M_z = \int_F \sigma y dF.$$

Але при чистому згинанні в поперечному перерізі діє тільки  $M_z$ . Тобто,

$$N = 0; \quad M_y = 0; \quad M_z = \int_F \sigma y dF. \quad (11.9)$$

#### Геометричний аспект задачі.

Відносна деформація волокна (Рис.11.13, б)

$$CD = \varepsilon_x = \theta \cdot y, \quad (11.10)$$

або враховуючи (11.8'), отримаємо

$$\varepsilon_x = \frac{y}{\rho}, \quad (11.10')$$

де  $y$  – відстань від н.л. до точки, в якій визначається напруження  $\sigma$ .

Отже, розв'язання геометричного аспекту завдання показало, що **відносна повздовжня деформація пропорційна відстані волокна від нейтральної лінії.**

#### Фізичний аспект задачі:

Так як на елементарній площадці  $dF$  перерізу немає дотичних напружень, волокна матеріалу, розташовані вздовж балки, не тиснуть одне на одне і напруження між ними дорівнюють нулю, то волокно  $CD$  (Рис. 11.13, б) перебуває в лінійному напруженому стані (просте розтягання або стискання). Тому **закон Гука** для нього слід записати так:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma}{E} \text{ або } \sigma = \varepsilon_x \cdot E. \quad (11.11)$$

**Синтез.** Виключимо  $\varepsilon_x$  із залежностей (11.10') і (11.11):

$$\sigma = \frac{E}{\rho} y.$$

Підставляючи (11.11) в (11.5), отримаємо

$$M_z = \int_F \varepsilon_z E y dF, \quad (11.12)$$

а потім підставляючи (11.10') в (11.12) маємо:

$$M_z = \int_F \theta E y^2 dF = \theta E J_z, \quad (11.13)$$

звідки (враховуючи, що  $\int_F y^2 dF = J_z$ ,



$$\theta = \frac{M_Z}{EJ_Z} \quad \text{і} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M_Z}{EJ_Z}. \quad (11.14)$$

Тоді

$$\varepsilon_x = \frac{M_Z y}{EJ_Z}, \quad (11.15)$$

а отже

$$\sigma = \frac{M_Z y}{J_Z}. \quad (11.16)$$

Тут при  $y = 0$ ;  $\sigma = 0$ ;  $y = y_{max}$ ;  $\sigma = \sigma_{max}$ .

Формула (11.16), яка вперше була виведена французьким вченим **К. Нав'є** дає змогу визначити нормальні напруження при чистому згинанні балки  $\sigma$  будь-якої точки її перерізу.

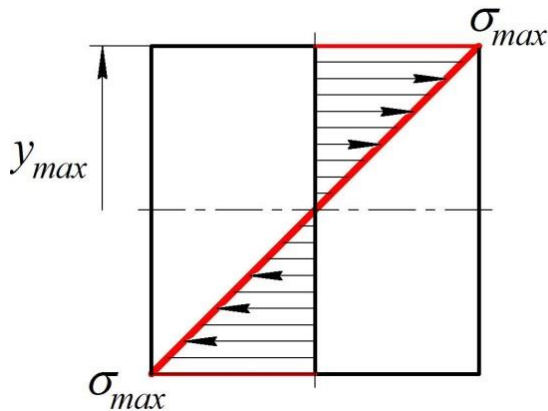


Рисунок 11.11 – Розподіл нормальних напружень за формулою Нав'є по висоті балки при згинанні

Розподіл нормальних напружень по висоті балки при згинанні показано на рис. 11.11.

Враховуючи, що

$$\frac{J_Z}{y_{max}} = W_x,$$

умова міцності по нормальним напруженням при згинанні буде мати вигляд

$$\sigma_{max} = \frac{M_z max}{W_z} \leq [\sigma].$$

Положення нейтрального шару визначимо із рівняння

$$N = \int_F \sigma dF = 0; \quad \sigma = \varepsilon_x E = \theta y E.$$

Тоді

$$N = \theta E \cdot y dF = \theta E \int_F y dF = 0,$$

але  $E\theta \neq 0$ , отже

$$\int_F y dF = S_x = 0.$$

Таким чином **нейтральна лінія при згинанні проходить через центр ваги перерізу**. А осі  $y$  та  $x$  будуть головними центральними осями. При цьому силова площина співпадає з однією із головних осей інерції, а друга вісь буде нейтральною лінією.

#### 11.4.2 Визначення дотичних напружень при згинанні (формула Д.І. Журавського)

При плоскому поперечному згинанні, коли в перерізах має місце зусилля  $Q_y \neq 0$  і  $M_z \neq 0$ , виникають не тільки нормальні напруження  $\sigma$ , а і дотичні  $\tau$ .

Із теорії пружності відомо, що при плоскому поперечному згинанні гіпотеза плоских перерізів не витримується. Перерізи при деформуванні викривлюються (деплануються). Але вплив цього фактору на величину і характер розподілення нормальних напружень залежить від розміру балки. Якщо  $\frac{h}{\ell} \leq \frac{1}{5}$  ( $h$  – висота поперечного

перерізу,  $l$  – довжина балки), то помилка в обчисленні не перевищує 1%.

Таким чином, з допустимою похибкою можна прийняти, що при плоскому поперечному згинанні, **для невисоких довгих балок**, нормальні напруження розподіляються по висоті балки за лінійним законом і їх можна обчислити за відомою **формулою Нав'є**:

$$\sigma_x = \frac{M_z}{J_z} \cdot y.$$

Дотичні напруження  $\tau$  в площині поперечного перерізу будемо визначати через парні їм дотичні напруження, які діють в поздовжніх перерізах. Формулу для визначення  $\tau$  будемо вивчати на прикладі консольної балки прямокутного перерізу (Рис. 11.12) навантаженої зосередженою силою на вільному кінці.

Розглянемо елемент балки  $dx$ , який обмежений двома суміжними площинами. В обох перерізах  $I$  і  $II$  діють, згідно з епюрою  $Q$ , однакові за величиною поперечні сили. Згинальні моменти в цих перерізах різні:  $M$  і  $M + dM$  відповідно (Рис. 11.12, а). При дії вказаних зусиль в перерізах мають місце нормальні і дотичні напруження.

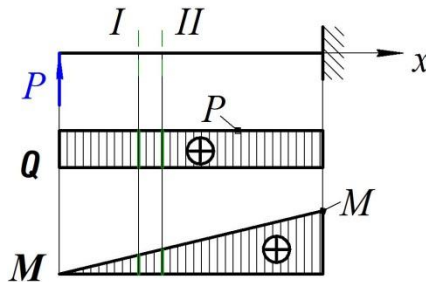


Рисунок 11.12 – Балка в умовах поперечного згинання

Нормальні напруження в перерізах  $I$  і  $II$  знаходимо за формулою Нав'є (11.16). Ці напруження для довільного шару волокон відповідно дорівнюватимуть:

$$\sigma' = \frac{M_z}{J_z} y; \quad \sigma'' = \frac{M_z + dM_z}{J_z} y. \quad (11.17)$$

Епюри нормальних напружень представлені на рис. 11.13, а.

Щоб знайти дотичні напруження, сформулюємо деякі припущення щодо характеру їх розподілу в поперечному перерізі.

1. Дотичні напруження  $\tau$  в перерізі паралельні поперечній силі  $Q$ .

2. В даному шарі волокон на відстані  $y$  від нейтрального шару дотичні напруження однакові за величиною по всій ширині перерізу.

**Примітка.** Ці припущення справедливі лише для перерізів із співвідношенням сторін  $h/b > 2$ , коли поперечна сила паралельна стороні  $h$ .

Далі площиною, паралельною нейтральному шару балки, на відстані  $y$  від нього відріжемо частину елемента стержня (Рис. 11.13, б). Розглянемо умови рівноваги елементарного паралелепіпеда  $A_1A_2B_1B_2C_1C_2D_1D_2$ . Для цього спочатку проаналізуємо, які сили діють у його гранях.

Грані  $A_1A_2B_1B_2$ ,  $C_1C_2D_1D_2$  і  $A_1A_2C_1C_2$  належать бічній поверхні стержня, вільній від навантаження, тому тут жодні сили не діють.

У грані  $A_1B_1C_1D_1$  діють нормальні  $\sigma'$  і дотичні  $\tau'$  напруження.

Знайдемо рівнодійну нормальних напружень

$$N_1 = \int_F \sigma' dF.$$

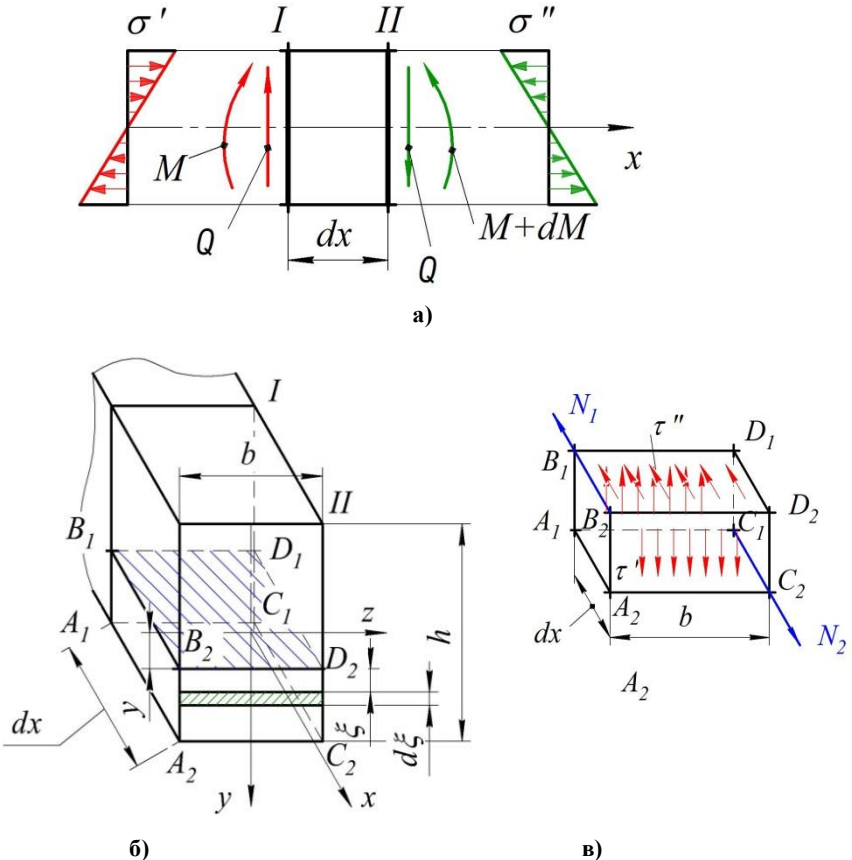
Тут елементарна площадка  $dF = bdy$  знаходиться на відстані  $y$  від нейтральної лінії перерізу (Рис. 11.17, б).

Тоді

$$N_1 = \int_F \frac{M_z}{J_z} y dF = \frac{M_z}{J_z} \int_F y dF.$$

Тут  $\int_F y dF = S_z(y)$  – статичний момент площі грані  $A_1B_1C_1D_1$  відносно осі  $z$ , тобто частини площі поперечного перерізу, розташованої між шаром волокон на рівні  $y$  та краєм балки. Отже

$$N_1 = \frac{M_z}{J_z} S_z(y). \quad (11.18)$$



а) схема навантаження елемента балки;  
 б) схема виділення частини елемента балки;  
 в) схема навантаження частини елемента балки.  
 Рисунок 11.13 – До визначення дотичних напружень при згинанні

Аналогічно знайдемо рівнодійну  $N_2$  на грані  $A_2B_2C_2D_2$ :

$$N_2 = \frac{M_z + dM_z}{J_z} S_z(y). \quad (11.19)$$

Розглянемо тепер грань  $B_1B_2D_1D_2$ . Нормальними напруженнями на цій грані, які виникають за рахунок бічного тиску між волокнами при згинанні балки, нехтуємо через їх малість. Дотичні напруження  $\tau''$  тут виникають згідно закону парності дотичних напружень, оскільки діють дотичні напруження  $\tau'$  на ортогональних гранях (Рис. 11.13, в). Через малість грані  $B_1B_2D_1D_2$  (один її розмір  $dx$ ) вважатимемо напруження  $\tau''$  рівномірно розподіленими, а їх рівнодійна

$$dT = \tau'' b dx = \tau b dx.$$

Запишемо рівняння рівноваги елемента, спроектувавши сили на вісь  $x$ :

$$\sum X_k = N_2 - N_1 - dT = 0$$

або

$$\frac{M_z + dM_z}{J_z} S_z(y) - \frac{M_z}{J_z} S_z(y) - \tau b dx = 0.$$

Звідси

$$\tau b dx = \frac{dM_z}{J_z} S_z(y).$$

Враховуючи, що  $dM_z/dx = Q$ , остаточно отримаємо:

$$\tau = \frac{QS_z(y)}{bJ_z}. \quad (11.20)$$

Формулу (11.20) вперше вивів **Д.І. Журавський**.

Для прямокутного перерізу статичний момент дорівнює

$$\begin{aligned} S_z(y) &= b(0,5h - y) \left( y + \frac{0,5h - y}{2} \right) = \\ &= b(0,5h - y)(0,5y + 0,25h) = \frac{bh^2}{8} \left( 1 - \frac{4}{h^2} y^2 \right). \end{aligned}$$

Тоді, приймаючи до уваги, що для прямокутника

$$J_z = \frac{bh^3}{12}$$

отримаємо:

$$\tau = \frac{Q S_z(y)}{b} \left(1 - \frac{4}{h^2} y^2\right) \frac{12}{bh^3} = \frac{3Q}{2bh} \left(1 - \frac{4}{h^2} y^2\right). \quad (11.21)$$

З наведеної формули випливає, що залежність між дотичними напруженнями в перерізі при поперечному згинанні і положенням шару волокон відносно нейтральної лінії параболічна. В крайніх точках перерізу при  $y = h/2$   $\tau = 0$ . **Найбільші дотичні напруження** виникатимуть у нейтральному шарі, коли  $y = 0$ :

$$\tau_{max} = \frac{3Q}{2bh} = \frac{3Q}{2F}. \quad (11.22)$$

Епюра розподілу дотичних напружень по висоті прямокутного перерізу зображена на рис. 11.14.

Хоча **формула Журавського** була виведена для прямокутних перерізів зі співвідношенням  $h/b > 2$ , тим не менше на практиці нею можна скористатися для перерізів будь-якої форми, за виключенням вузьких прямокутників, розташованих так, що силова лінія паралельна до меншої сторони  $b$ . Такі перерізи нами будуть розглянути пізніше.

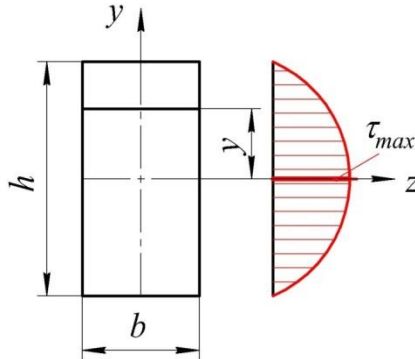


Рисунок 11.14 – Епюра дотичних напружень для прямокутного перерізу

Отже, для довільного перерізу **формулу Журавського** можна записати в такому вигляді:

$$\tau = \frac{QS_z(y)}{b(y)J_z}. \quad (11.23)$$

Тут  $b(y)$  – ширина перерізу на тому рівні, де визначаються дотичні напруження, і яка для довільного перерізу буде величиною змінною.

### 11.4.3 Про раціональну форму перерізу при згинанні

Аналізуючи епюри напружень, можна побачити, що на поздовжньої лінії нормальні напруження дорівнюють нулю, дотичні напруження досягають максимуму. В крайніх волокнах, найбільш віддалених від поздовжньої лінії, навпаки нормальні напруження досягають найбільших по модулю значень, а дотичні напруження дорівнюють нулю. Розрахункова практика показала, що нормальні напруження, як правило, в декілька разів більше дотичних. Тому має сенс проектувати переріз так, щоб в зоні дії великих напружень знаходилася б велика частина матеріалу. Цій вимозі відповідають перерізи у вигляді двотаврових і швелерових прокатних профілів, а також різні коробчасті і кільцеві перерізи (Рис. 11.15).

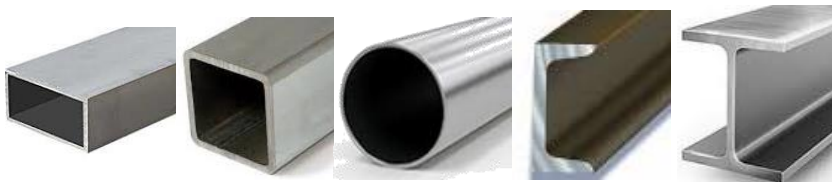


Рисунок 11.15 – Види перерізів балки

Звідси можна зробити висновок: оскільки основний опір прогину є на зовнішніх шарах матеріалу, доцільно при згинанні застосовувати бруси з перерізами, в яких волокна основного матеріалу знаходяться на відстані від нейтральної осі.

Відношення  $\varepsilon = \frac{W_z}{\sqrt{F^3}}$  можна назвати **коефіцієнтом раціональності перерізу при згинанні**. Тобто, чим менша площа (або вага) перерізу при тому ж опорі, тим раціональніше буде переріз.



Цей принцип визначає, чому важелі машин, шатуни і інші деталі, а також рейки, балки, корпусу і рами машин в площині дії згинального моменту мають особливу форму перерізу, при якій посилені частини, найбільш віддалені від нейтральної осі. В цілому ці перерізи нагадують дошку, поставлену на ребро. Таким чином, в техніці, в разі сталевих балок прийшли до стандартних перерізів прокатного профілю типу двотавра або швелера.

Круглі порожнисті перерізи також ефективні при роботі деталей на згинання. Цим пояснюється все більш широке застосування цих перерізів для деталей, що обертаються і при цьому піддаються також згинаючим зусиллям (наприклад, для осей залізничних вагонів).

### 11.5 Контрольні запитання

1. Який вид конструкцій називають балками?
2. На які три типи діляться опори балок?
3. Види балок.
4. Що називається консоллю?
5. Що називається інтенсивністю розподіленого навантаження?
6. Що називається плоским чистим згинанням
7. Що називається плоским поперечним згинанням?
8. Які існують залежності між інтенсивністю розподіленого навантаження, згинаючим моментом і поперечною силою?
9. Правила знаків при згинанні.
10. Для чого будуються епюри згинальних моментів і поперечних сил?
11. Як проходить нейтральна лінія при згинанні?
12. Принцип вибору раціонального перерізу.
13. Формула Журавського.
14. Умова міцності при згинанні по нормальним напруженням.
15. Умова міцності при згинанні по дотичним напруженням.

## 12. ВИЗНАЧЕННЯ ПЕРЕМІЩЕННЯ БАЛКИ

### 12.1 Диференційне рівняння зігнутої осі балки

Працюючи на згинання елементи будівельних і машинобудівних конструкцій в багатьох випадках повинні бути розраховані не тільки на міцність, але і на жорсткість. При цьому найчастіше буває, що необхідні розміри поперечного перерізу бруса (балки), отримані з розрахунку на жорсткість, є більшими, ніж отримані за умовою міцності.

Під розрахунком на жорсткість ми розуміємо оцінку пружної податливості балки під дією прикладеного навантаження та добір таких розмірів поперечного перерізу, при яких переміщення не буде перевищувати встановлених нормами меж.

Викривлену вісь балки називають **зігнутою віссю** або **пружною лінією**, а переміщення центра ваги – **прогином** балки в даному перерізі і позначають буквою  $w$ .

**Кривизна зігнутої осі балки** в загальному випадку має вигляд (11.14):

$$\frac{1}{\rho_x} = \frac{M_x}{EJ_x}.$$

З курсу аналітичної геометрії відомо таке рівняння кривизни плоскої кривої:

$$\frac{1}{\rho_x} = \pm \frac{\frac{d^2w}{dx^2}}{\left[1 \mp \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right]}.$$

Прирівняємо праві частини цих рівнянь. Значення додатка  $\left(\frac{dw}{dx}\right)^2$  в багато разів менше, ніж одиниця і тому нею можна знехтувати. Тоді одержимо основне **диференційне рівняння пружної лінії балки** (для малих деформацій):

$$\frac{dw^2}{dx^2} = \frac{M_x}{EJ_x}. \quad (12.1)$$

За допомогою рівняння (12.1) можна обчислювати лінійні та кутові переміщення в балках за будь-яких умов навантаження.

Проінтегрувавши рівняння (12.1) перший раз, матимемо вираз для кута повороту  $\theta_x$ :

$$\theta_x = \frac{dw}{dx} = \int \frac{M(x)}{EJ_x} dx + C, \quad (12.2)$$

який має одну довільну сталу  $C$ .

Інтегруючи це рівняння другий раз знаходимо вираз для прогину  $w(x)$

$$w(x) = \int dx \int \frac{M(x)}{EJ_x} dx + C(x) + D, \quad (12.3)$$

де  $C, D$  – сталі інтегрування.

Значення цих сталих визначають з умов закріплення балок:

а) якщо балка має на кінці закріплення (Рис. 12.1), то прогин та кут повороту в ньому дорівнюють нулю:

$$w_A = 0; \theta_A = 0;$$

б) для балки на двох шарнірних опорах прогини на цих опорах дорівнюють нулю.

Зауважимо, що якщо задано розподілене навантаження  $q(x)$  рівняння пружної лінії можна записати у вигляді:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[ EJ_x \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right] = q(x). \quad (12.4)$$

Цей метод корисно використовувати, коли балка має одну ділянку.

Зауважимо, що якщо балка має дві або більше ділянок ( $n$ ), то

необхідно складати диференціальні рівняння для кожної ділянки і кількість сталих буде в два або в  $2n$  разів більше.

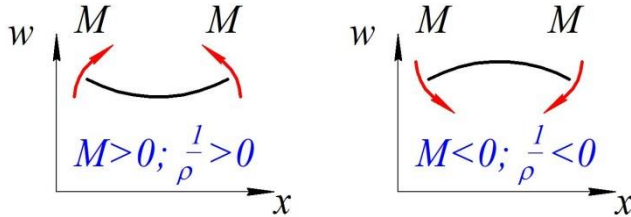


Рисунок 12.2 – Правило знаків в балці при згинанні

## 12.2 Визначення переміщень у балках за методом початкових параметрів

Розглянемо балку, на яку діють основні типи навантажень. Напрямок навантажень вибрано таким чином, щоб згинальні моменти в перерізах балки були додатними (Рис. 12.3, а).

Щоб звести кількість сталих інтегрування до двох, необхідно, щоб стали на всіх ділянках балки при інтегруванні рівняння пружної лінії були однаковими. Це можливо за умов, що на кожній ділянці вирази для згинальних моментів містять всі члени, які входили до виразів на попередній ділянці, а додаткові члени, що з'явилися на цій ділянці, зникатимуть на спільній границі з попередньою. Такі умови можна забезпечити, якщо записувати диференціальні рівняння пружної лінії балки, дотримуючись певного алгоритму:

1. Початок координат завжди обирають у крайньому лівому перерізі на осі балки. В цій системі складають вирази для згинальних моментів на кожній ділянці.

2. Вирази для згинальних моментів завжди отримують з умов рівноваги для лівої частини балки. Тобто ці вирази мають включати навантаження, прикладені до балки зліва від перерізу.

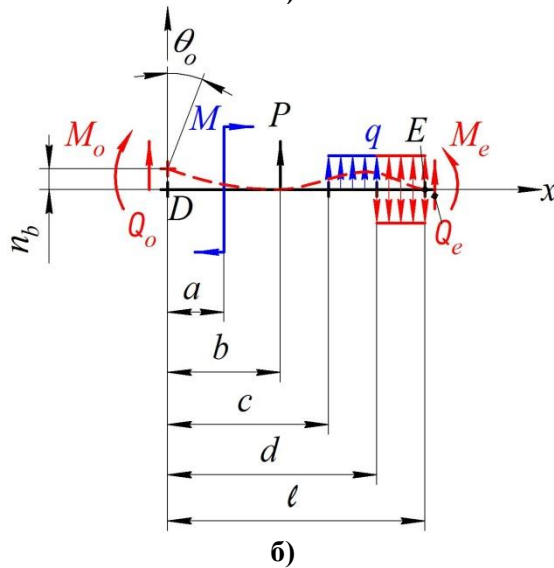
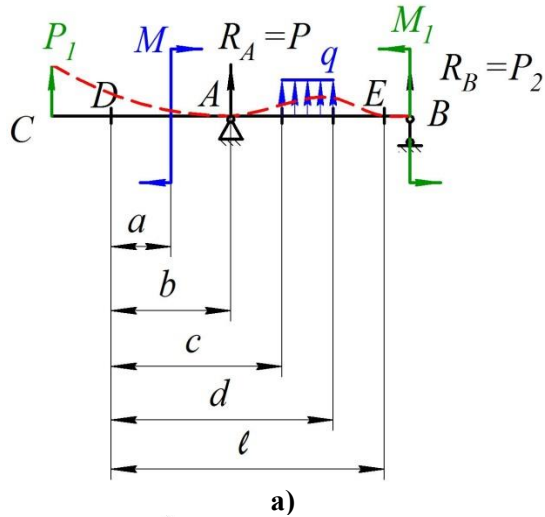


Рисунок 12.3 – Схема навантаження балки а) та розрахункова схема до методу початкових параметрів б)

3. Якщо на ліву частину балки діє зосереджений момент  $M$ , то в рівнянні його слід представити у вигляді добутку

$M(x - a)^0$ , де  $(x - a)^0 = 1$ . Тут  $a$  – абсциса точки прикладання моменту  $M$  (див. рис. 12.3).

4. Коли розподілене навантаження не доходить до кінця балки, його слід продовжити, прикладаючи на цій ділянці компенсуючі розподілене навантаження протилежного знаку. Ці додаткові розподілені навантаження на рис. 12.3, б) виділено червоним.

5. Інтегрують отримані диференціальні рівняння пружної лінії на ділянках балки, не розкриваючи дужок.

Розглянемо частину балки довжиною  $\ell$ , обмежену перерізами  $D$  і  $E$  (Рис. 12.3, б). Помістимо початок координат в точку  $D$  і складемо вирази для згинальних моментів на кожній ділянці.

Ділянка I:

$$M(x) = M_0 + Q_0x.$$

Ділянка II:

$$M(x) = M_0 + Q_0x + M(x - a)^0.$$

Ділянка III:

$$M(x) = M_0 + Q_0x + M(x - a)^0 + P(x - b).$$

Ділянка IV:

$$M(x) = M_0 + Q_0x + M(x - a)^0 + P(x - b) + q \frac{(x - c)^2}{2}.$$

Ділянка V:

$$M(x) = M_0 + Q_0x + M(x - a)^0 + P(x - b) + q \frac{(x - c)^2}{2} - q \frac{(x - d)^2}{2}.$$

На кожній наступній ділянці до виразів моментів попередньої ділянки додаються нові діючі навантаження. Вирази для моментів на границях кожної теперішньої і наступної ділянки будуть однаковими. Наприклад, на границі ділянок II і III ( $x = b$ ), отримаємо

$$M_{II} = M_{III} = M_0 + Q_0x + M(x - a)^0.$$

Складемо диференціальні рівняння пружної лінії на кожній ділянці, починаючи з першої.

Ділянка I:

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = \frac{1}{EJ_z} [M_0 + Q_0x]. \quad (12.5)$$

Інтегруючи отримане рівняння двічі, отримуємо:

$$\theta(x) = \frac{dw(x)}{dx} = \frac{1}{EJ_z} \left[ M_0 x + Q_0 \frac{x^2}{2} + C_1 \right]. \quad (12.6)$$

$$\begin{aligned} w(x) &= EJ_z \frac{dw(x)}{dx} = \\ &= \frac{1}{EJ_z} \left[ M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{6} + C_1 x + D_1 \right]. \end{aligned} \quad (12.7)$$

Ділянка II:

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \frac{1}{EJ_z} [M_0 + Q_0 x + M(x - a)^0]. \quad (12.8)$$

$$\theta(x) = \frac{dw(x)}{dx} = \frac{1}{EJ_z} \left[ M_0 x + Q_0 \frac{x^2}{2} + M(x - a) + C_{II} \right]. \quad (12.9)$$

$$w(x) = \frac{1}{EJ_z} \left[ M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{6} + M \frac{(x - a)^2}{2} + C_{II} x + D_{II} \right]. \quad (12.10)$$

Ділянка III:

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \frac{1}{EJ_z} [M_0 + Q_0 x + M(x - a)^0 + F(x - b)]. \quad (12.11)$$

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \frac{dw(x)}{dx} = \frac{1}{EJ_z} [M_0 x + Q_0 \frac{x^2}{2} + M(x - a) + \\ &\quad + P \frac{(x - b)^2}{2} + C_{III}]. \end{aligned} \quad (12.12)$$

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{1}{EJ_z} [M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{6} + \\ &\quad + M \frac{(x - a)^2}{2} + F \frac{(x - b)^2}{2} + C_{III} x + D_{III}] . \end{aligned} \quad (12.13)$$

Ділянка IV:

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = \frac{1}{EJ_z} [M_0 + Q_0x + M(x-a)^0 + P(x-b) + q \frac{(x-c)^2}{2}]. \quad (12.14)$$

$$\theta(x) = \frac{dw(x)}{dx} = \frac{1}{EJ_z} [M_0x + Q_0 \frac{x^2}{2} + M(x-a) + P \frac{(x-b)^2}{2} + q \frac{(x-c)^3}{6} + C_{IV}]. \quad (12.15)$$

$$w(x) = \frac{1}{EJ_z} [M_0 \frac{x^2}{2} + Q_0 \frac{x^3}{6} + M \frac{(x-a)^2}{2} + P \frac{(x-b)^3}{6} + q \frac{(x-c)^4}{24} + C_{IV}x + D_{IV}] \quad (12.16)$$

Поклавши  $x = d$  для сусідніх ділянок IV і V отримаємо:

$$\begin{aligned} \theta_{IV}|_{x=d} &= \frac{1}{EJ_z} [M_0d + Q_0 \frac{d^2}{2} + M(d-a) + \\ &+ P \frac{(d-b)^2}{2} + q \frac{(d-c)^3}{6} + C_{IV}] = \\ \theta_V|_{x=d} &= \frac{1}{EJ_z} [M_0d + Q_0 \frac{d^2}{2} + M(d-a) + \\ &+ P \frac{(d-b)^2}{2} + q \frac{(d-c)^3}{6} - q \frac{(d-d)^3}{6} + C_V. \end{aligned}$$

Звідси отримаємо

$$C_{IV} = C_V. \quad (12.17)$$



$$\begin{aligned}
 w_{IV}|_{x=d} &= \frac{1}{EJ_z} \left[ M_0 \frac{d^2}{2} + Q_0 \frac{d^3}{6} + \right. \\
 &+ M \frac{(d-a)^2}{2} + P \frac{(d-b)^3}{6} + q \frac{(d-c)^4}{24} + C_{IV}d + D_{IV} \left. \right] = \\
 w_{V}|_{x=d} &= \frac{1}{EJ_z} \left[ M_0 \frac{d^2}{2} + Q_0 \frac{d^3}{6} + \right. \\
 &+ M \frac{(d-a)^2}{2} + P \frac{(d-b)^3}{6} + q \frac{(d-c)^4}{24} + C_Vd + D_V \left. \right].
 \end{aligned}$$

Звідси, з урахуванням (12.6),

$$D_{IV} = D_V. \quad (12.18)$$

Провівши подібні операції для границь інших ділянок, переконуємось в рівності відповідних довільних сталих інтегрування на всіх ділянках:

$$C_I = C_{II} = C_{III} = C_{IV} = C_V. \quad (12.19)$$

$$D_I = D_{II} = D_{III} = D_{IV} = D_V. \quad (12.20)$$

Сталі  $C$  і  $D$  знайдемо з рівнянь (12.5) і (12.6), поклавши:  $x=0$ :

$$\theta|_{x=0} = \theta_0 = \frac{C}{EJ_z}, \quad w|_{x=0} = w_0 = \frac{D}{EJ_z}. \quad (12.21)$$

Тобто, сталі інтегрування  $C$  і  $D$  пропорційні куту повороту та прогину на початку координат.

**В загальному випадку рівняння для прогинів і кутів повороту можна записати в такому вигляді:**

$$w(x) = w_0 + \theta_0 x + \frac{1}{EJ_z} \left[ M_0 \frac{x^2}{2!} + Q_0 \frac{x^3}{3!} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sum M \frac{(x-a)^2}{2!} + \sum F \frac{(x-b)^3}{3!} + \\
& + \sum q \frac{(x-c)^4}{4!} - \sum q \frac{(x-d)^4}{4!} \quad ]. \quad (12.22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\theta(x) = \theta_0 + \frac{1}{EJ_z} \left[ M_0 \frac{x^2}{1!} + Q_0 \frac{x^3}{2!} + \sum M \frac{(x-a)^2}{1!} + \right. \\
\left. + \sum F \frac{(x-b)^3}{2!} + \sum q \frac{(x-c)^4}{3!} - \sum q \frac{(x-d)^4}{3!} \right]. \quad (12.23)
\end{aligned}$$

**Рівняння (12.22) називають узагальненим (універсальним) рівнянням пружної лінії балки, а рівняння (12.23) – узагальненим (універсальним) рівнянням кутів повороту перерізів балки.**

Згинальний момент  $M_0$  і поперечну силу  $Q_0$ , які діють в перерізі балки, що збігається з початком координат, називають **статичними початковими параметрами**, а прогин  $w_0$  і кут повороту  $\theta_0$  в цьому перерізі – геометричними початковими параметрами.

Абсолютне значення максимального прогину балки  $|w_{max}|$  позначають через  $f$ . Тоді умови жорсткості при згинанні набувають виду:

$$\theta \leq [\theta], \quad (12.24)$$

$$f \leq [f], \quad (12.25)$$

тут  $[\theta]$  – допустимий кут повороту перерізу;

$[f]$  – допустима стріла прогину.

**Зауваження.** По відношенню до епюри прогинів як графічного зображення функції, епюра кутів повороту є графічним зображенням першої похідної, а епюра згинальних моментів – графічним зображенням другої похідної цієї функції.

### 12.3 Контрольні запитання

1. Що називається прогином балки?
2. Форму якої кривої набуває вісь стержня при чистому згинанні?
3. Який зв'язок існує між радіусом кривизни  $\rho$ , згинаючим моментом  $M$  і жорсткістю балки  $EJ_x$ ?
4. Правило знаків в балці при згинанні.
5. Що називається статичними початковими параметрами?
6. Запишіть рівняння рівноваги стержня для умов чистого згинання.
7. Що називається нейтральним шаром стержня при згині?
8. Який вид напруженого стану реалізується в стержні при чистому згинанні?
9. Запишіть формулу Нав'є для визначення нормальних напружень в стержні при згинанні.
10. Де знаходиться небезпечна точка перерізу стержня при чистому згинанні?
11. Які зусилля виникають в перерізі стержня при плоскому поперечному згинанні?
12. Запишіть формулу Журавського для визначення дотичних напружень в стержні при згинанні.
13. Сформулюйте основні припущення щодо характеру розподілу дотичних напружень в перерізі стержня при поперечному згинанні, сформульовані Журавським. Для яких перерізів ці припущення справедливі?
14. Сформулюйте правило знаків для переміщень в стержнях при згинанні.
15. Запишіть основне диференціальне рівняння пружної лінії стержня.
16. Умова міцності при згинанні.
17. Умова жорсткості при згинанні.

## РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

1. **Пісаренко, Г.С.** Опір матеріалів [Текст]: підручник / Г.С. Пісаренко, О.Л. Квітка, Л.С. Уманський; за ред. Г.С. Пісаренка. - 2 ге вид., допов. і перероб. – К.: Вища шк., 2004. – 655 с.
2. **Беляев, Н.М.** Сопротивление материалов [Текст]: учебник / Н.М. Беляев – М.: Гос.изд. технико-теоретич. лит, 1958. – 856 с.
3. **Гребенников, М.Н.** Геометрические характеристики плоских сечений [Текст]: учеб. пособие / М.Н. Гребенников, Н.И. Пекельный. – Х.: «Нац. аэрокосм. ин-т», 2015. – 92 с.
4. **Феодосьев, В.И.** Сопротивление материалов [Текст]: учеб. для вузов / Феодосьев В.И. – М.: Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. – 592 с.
5. **Варданян, Г.С.** Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности [Текст] / Г.С. Варданян, В.И. Андреев, Н.М. Атаров, А.А. Горшков – М.: ИНФРА-М, 2014. – 512 с.
6. **Писаренко, Г.С.** Справочник по сопротивлению материалов [Текст] / Г.С. Писаренко, А.П. Яковлев, В.В. Матвеев – К.: Наук. думка, 1988. – 736 с.
7. **Мельников, О.В.** Опір матеріалів [Текст] / О.В. Мельніков - Тернопіль: видавництво „ТДТУ ім. Пулюя”, 2003. – 212 с.
8. **Посацький, С.Л.** Опір матеріалів [Текст] / С.Л. Посацький - Львів: видавництво Львівського університету, 1972. – 403 с.
9. Державний стандарт України документація. Звіти у сфері науки і техніки структура і правила оформлення ДСТУ 3008–95